Όριο Συνάρτησης

Διδάσκοντες: Μ. Ανδρουλάκης – Δ. Κουλουμπού

Σημείο Συσσώρευσης - Ορισμός

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Ένας αριθμός $x_0 \in \mathbb{R}$ λέγεται **σημείο συσσωρεύσεως (cluster point)** του A αν, για κάθε $\delta > 0$, το σύνολο $A \cap \left[(x_0-\delta, x_0) \cup (x_0, x_0+\delta)\right]$ είναι μη κενό.

Η ιδιότητα αυτή του σημείου συσσωρεύσεως έχει ως αποτέλεσμα να συσσωρεύονται σε κάθε περιοχή $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ του σημείου x_0 άπειρα σημεία του Α.

Ένα στοιχείο του A που δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A λέγεται **μεμονωμένο** σημείο το A

Π.χ. στο σύνολο $A = (2,3) \cup \{3\}$ κάθε $x \in [2,3]$ είναι σημείο συσσώρευσης του A. Το $x_0 = 3$ είναι μεμονωμένο σημείο του A.

Παράδειγμα:

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3}$. Η συνάρτηση αυτή ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό $x \neq 3$, το $x = 3$ είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της συνάρτησης.

Πώς «συμπεριφέρεται» η συνάρτηση $f(x)$ κοντά στο σημείο $x = 3$;

Για $x \neq 3$ απλοποιούμε τον τύπο της συνάρτησης $f(x)$.

$$f(x) = \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3,\ x \neq 3$$

Συνεπώς η γραφική παράσταση της είναι η ευθεία $y = x+3$ χωρίς το σημείο $A(3,6)$. Παρόλο που η τιμή $f(3)$ δεν ορίζεται, είναι εμφανές ότι η $f(x)$ προσεγγίζει όσο θέλουμε την τιμή 6, καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο το 3.

<u>Όριο Συνάρτησης:</u>

Διαισθητικά μπορούμε να πούμε το ακόλουθο: Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν αριθμό ℓ, καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο το x_0, τότε το όριο της συνάρτησης $f(x)$ στο x_0 είναι ℓ. Ή όπως συνηθίζουμε να γράφουμε $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$.

<u>Ο $\varepsilon - \delta$ Ορισμός του Ορίου:</u>

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, x_0 ένα σημείο συσσώρευσης του A και ℓ ένας πραγματικός αριθμός. Λέμε ότι το όριο της συνάρτησης $f(x)$ στο x_0 είναι ℓ και γράφουμε $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος, ώστε για κάθε $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Παρατήρηση: Επειδή ο αριθμός δ εξαρτάται από τον ε, πολλές φορές γράφουμε $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Παράδειγμα: Με την βοήθεια του ορισμού $\varepsilon - \delta$ να δείξετε ότι $\lim_{x\to 2}(3x-2) = 4$

Λύση: Έστω $\varepsilon > 0$. Θα πρέπει να προσδιορίσουμε $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|x-2| < \delta$, να ισχύει $|3x-2-4| < \varepsilon$ ή ισοδύναμα $3|x-2| < \varepsilon$.

Θεωρούμε $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. Οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|x-2| < \frac{\varepsilon}{3}$,

$|3x-2-4| = 3|x-2| < 3\,\frac{\varepsilon}{3}$. Άρα $|3x-2-4| < \varepsilon$. Επομένως $\lim_{x\to 2}(3x-2) = 4$.

Ιδιότητες Ορίων:

Υπενθυμίζουμε κάποιες από τις κυριότερες ιδιότητες των ορίων

Ισχύουν οι ακόλουθες ισοδυναμίες:

1. $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}[f(x)-\ell]=0$

2. $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} f(x_0+h)=\ell$

3. $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \overset{x=x_0h}{\Longleftrightarrow} \lim_{h\to 1}(f(x_0h))=\ell,\ x_0\neq 0$

Όρια και διάταξη

Θεώρημα 1:

- Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)>0$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0.
- Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)<0$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0.

