

Ομογενείς Διαφορικές Εξισώσεις

1ης - Τάξης



Β' Μαχίμων Ι - Β' Μηχανικών
2025 - 2026

Ομογενείς Διαφορικές Εξισώσεις

• Γενική μορφή

$y' = f(x, y)$ ή $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, όπου
 $f(x, y)$ είναι ομογενής πραγματική συν-
άρτηση

Ομογενής συνάρτηση

Είναι η συνάρτηση, για την οποία ισχύει

$$f(tx, ty) = t^\lambda \cdot f(x, y), \quad t \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{N},$$

όπου λ είναι ο βαθμός ομογένειας

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y)$:

$$f(x, y) = x^4 - 3x^3y + 4x^2y^2 - 5xy^3 + 3y^4$$

Να αποδειχθεί ότι είναι ομογενής

$$f(x, y) = x^4 - 3x^3y + 4x^2y^2 - 5xy^3 + 3y^4$$

Για την απόδειξη: $\begin{cases} x \longrightarrow tx \\ y \longrightarrow ty \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

ξήν δέτουμε :

$$\Rightarrow f(tx, ty) = (tx)^4 - 3(tx)^3(ty) + 4(tx)^2(ty)^2 - 5(tx)(ty)^3 + 3(ty)^4$$

$$\Rightarrow f(tx, ty) = t^4 (x^4 - 3x^3y + 4x^2y^2 - 5xy^3 + 3y^4)$$

$$\Rightarrow f(tx, ty) = t^4 \cdot f(x, y)$$

Επομένως η $f(x, y)$ είναι ομογενής ως προς x, y , βαθμού ομογένειας $\lambda = 4$.

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι ρητές συναρτήσεις, στις οποίες ο αριθμητής και ο παρονομαστής είναι ομογενείς συναρτήσεις του ίδιου βαθμού ομογένειας. Οι ρητές αυτές συναρτήσεις είναι ομογενείς

Παράδειγμα

$$f(x, y) = \frac{x^4y - y^5}{x^5 - y^5}. \text{ Παρατηρούμε ότι ο αριθμητής και ο παρονομαστής είναι 5ου βαθμού ομογενείς συναρτήσεις, άρα και } f(x, y) \text{ ομο-}$$

γενής συνάρτηση.

Έστω ομογενής Διαφορική Εξίσωση

$$y' = f(x, y)$$

Για την λύση κάνουμε

αντικατάσταση

$$y = \underline{y(x)} = \underline{x u(x)}$$

$$y = xu \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(xu)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dx}u + x \frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$$

Με την αντικατάσταση αυτή προκύπτει νέα Δ.Ε, με άγνωστη συνάρτηση την $u(x)$.

Η νέα Δ.Ε. είναι χωρισμένων μεταβλητών.

Παραδείγματα

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$ (1), $x \neq 0$. Η (1) είναι ομογενής Δ.Ε, γιατί η $f(x, y) = \frac{x+y}{x}$ είναι ομογενής συνάρτηση, (βαθμός αριθμητή = βαθμός παρονομαστή ως προς x, y).

• Μετασχηματισμός: $y = xu$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$$

Άρα η (1) μετά την αντικατάσταση γίνεται

$$\Rightarrow u + x \frac{du}{dx} = \frac{x + xu}{x}, \quad x \neq 0$$

$$\Rightarrow u + x \frac{du}{dx} = 1 + u \Rightarrow x \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow$$

$$du = \frac{1}{x} dx \Rightarrow \int du = \int \frac{1}{x} dx + C$$

$$\Rightarrow u(x) = \ln|x| + \ln C, \quad C \in \mathbb{R}_+ \text{ και } y(x) = \frac{u(x)}{x}$$

$$\Rightarrow y(x) = x \ln(C|x|).$$

2. Να λυθεί η Δ.Ε $2xy \frac{dy}{dx} - (x^2 + y^2) = 0$
 $x, y \neq 0$.

Λύση

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy}, \quad x, y \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 y^0 + x^0 y^2}{2x^1 y^1}, \text{ ο αριθμητής ως προς } x, y$$

είναι του (αδροίζουμε τους εκθέτες x, y)
ίδιου βαθμού με τον παρονομαστή του βαθ-
μού-, το οποίο σημαίνει ότι η συνάρτηση
του 2ου μέλους είναι ομογενής, άρα και η

Δ.Ε είναι ομογενής της μορφής $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, όπου $f(x,y)$ ομογενής συνάρτηση.

