

Μη πλήρεις Διαφορικές
Εξισώσεις

Β' Μαχίμων Ι - Β' Μηχανικών
2025 - 2026

Σ. Κυρίτση- Γιάλλουρου

Μη πλήρεις Δ. Ε. 1ης τάξης- Ολοκληρώνοντες Παράγοντες

Ορισμένες φορές συναντούμε Δ.Ε. που δεν είναι πλήρεις, αλλά μπορούν να μετατραπούν σε πλήρεις, αν πολλαπλασιαστούν κατά μέλη, με την κατάλληλη συνάρτηση, η οποία συμβολίζεται συνήθως $\mu(x, y)$ γενικά.

Οι συναρτήσεις $\mu(x, y)$ ονομάζονται ολοκληρώνοντες παράγοντες ή πολλαπλασιαστές Euler.

Πώς όμως βρίσκουμε αυτές τις συναρτήσεις;
Υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις:

1η Περίπτωση

Να μας δίνεται ένας ολοκληρώνοντας παράγοντας της Δ.Ε.

2η Περίπτωση

Να βρίσκουμε εμείς αυτούς τους παράγοντες εφαρμόζοντας ανάλογη μεθοδολογία.

Η 2η Περίπτωση δεν θα μας απασχολήσει.

1η περίπτωση: Ο ολοκληρώνων
παράγοντας μας δίνεται

Παράδειγμα:

Δίνεται η Δ.Ε: $(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0$ (1).

Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $\mu(x, y) = x$
είναι ένας ολοκληρώνων της εξίσωσης
(1) και στη συνέχεια να λυθεί η Δ.Ε.

Λύση:

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0 \quad (1)$$

Ερώτηση: Είναι η (1) πλήρης;

Δεδομένων ότι από την (1)

$M(x, y) = 3xy + y^2$ και $N(x, y) = x^2 + xy$,
ελέγχουμε την πληρότητα της Δ.Ε (1),
δηλαδή αν ισχύει

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\text{Είναι: } \frac{\partial M}{\partial y} = 3x + 2y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \text{η (1) δεν είναι πλήρης}$$

Τώρα, για να αποδείξουμε ότι η $\mu(x,y) = x$ είναι ένας ολοκληρώνοντας παράγοντας, πρέπει να πολλαπλασιάσουμε την (1) $\cdot \mu(x,y)$, $\mu(x,y) = \mu(x) = x$

$$(1) \cdot \mu(x) \Rightarrow x(3x^2y + xy^2) + x(x^2 + xy)y' = 0 \\ \Rightarrow (3x^2y + xy^2) + (x^3 + x^2y)y' = 0 \quad (2)$$

και η Δ.Ε. (1) είναι ισοδύναμη της (2).

- $M_1(x,y) = 3x^2y + xy^2$

- $N_1(x,y) = x^3 + x^2y$

Ελέγχουμε τώρα την πληρότητα της (2), αν

$$\frac{\partial M_1}{\partial y} = \frac{\partial N_1}{\partial x}, \text{ όπου τώρα}$$

$$\begin{array}{l|l} \frac{\partial M_1}{\partial y} = 3x^2 + 2xy & \frac{\partial M_1}{\partial y} = \frac{\partial N_1}{\partial x} \Rightarrow \text{η (2)} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x} = 3x^2 + 2xy & \text{είναι πλήρης} \end{array}$$

και επομένως $\mu(x,y) = \mu(x) = x$ είναι ένας ολοκληρώνοντας παράγοντας της (1).

Εφ' όσον η (2) είναι πλήρης, σύμφωνα με τον ορισμό της πληρότητας, υπάρχει $F(x,y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \text{ και } \frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) \text{ και η}$$

γενική λύση της (2) είναι $F(x,y)=c, c \in \mathbb{R}$.

