

Διαφορικές Εξισώσεις  
2ης τάξης

Β' Μαθίμων Ι και Β' Μηχανικών  
2025 - 2026

# Διαφορικές Εξισώσεις 2ης-τάξης με σταθε- ρους συντελεστές-Γραμμικές

## 1. Ομογενείς

Γενική μορφή :  $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$  (1)

$a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ ,  $y(x)$  : άγνωστη συνάρτηση

Για να λύσουμε την (1)

Γράφουμε την αντίστοιχη αλγεβρική  
χαρακτηριστική εξίσωση, δέτοντας όπου

$$y'' \longrightarrow \lambda^2$$

$$y' \longrightarrow \lambda$$

$$y \longrightarrow 1$$

Οπότε προκύπτει:  $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$  (2)

που είναι 2ου βαθμού αλγεβρική εξίσωση.

α. Αν  $\Delta = a_1^2 - 4a_2 > 0$ , η (2) έχει δύο  
ρίζες πραγματικές και άνισες,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Αντίστοιχα, η γενική μορφή λύσης της ΔΕ(1)

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

β.  $\Delta = 0 \Rightarrow a_1^2 - 4a_2 = 0$ , η (2) έχει μία ρίζα διπλή:  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\frac{a_1}{2}$ .

Στην περίπτωση αυτή η γενική λύση της (1) είναι:

$$y(x) = c_1 e^{\lambda x} + x c_2 e^{\lambda x}$$

γ. Αν  $\Delta < 0 \Rightarrow a_1^2 - 4a_2 < 0$ , τότε η (2) έχει 2 ρίζες συζυγείς μιγαδικές, έστω

$$\lambda_1 = \alpha + \beta i, \quad \lambda_2 = \alpha - \beta i$$

και η γενική λύση της (1) είναι

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

$$\lambda_1 = 3 + 2i, \quad \lambda_2 = 3 - 2i$$

$$y(x) = c_1 e^{3x} \cos(2x) + c_2 e^{3x} \sin(2x)$$

## Παραδείγματα

Να λυθούν οι κάτωθι Δ.Ε.

$$1. \quad y'' - 3y' + 2y = 0$$

Βρίσκουμε τη Χ.Ε.

$$y'' \longrightarrow \lambda^2$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$y' \longrightarrow \lambda$$

$$y \longrightarrow 1$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

Η γενική λύση της ΔΕ είναι  $y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^x \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\text{Αν } y(1) = -1, \quad y(0) = 2$$

$$\text{Για } y(1) = -1 \Rightarrow -1 = c_1 e^2 + c_2 e$$

$$c_1 e^2 + c_2 e = -1 \Rightarrow c_1 e + c_2 = -\frac{1}{e}$$

$$\text{Για } y(0) = 2$$

$$\Rightarrow$$

$$c_1 + c_2 = 2$$

$$\Rightarrow c_1(e-1) = -\frac{1}{e} - 2 \Rightarrow c_1 = -\frac{1+2e}{e(e-1)}$$

$$\text{κΟΙ } c_2 = 2 + \frac{1+2e}{e(e-1)} \Rightarrow c_2 = \frac{2e^2 - 2e + 1 + 2e}{e(e-1)}$$

$$\Rightarrow c_2 = \frac{2e^2 + 1}{e(e-1)}$$

$$2. \quad y'' - 6y' + 9y = 0 \quad y'' \rightarrow \lambda^2 \quad y' \rightarrow \lambda \quad y \rightarrow 1$$

$$x \in : \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow (\lambda - 3)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 3$$

$$\text{Γενική λύση } y(x) = c_1 e^{3x} + x c_2 e^{3x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$3. \quad y'' - 4y' + 5y = 0$$

$$x \in : \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2}$$

$$\lambda = \frac{4 \pm 2i}{2} \begin{cases} \lambda_1 = 2+i & \lambda_1 = a+ib \\ \lambda_2 = 2-i & \lambda_2 = a-ib \end{cases}$$

$$y(x) = c_1 e^{ax} \cos(bx) + c_2 e^{ax} \sin(bx)$$

$$a=2, b=1$$

$$\Rightarrow y(x) = c_1 e^{2x} \cos x + c_2 e^{2x} \sin x$$

Διαφορικές Εξισώσεις 2ης- τάξης  
Γραμμικές με σταθερούς συντελεστές  
Μη ομογενείς και ειδική μορφή 2ου μέλους

Γενική μορφή:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) (A \cos \omega x + B \sin \omega x) e^{\rho x}$$

π.χ.  $y'' - 5y' + 3y = x^2 \cos 2x e^{-2x}$  (1)

όπου  $a_1, a_2, A, B, \omega, \rho$  είναι πραγματικές σταθερές και  $f(x)$  είναι πολωνυμική συνάρτηση ως προς  $x$ .