Εφ' όσον η Δ.Ε. είναι ομογενής, θα εφαρμόσουμε τόν μετασχηματισμό

$y(x) = x u(x)$, $y = xu$, όπου u είναι μια νέα συνάρτηση ως προς x

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy}, \quad xy \neq 0$$

$$\bullet \quad y = xu \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(xu) \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 \cdot u + x \frac{du}{dx} \quad \left| \quad (fg)' = f'g + f \cdot g' \right|$$

Επομένως αντικαθιστούμε τα $y = xu$ και

$$\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}, \quad \text{οπότε προκύπτει}$$

$$u + x \frac{du}{dx} = \frac{x^2 + (xu)^2}{2x(xu)}$$

$$\Rightarrow u + x \frac{du}{dx} = \frac{x^2(1+u^2)}{2x^2u}, \quad x \neq 0$$

$$\Rightarrow u + x \frac{du}{dx} = \frac{1+u^2}{2u}$$

$$\Rightarrow x \frac{du}{dx} = \frac{1+u^2-2u^2}{2u}$$

$$\Rightarrow x \frac{du}{dx} = \frac{1-u^2}{2u}$$

$$\Rightarrow \frac{2u}{1-u^2} du = \frac{1}{x} dx$$

που είναι μια Δ.Ε. χωριζομένων μεταβλητών.

Παρατήρηση

Στόχος της αντικατάστασης είναι η μετατροπή της αρχικής Δ.Ε με άγνωστη συνάρτηση $y(x)$ σε Δ.Ε. χωριζομένων μεταβλητών με άγνωστη πλέον συνάρτηση την $u(x)$.

$$\text{Συνεπώς } \frac{2u}{1-u^2} du = \frac{1}{x} dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{2u}{1-u^2} du = \int \frac{1}{x} dx + c$$

$$\Rightarrow - \int \frac{(1-u^2)'}{1-u^2} du = \ln|x| + c$$

$c \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow -\ln|1-u^2| = \ln|x| + \ln c$$

Μπορούμε να δέσουμε όπου $c = \ln c'$,
για να προκύψει πιο εύκολα το αποτέ-
λεσμα

$$\Rightarrow \ln \frac{1}{|1-u^2|} = \ln|x| + \ln c', \quad c' \in \mathbb{R}_+$$

$$\Rightarrow \ln \frac{1}{|1-u^2|} = \ln(c'|x|)$$

$$\Rightarrow |1-u^2| = \frac{1}{c'|x|}$$

$$\text{Είναι όμως } y = xu \Rightarrow u(x) = \frac{y(x)}{x}$$

$$\Rightarrow \left| 1 - \frac{y^2}{x^2} \right| = \frac{1}{c'|x|}, \quad c' \in \mathbb{R}_+$$

3. Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$y' = \frac{x-y}{x+y} \quad \text{και} \quad y(1) = 1$$

Λύση

$$y' = \frac{x-y}{x+y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y} \quad (1)$$

Η (1) είναι ομογενής Δ.Ε., διότι η
 $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ είναι ομογενής συνάρτηση

Άρα θέτουμε $y = xu$ και $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$

οπότε η (1) γίνεται

$$u + x \frac{du}{dx} = \frac{x - xu}{x + xu}$$

$$\Rightarrow u + x \frac{du}{dx} = \frac{1-u}{1+u}$$

$$\Rightarrow x \frac{du}{dx} = \frac{1-u-u-u^2}{1+u}$$

$$\Rightarrow x \frac{du}{dx} = \frac{-u^2 - 2u + 1}{1+u}$$

$$\Rightarrow \frac{1+u}{-u^2 - 2u + 1} du = \frac{1}{x} dx, \text{ χωρίζουμε! -}$$

νωι μεταβλητών Δ.Ε.

$$\Rightarrow \int \frac{1+u}{-u^2 - 2u + 1} du = \int \frac{1}{x} dx + c$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \int \frac{(-u^2 - 2u + 1)'}{-u^2 - 2u + 1} du = \ln|x| + \ln c'$$

$\ln c' = c$

$$\text{διότι } (-u^2 - 2u + 1)' = -2u - 2 = -2(1+u)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \ln|-u^2 - 2u + 1| = \ln(c'|x|)$$

$$\Rightarrow \ln|-u^2 - 2u + 1|^{-\frac{1}{2}} = \ln(c'|x|)$$

$$\Rightarrow |-u^2 - 2u + 1|^{-\frac{1}{2}} = (c'|x|)$$

$$\Rightarrow |-u^2 - 2u + 1| = (c'|x|)^{-2}$$

Τελικά $u = \frac{y}{x}$, άρα

$$\left| -\frac{y^2}{x^2} - 2\frac{y}{x} + 1 \right| = (c'|x|)^{-2}$$

Δίνεται $y(1) = 1$

$$\text{για } x=1 \Rightarrow \left| -\frac{1^2}{1^2} - 2\frac{1}{1} + 1 \right| = (c' \cdot 1)^{-2}$$

$$\Rightarrow c' = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left| -\frac{y^2}{x^2} - 2\frac{y}{x} + 1 \right| = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} |x| \right)^{-2}, \text{ όπου } y=y(x)$$

η λύση του Π.Α.Τ.