Γενικά αν έχουμε $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$,
η οποία είναι πλήρης $\left(\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}\right)$,

τότε $\exists F(x,y) : \frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y)$ και

$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$ και $F(x,y)=c, c \in \mathbb{R}$ η γενική

λύση της Δ.Ε. Για την απόδειξη, αντικα-

θιστούμε τις M και N με $\frac{\partial F}{\partial x}$ και

$\frac{\partial F}{\partial y}$ στην Δ.Ε $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$,

οπότε έχουμε: $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0 \Rightarrow$

$\frac{d}{dx} (F(x,y)) = 0 \Rightarrow F(x,y) = c, c \in \mathbb{R}$

διότι γνωρίζουμε

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(F(x,y)) &= \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \\ &= \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y'\end{aligned}$$

Επιστρέφουμε στη λύση της Δ. Ε. (2) και είναι:

$$\begin{array}{l|l}\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2y + xy^2 & (3) \text{ και} \\ \frac{\partial F}{\partial y} = x^3 + x^2y & (4)\end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Επιλέγουμε} \\ \text{να ολοκληρώ-} \\ \text{σουμε την (4),} \end{array} \right.$$

$$(4) \Rightarrow F(x,y) = \int (x^3 + x^2y) dy + c(x)$$

$$\Rightarrow F(x,y) = x^3y + \frac{1}{2} x^2y^2 + c(x) \quad (5)$$

$$(3), (5) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left\{ x^3y + \frac{1}{2} x^2y^2 + c(x) \right\} = 3x^2y + xy^2$$

$$\Rightarrow 3x^2y + xy^2 + c'(x) = 3x^2y + xy^2$$

$$\Rightarrow c'(x) = 0 \Rightarrow c(x) = c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

$$\text{Επομένως } F(x,y) = x^3y + \frac{1}{2} x^2y^2 + c_1 \quad \Rightarrow$$

και η γενική λύση $F(x,y) = C$

$$x^3 y + \frac{1}{2} x^2 y^2 + C_1 = C, \quad C_1, C \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{x^3 y + \frac{1}{2} x^2 y^2 = C'} \quad (6), \text{ όπου } C - C_1 = C' \in \mathbb{R}$$

$y(x)$ είναι η άγνωστη συνάρτηση. Η γενική λύση (6) δίνεται σε πεπλεγμένη μορφή.

Ασκήσεις πλήρων και μη πλήρων

Διαφορικών Εξισώσεων

1. Δίνεται η Δ.Ε:

$$(e^x \sin y - 2y \sin x) + (e^x \cos y + 2 \cos x) y' = 0 \quad (1)$$

Να βρεθεί η γενική λύση

Λύση:

$$M(x, y) = e^x \sin y - 2y \sin x$$

$$N(x, y) = e^x \cos y + 2 \cos x$$

Ελέγχουμε αν η (1) είναι πλήρης,

$$\begin{array}{l} \frac{\partial M}{\partial y} = e^x \cos y - 2 \sin x \\ \frac{\partial N}{\partial x} = e^x \cos y - 2 \sin x \end{array} \quad \Bigg| \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

οπότε η (1) πλήρης, άρα

$$\exists F(x, y): \frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y) = e^x \sin y - 2y \sin x \quad (2)$$

$$\text{και } \frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y) = e^x \cos y + 2 \cos x \quad (3)$$

Ακόμη, η γενική λύση της (1) είναι $F(x, y) = C$,
 $C \in \mathbb{R}$.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^x \sin y - 2y \sin x \quad (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = e^x \cos y + 2 \cos x \quad (3), \text{ ολοκληρώνουμε την (3),}$$

$$(3) \Rightarrow F(x, y) = \int (e^x \cos y + 2 \cos x) dy + c(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{F(x, y) = e^x \sin y + 2y \cos x + c(x)} \quad (4)$$

$$(2), (4) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \{ e^x \sin y + 2y \cos x + c(x) \} = e^x \sin y - 2y \sin x$$

$$\Rightarrow e^x \sin y - 2y \sin x + c'(x) = e^x \sin y - 2y \sin x$$

$$\Rightarrow c'(x) = 0 \Rightarrow \boxed{c(x) = c_1}, c_1 \in \mathbb{R}. \text{ Επομένως}$$

$$F(x, y) = e^x \sin y + 2y \cos x + c_1 \text{ και}$$

$$\text{γενική λύση της (1)} \quad F(x, y) = C \Rightarrow (C \in \mathbb{R})$$

$$\boxed{e^x \sin y + 2y \cos x = C - c_1 = C'}, C' \in \mathbb{R}$$

όπου $y(x)$ είναι η άγνωστη συνάρτηση, η δε λύση της (1) δίνεται σε πεπλεγμένη μορφή.

2. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών (π.Α.Τ.):

$$(y-1)^2 + \left(xy - 2x + \frac{x-1}{y} \right) y' = 0 \quad (1), \quad y \neq 0$$

αν έχει ολοκληρώνοντα παράγοντα

$$\mu(x, y) = \frac{y}{(y-1)^2}, \quad y \neq 1. \text{ Ισχύει δε } y(1) = 2.$$

Λύση:

Παίρνουμε την Δ.Ε (1), όπου

$$M(x, y) = (y-1)^2$$

$$N(x, y) = xy - 2x + \frac{x-1}{y}, \text{ ελέγχουμε πληρότητα}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2(y-1)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = y - 2 + \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}, \text{ επομένως η (1) δεν είναι πλήρης}$$

$$\mu(x, y) = \mu(y) = \frac{y}{(y-1)^2}, \quad y \neq 1, \text{ ένας ολοκληρώνοντας παρ-άγοντας}$$

Πολλαπλασιάζουμε την (1) $\cdot \mu(y)$ και παίρνουμε

$$\frac{y}{(y-1)^2} \cdot (y-1)^2 + \frac{y}{(y-1)^2} \cdot \left(xy - 2x + \frac{x-1}{y} \right) y' = 0$$

$$\Rightarrow y + \frac{xy^2 - 2xy + x - 1}{(y-1)^2} y' = 0 \quad (2)$$

$$M_1(x, y) = y \quad \text{και} \quad N_1(x, y) = \frac{xy^2 - 2xy + x - 1}{(y-1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M_1}{\partial y} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial N_1}{\partial x} = \frac{y^2 - 2y + 1}{(y-1)^2} = \frac{(y-1)^2}{(y-1)^2} = 1, y \neq 1$$

$$\text{οπότε} \quad \frac{\partial M_1}{\partial y} = \frac{\partial N_1}{\partial x}, \text{ άρα η (2) είναι πλήρης}$$

Επομένως, σύμφωνα με τον ορισμό πλήρους
Δ.Ε. $\exists F(x, y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M_1(x, y) = y \quad (3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N_1(x, y) = \frac{xy^2 - 2xy + x - 1}{(y-1)^2} \quad (4)$$

και $F(x, y) = c, c \in \mathbb{R}$ η γενική λύση

Ολοκληρώνουμε την (3) $\Rightarrow F(x,y) = \int y dx + c(y)$

$$\Rightarrow F(x,y) = xy + c(y) \quad (5)$$

$$(4), (5) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \{xy + c(y)\} = \frac{xy^2 - 2xy + x - 1}{(y-1)^2}$$

$$\Rightarrow x + c'(y) = \frac{xy^2 - 2xy + x - 1}{(y-1)^2}$$

$$\Rightarrow c'(y) = \frac{xy^2 - 2xy + x - 1 - x(y-1)^2}{(y-1)^2}$$

$$\Rightarrow c'(y) = \frac{xy^2 - 2xy + x - 1 - xy^2 + 2xy - x}{(y-1)^2}$$

$$\Rightarrow c'(y) = -\frac{1}{(y-1)^2} \Rightarrow c(y) = -\int (y-1)^{-2} dy + c_1$$

$c_1 \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow c(y) = -\frac{(y-1)^{-2+1}}{-2+1} + c_1 \Rightarrow c(y) = \frac{1}{y-1} + c_1$$

η δε $F(x,y)$ γίνεται :

$$F(x,y) = xy + \frac{1}{y-1} + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}, y \neq 1$$

Γενική λύση της (2) $\Leftrightarrow (1)$ είναι

$$F(x,y) = C \Rightarrow xy + \frac{1}{y-1} = C', \quad \text{όπου } C - c_1 = C', \quad C' \in \mathbb{R}$$

Μας δίνεται όμως $y(1) = 2$, άρα

$$1 \cdot 2 + \frac{1}{2-1} = c' \Rightarrow c' = 3.$$

Τελικά, η λύση του Π.Α.Τ. είναι

$$\boxed{xy + \frac{1}{y-1} = 3} \quad \text{και } y \neq 1$$