Η (1) έχει αντίστοιχη ομογενή  $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$  (2)

Πώς λύνουμε την (1);

1ο Βήμα

Είναι γνωστό ότι η μορφή της γενικής λύσης της Δ.Ε. (1)

$$y(x) = y_{\text{ομ}}(x) + y_{\text{μερ}}(x) \quad (3)$$

όπου  $y_{om}(x)$  είναι η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς, δηλαδή της (2) και  $y_{μερ}(x)$  είναι μια μερική λύση της (1).

### 2ο Βήμα

Βρίσκουμε τη γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς :  $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$  (2)  
γράφοντας τη Χ.Ε :  $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$ ,  
άρα βρίσκουμε την  $y_{om}(x)$ .

### 3ο Βήμα

Βρίσκουμε μια μερική λύση  $y_{μερ}(x)$  της αρχικής Δ.Ε. (1).

Είναι γνωστό ότι η μορφή μιας μερικής λύσης της Δ.Ε. (1) είναι

$$y_{μερ}(x) = x^r [\pi(x) \cos(\omega x) + \varphi(x) \sin(\omega x)] e^{\rho x} \quad (4)$$

όπου  $r$  η πολλαπλότητα της ρίζας  $\rho + i\omega$  στην χαρακτηριστική εξίσωση (2)

Όταν βρούμε τη μερική λύση, την αντικαθιστούμε στην αρχική Δ.Ε (1) και έτσι την υπολογίςουμε πλήρως.

### Παραδείγματα

1. Να λυθεί η Δ.Ε  $y'' - 4y = x^2 + 1$  (1)

$$a_1 = 0, a_2 = -4 \text{ και } f(x) = x^2 + 1$$

Η μορφή της γενικής λύσης της (1) είναι

$$y(x) = y_{\text{ομ}}(x) + y_{\text{μερ}}(x)$$

### 1ο Βήμα

Βρίσκουμε την λύση της αντίστοιχης ομογενούς

Παίρνουμε την αντίστοιχη ομογενή Δ.Ε.

της (1), δηλαδή την

$$y'' - 4y = 0 \quad (2), \text{ με χαρακτηριστική}$$

$$\begin{array}{l} \text{Εξίσωση} \\ \text{χ. Ε.} \end{array} \quad \begin{array}{l} y'' \longrightarrow \lambda^2 \\ y' \longrightarrow \lambda \\ y \longrightarrow 1 \end{array} \Rightarrow \lambda^2 - 4 = 0 \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -2 \end{array}$$

Επομένως  $y_{ομ}(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

## 2ο βήμα

Υπολογισμός  $y_{μερ}(x)$

Επειδή η συνάρτηση  $f(x) = x^2 + 1$  είναι πολυ-  
ωνυμική 2ου βαθμού ως προς  $x$ , τότε και  
η μερική λύση θα είναι πολυώνυμο πλήρες  
δευτέρου βαθμού ως προς  $x$ , δηλαδή

$$\Rightarrow y_{μερ}(x) = k_1 x^2 + k_2 x + k_3 \quad (3)$$

όπου  $k_1, k_2, k_3$  πραγματικοί αριθμοί,  
τους οποίους αν υπολογίσουμε θα βρού-  
με μια μερική λύση της αρχικής Δ.Ε.

(1) και τελικά, επειδή ήδη έχουμε βρεί  
την  $y_{ομ}(x)$  στο προηγούμενο βήμα,  
θα βρούμε τη γενική λύση της (1).

Η γενική λύση όπως αναφέραμε είναι

$$y(x) = y_{ομ}(x) + y_{μερ}(x)$$

Όμως εφ' όσον η (3) είναι μερική λύση της Δ. Ε. (1) πρέπει να την επαληθεύει:

$$\rightarrow y'' - 4y = x^2 + 1 \Rightarrow y_{\text{μερ}}''(x) - 4y_{\text{μερ}}(x) = x^2 + 1 \quad (4)$$

$$\bullet y_{\text{μερ}}(x) = k_1 x^2 + k_2 x + k_3$$

$$y_{\text{μερ}}'(x) = 2k_1 x + k_2$$

$$y_{\text{μερ}}''(x) = 2k_1$$

Επομένως, αντικαθιστώντας στην (4)

$$\text{παίρνουμε } 2k_1 - 4k_1 x^2 - 4k_2 x - 4k_3 = x^2 + 1$$

$$\rightarrow -4k_1 x^2 - 4k_2 x + (2k_1 - 4k_3) = x^2 + 1$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} -4k_1 = 1 \\ -4k_2 = 0 \\ 2k_1 - 4k_3 = 1 \end{array} \quad \Rightarrow \begin{array}{l} k_1 = -\frac{1}{4} \\ k_2 = 0 \\ 2\left(-\frac{1}{4}\right) - 4k_3 = 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow k_1 = -\frac{1}{4}, \quad k_2 = 0, \quad k_3 = -\frac{3}{8}$$

$$\text{και } y_{\text{μερ}}(x) = -\frac{1}{4} x^2 - \frac{3}{8}$$

Συνεπώς η γενική λύση της Δ.Ε. (1) είναι

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

μέχρι εδώ

2. Να λυθεί η Δ.Ε :  $y'' - 3y' + 2y = xe^x$  (1)

$$a_1 = -3, a_2 = 2, f(x) = x, \omega = 0, \rho = 1$$

$$\omega = 0, \rho = 1 \Rightarrow \rho + i\omega = 1 + 0i \Rightarrow \boxed{\rho + i\omega = 1}$$

$$\text{και } y(x) = y_{\text{ομ}}(x) + y_{\text{μερ}}(x) \quad (2)$$

1ο Βήμα

$y_{\text{ομ}}(x) = ;$  αντίστοιχη ομογενής

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

$$x \in \rightarrow y'' \rightarrow \lambda^2, y' \rightarrow \lambda, y \rightarrow 1$$

$$x \in : \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_{\text{ομ}}(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} \quad (3), c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2ο Βήμα

$$y_{\text{μερ}}(x) = ;$$

$$y_{\text{μερ}}(x) = x^r \left[ p(x) \cos \omega x + q(x) \sin \omega x \right] e^{\rho x}$$

$r$  : πολλαπλότητα της ρίζας  $\rho + i\omega = 1$   
στη  $XE$

Επειδή  $\lambda_1 = 1$  είναι μία από τις δύο ρίζες της  $XE$ , το  $r = 1$

$$\omega = 0 \Rightarrow \cos 0 = 1, \sin 0 = 0$$

$$\rho = 1$$

$$\text{οπότε : } y_{\text{μερ}}(x) = x^1 (p(x) \cdot 1 + q(x) \cdot 0) e^{1x}$$

$$\Rightarrow y_{\text{μερ}}(x) = x \cdot p(x) \cdot e^x$$

με  $p(x)$  πολυώνυμο ίδιου βαθμού με την  $f(x) = x$ , δηλαδή 1ου βαθμού, άρα  $p(x) = k_1 x + k_2$  και τελικά

$$y_{\text{μερ}}(x) = x (k_1 x + k_2) e^x \quad (4)$$

Εφ' όσον η (4) είναι μια μερική λύση της (1) πρέπει να την επαληθεύει, δηλαδή

$$y'' - 3y' + 2y = xe^x \quad (1),$$

$$y_{\mu\epsilon\rho}'' - 3y_{\mu\epsilon\rho}' + 2y_{\mu\epsilon\rho} = xe^x \quad (5)$$

$$y_{\mu\epsilon\rho}(x) = x(k_1x + k_2)e^x$$

Επομένως

$$y_{\mu\epsilon\rho}' = [x(k_1x + k_2)e^x]' = [(k_1x^2 + k_2x)e^x]'$$

$$\Rightarrow y_{\mu\epsilon\rho}' = (2k_1x + k_2)e^x + (k_1x^2 + k_2x)e^x$$

$$\Rightarrow y_{\mu\epsilon\rho}' = [k_1x^2 + (2k_1 + k_2)x + k_2]e^x$$

$$\Rightarrow y_{\mu\epsilon\rho}'' = (2k_1x + 2k_1 + k_2)e^x + [k_1x^2 + (2k_1 + k_2)x + k_2]e^x$$

$$\Rightarrow y_{\mu\epsilon\rho}'' = [k_1x^2 + (4k_1 + k_2)x + 2k_1 + 2k_2]e^x$$

Αντικαθιστώντας τις  $y_{\mu\epsilon\rho}$ ,  $y_{\mu\epsilon\rho}'$  και  $y_{\mu\epsilon\rho}''$  στην (5) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
 & [k_1 x^2 + (4k_1 + k_2)x + 2k_1 + 2k_2]e^x \\
 & - 3[k_1 x^2 + (2k_1 + k_2)x + k_2]e^x \\
 & + 2x(k_1 x + k_2)e^x = xe^x
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow [(4k_1 + k_2 - 6k_1 - 3k_2 + 2k_2)x + (2k_1 + 2k_2 - 3k_2)]e^x = xe^x$$

$$\Rightarrow -2k_1 x + 2k_1 - k_2 = x. \text{ εκ ταυτότητας ίσα πολυώνυμα}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l|l} -2k_1 = 1 & k_1 = -\frac{1}{2} \\ 2k_1 - k_2 = 0 & k_2 = -1 \end{array}$$

$$\text{Άρα } y_{\text{μερ}}(x) = x\left(-\frac{1}{2}x - 1\right)e^x$$

$$\Rightarrow y_{\text{μερ}}(x) = \left(-\frac{1}{2}x^2 - x\right)e^x$$

και η γενική λύση της Δ.Ε (1) είναι

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \left(-\frac{1}{2}x^2 - x\right)e^x$$

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3. Να λυθεί η Δ.Ε:  $y'' - 4y = x^2 + 1$  (1)

$$a_1 = 0, a_2 = -4, f(x) = x^2 + 1, \omega = 0, \rho = 0$$

$$\Rightarrow \rho + i\omega = 0 + i0 \Rightarrow \rho + i\omega = 0$$

**1ο Βήμα**  $y(x) = y_{\text{ομ}}(x) + y_{\text{μερ}}(x)$

Βρίσκουμε την  $y_{\text{ομ}}(x)$ .

Γράφουμε την αντίστοιχη ομογενή της (1)

$$y'' - 4y = 0 \quad (2)$$

Για να βρούμε την  $y_{\text{ομ}}(x)$ , γράφουμε την  $\chi E$ :

$$y'' \rightarrow \lambda^2, \quad y' \rightarrow \lambda, \quad y \rightarrow 1$$

$$\chi E: \quad \lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow (\lambda + 2)(\lambda - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

οπότε  $y_{\text{ομ}}(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$  (3)  
 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

## 2ο Βήμα

Βρίσκουμε μια  $y_{\text{μερ}}(x)$  της (1), με

$$y_{\text{μερ}}(x) = x^r \left( \pi(x) \cos \omega x + \varphi(x) \sin \omega x \right) e^{\rho x}$$

και η αρχική Δ.Ε :

$$y'' - 4y = x^2 + 1,$$

$$\omega = 0, \rho = 0, \rho + i\omega = 0, f(x) = x^2 + 1 \text{ και}$$

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2$$

Εφ' όσον  $\rho + i\omega = 0$  και  $0 \neq -2, 2$ , συμπε-  
ραίνουμε ότι η πολλαπλότητα  $r = 0$

άρα

$$y_{\text{μερ}}(x) = x^0 \left( \pi(x) \cos 0x + \varphi(x) \sin 0x \right) e^{0x}$$

$$\cos 0x = 1, \sin 0x = 0$$

$\pi(x)$  είναι πολυώνυμο ίδιου βαθμού με  
την  $f(x) = x^2 + 1$ , άρα 2ου βαθμού ως

$$\text{προς } x \Rightarrow \pi(x) = k_1 x^2 + k_2 x + k_3,$$

$$k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y_{\text{μερ}}(x) = k_1 x^2 + k_2 x + k_3 \quad (4)$$

Εφ' όσον η (4) είναι μια μερική λύση της Δ.Ε (1):

$$y'' - 4y = x^2 + 1, \quad (1)$$

τότε πρέπει να ικανοποιεί την Δ.Ε. (1)

$$y_{\text{μερ}}(x) = k_1 x^2 + k_2 x + k_3$$

$$\Rightarrow y_{\text{μερ}}''(x) - 4y_{\text{μερ}}(x) = x^2 + 1 \quad (5)$$

$$y_{\text{μερ}}(x) = k_1 x^2 + k_2 x + k_3$$

$$\Rightarrow y_{\text{μερ}}'(x) = 2k_1 x + k_2$$

$$\Rightarrow y_{\text{μερ}}''(x) = 2k_1$$

Αντικαθιστούμε στην (5) και παίρνουμε

$$\Rightarrow 2k_1 - 4(k_1 x^2 + k_2 x + k_3) = x^2 + 1$$

$$\Rightarrow 2k_1 - 4k_1 x^2 - 4k_2 x - 4k_3 = x^2 + 1$$

$$\Rightarrow -4k_1 x^2 - 4k_2 x + (2k_1 - 4k_3) = x^2 + 1$$

που είναι δύο εκ ταυτότητας ίσα πολυ-  
ώνυμα, άρα

$$\begin{array}{l|l} -4k_1 = 1 & k_1 = -\frac{1}{4} \\ -4k_2 = 0 & k_2 = 0 \\ 2k_1 - 4k_3 = 1 & k_3 = -\frac{3}{8} \end{array} \Rightarrow$$

Επομένως  $y_{\text{μερ}}(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}$  (6)

Οπότε καταλήγουμε ότι η γενική λύση της  
Δ.Ε. (1) είναι η παρακάτω

$$y(x) = y_{\text{ομ}}(x) + y_{\text{μερ}}(x)$$

$$\Rightarrow y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8} \quad (7)$$

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Αν είχαμε το Π.Α.Τ.

$$y'' - 4y = x^2 + 1, \quad y(0) = 1 \quad \text{και} \quad y(1) = -1$$

$$\text{για } x=0, \quad y(0) = 1$$

$$\Rightarrow 1 = C_1 + C_2 - \frac{3}{8} \Rightarrow$$

$$C_1 + C_2 = \frac{11}{8}$$

$$\text{για } x=1, \quad y(1) = -1$$

$$\Rightarrow -1 = C_1 e^2 + C_2 e^{-2} - \frac{1}{4} - \frac{3}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1 e^2 + C_2 e^{-2} = -\frac{3}{8} \Rightarrow C_1 + C_2 e^{-4} = -\frac{3}{8e^2}$$

$$\Rightarrow C_2 (1 - e^{-4}) = \frac{11}{8} + \frac{3}{8e^2}$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{11e^2 + 3}{8e^2(1 - e^{-4})}$$

$$C_1 = \frac{11e^6 - 3}{8e^2(1 - e^4)}$$

και έχοντας τις τιμές  $C_1$  και  $C_2$ , αντικαθιστούμε στην γενική λύση (7).

4. Να λυθεί η Δ.Ε.  $y'' - 5y' + 6y = 2e^x \cos x$  (1)

Λύση:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) [A \cos \omega x + B \sin \omega x] e^{px}$$

$$y_{\mu\epsilon\rho}(x) = x^r [\pi(x) \cos \omega x + \varphi(x) \sin \omega x] e^{px}$$

$$a_1 = -5, a_2 = 6, f(x) = 2, \omega = 1, p = 1$$

$$\begin{matrix} \omega=1 \\ p=1 \end{matrix} \Rightarrow \rho + i\omega = 1 + i \cdot 1 = 1 + i$$

Η γενική λύση της Δ.Ε. (1) είναι

$$y(x) = y_{\text{ομ}}(x) + y_{\mu\epsilon\rho}(x) \quad (2)$$

1ο Βήμα

Λύση της αντίστοιχης ομογενούς

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

$$\text{x.E. } \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

$$y_{\text{om}}(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x} \quad (3)$$

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2ο Βήμα

Εύρεση μιας μερικής λύσης  $y_{\text{μερ}}(x)$

$$y_{\text{μερ}}(x) = x^r [\pi(x) \cos \omega x + \varphi(x) \sin \omega x] e^{\rho x}$$

$$\rho = 1, \omega = 1, \rho + i\omega = 1 + i, f(x) = 2$$

$r$  είναι η πολλαπλότητα του  $\rho + i\omega =$

$1 + i$  στη χ.Ε που έχει ρίζες  $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$ .

$$1 + i \neq 3, 2 \Rightarrow r = 0$$

$\pi(x)$  και  $\varphi(x)$  είναι πολώνυμο ίδιου

βαθμού με την  $f(x)=2$

Επομένως  $\pi(x)=k_1$ ,  $\varphi(x)=k_2$

Τελικά

$$y_{\text{μερ}}(x) = x^0 [k_1 \cos x + k_2 \sin x] e^x$$

$$\Rightarrow y_{\text{μερ}}(x) = (k_1 \cos x + k_2 \sin x) e^x$$

$$y'' - 5y' + 6y = e^x \cos x \quad (1)$$

$$\Rightarrow y''_{\text{μερ}} - 5y'_{\text{μερ}} + 6y_{\text{μερ}} = 2e^x \cos x,$$

η  $y_{\text{μερ}}(x)$  επαληθεύει την Δ.Ε (1)

$$y_{\text{μερ}}(x) = (k_1 \cos x + k_2 \sin x) e^x$$

$$\Rightarrow y'_{\text{μερ}}(x) = (-k_1 \sin x + k_2 \cos x) e^x + (k_1 \cos x + k_2 \sin x) e^x$$

$$\Rightarrow y''_{\text{μερ}}(x) = (-k_1 \cos x - k_2 \sin x) e^x$$

$$+ (-k_1 \sin x + k_2 \cos x) e^x + (-k_1 \sin x + k_2 \cos x) e^x \\ + (k_1 \cos x + k_2 \sin x) e^x$$

οπότε

$$(-k_1 \cos x - k_2 \sin x + k_1 \sin x + k_2 \cos x - k_1 \sin x \\ + k_2 \cos x + k_1 \cos x + k_2 \sin x) e^x$$

$$+ (-5k_1 \cos x + 5k_1 \sin x - 5k_2 \sin x - 5k_2 \cos x) e^x$$

$$+ (6k_1 \cos x + 6k_2 \sin x) e^x = 2e^x \cos x$$

$\Rightarrow$

$$(-k_1 + k_2 + k_2 + k_1 - 5k_1 - 5k_2 + 6k_1) \cos x$$

$$+ (-k_2 + k_1 - k_1 + k_2 + 5k_1 - 5k_2 + 6k_2) \sin x = 2 \cos x$$

$$\Rightarrow (k_1 - 3k_2) \cos x + (5k_1 + k_2) \sin x = 2 \cos x$$

$$\begin{array}{l|l} k_1 - 3k_2 = 2 & 16k_1 = 2 \Rightarrow k_1 = \frac{1}{8} \\ 5k_1 + k_2 = 0 & \end{array}$$

$$k_2 = -\frac{5}{8}$$

$$\text{'Αρα } y_{\text{μερ}}(x) = \left( \frac{1}{8} \cos x - \frac{5}{8} \sin x \right) e^x$$

Επομένως

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x} + \left( \frac{1}{8} \cos x - \frac{5}{8} \sin x \right) e^x$$



Ομογενής  $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$

Χαρακτηριστική Εξίσωση  $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$

1.  $\Delta > 0 \rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{matrix} \rightarrow y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

2.  $\Delta = 0 \rightarrow$  Διπλή ρίζα,  $\lambda \rightarrow y(x) = c_1 e^{\lambda x} + x c_2 e^{\lambda x}$

3.  $\Delta < 0 \rightarrow \lambda_1 = a + ib, \lambda_2 = a - ib$

$\rightarrow y(x) = c_1 e^{ax} \cos(bx) + c_2 e^{ax} \sin(bx)$

Μη ομογενής

$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) [A \cos \omega x + B \sin \omega x] e^{px}$

$\rightarrow y(x) = y_{\text{om}}(x) + y_{\text{μep}}(x)$

$y_{\text{om}}(x) \rightarrow y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$

$y_{\text{μep}}(x) = x^r [p(x) \cos \omega x + q(x) \sin \omega x] e^{px}$

$r$ : πολλαπλότητα της  $r$ -ΐω σαν ρίζα της  
Χ.Ε. της αντίστοιχης ομογενούς

$\Pi(x), \varphi(x)$ : πολυώνυμα ίδιου βαθμού με  
την  $f(x)$