Θεώρημα 2:

Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν όριο στο x_0, και ισχύει $f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε θα ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\le \lim_{x\to x_0} g(x)$$

Όρια και Πράξεις

Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0, τότε:

1. $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0} g(x)$

2. $\lim_{x\to x_0}(\kappa\cdot f(x))=\kappa\cdot\lim_{x\to x_0} f(x)$, για κάθε σταθερά $\kappa\in\mathbf{R}$

3. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

4. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, εφόσον $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$

5. $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right|$

6. $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[\kappa]{f(x)} = \sqrt[\kappa]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$, εφόσον $f(x)\geq 0$ κοντά στο x_0

7. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{\nu} = \left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right]^{\nu}$, $\nu\in\mathbf{N}^*$

Όρια Βασικών Συναρτήσεων:

1. $\lim\limits_{x\to x_o} x^n = x_0{}^n,\ n\in\mathbb{N}$

2. $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$,

όπου $P(x)$ το πολυώνυμο

$$P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0$$

3. Αν $P(x), Q(x)$ πολυώνυμα τότε $\lim\limits_{x\to x_o}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$, εφόσον $Q(x_0)\neq 0$

4. $\lim\limits_{x\to x_o}\ln x = \ln x_o,\quad x_o > 0$

5. $\lim\limits_{x\to x_o} e^x = e^{x_o}$

Θεώρημα Ισοσυγκλινουσών Συναρτήσεων (Κριτήριο Παρεμβολής):

Θεώρημα:
Έστω οι συναρτήσεις f,g,h. Αν $h(x)\le f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0 και

$$\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell$$
, τότε:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$$
.

Θεώρημα (Όριο μηδενικής επί φραγμένη):

Αν $f(x)$ φραγμένη συνάρτηση με x_0 σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)f(x)=0$

Βασικά Τριγωνομετρικά Όρια:

Γνωρίζοντας ότι $|\sin x|\le|x|$ ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (Ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$)
και με τη βοήθεια του κριτηρίου παρεμβολής αποδεικνύεται ότι:

- $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to 0}x\cos\dfrac{1}{x}=0$

Όριο Σύνθετης Συνάρτησης – Αλλαγή Μεταβλητής

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x\to x_0} f(g(x))$:

Θέτουμε $g(x)=u$.

Για $x \to x_0$ συμπεραίνουμε $u \to u_0$, όπου $u_0 = \lim_{x\to x_0} g(x)$ (αν υπάρχει).

Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $\lim_{u\to u_0} f(u)$.

Αν $g(x) \neq u_0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim_{u\to u_0} f(u)$

.

Παρατηρήσεις:

Με τη βοήθεια του κριτηρίου παρεμβολής αποδεικνύεται ότι:

i. Αν $\lim_{x\to x_0} f^2(x) = 0$ τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$.

ii. Αν $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = 0$ τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$.

Εύρεση Ορίων (Χρήση των Κανόνων Ορίων)

Παράδειγμα 1:

a) $\lim_{x\to 2}\left(x^3-5x^2+3\right)=8-5\cdot 4+3=-9$

b) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+4}{x+5}=\frac{1+4}{1+5}=\frac{5}{6}$

c) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-x}$

Λύση:

Βλέπουμε ότι δεν μπορούμε να αντικαταστήσουμε $x=1$ διότι σε αυτήν την περίπτωση μηδενίζεται ο παρονομαστής και άρα η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2+x-2}{x^2-x}$ δεν ορίζεται για $x=1$. Βλέπουμε όμως ότι για $x=1$

μηδενίζεται και ο αριθμητής. Άρα αριθμητής και παρονομαστής έχουν κοινό παράγοντα $x-1$. Παραγοντοποιώντας αριθμητή και παρονομαστή προκύπτει ένα ισοδύναμο κλάσμα από το οποίο μπορούμε να βρούμε το ζητούμενο όριο.

Επομένως έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-x}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{x(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)}{x}=3$$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$

Λύση:

Δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το όριο με αντικατάσταση αφού ο παρονομαστής μηδενίζεται. Επίσης αριθμητής και παρονομαστής δεν έχουν κοινούς παράγοντες. Μπορούμε όμως να δημιουργήσουμε έναν κοινό παράγοντα, πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με την συζυγή έκφραση $\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2}\right)$

Με τον τρόπο αυτό έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2}\right)}{x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Παράδειγμα 2 (Κριτήριο Παρεμβολής):

a) Δεδομένου ότι $1-\dfrac{x^2}{4}\le f(x)\le 1+\dfrac{x^2}{2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

Λύση:

Εφόσον

$\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{x^2}{4}\right)=1$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x^2}{2}\right)=1$ από το κριτήριο παρεμβολής έπεται ότι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(x^2+x\right)\cdot\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]$

Λύση:

Δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το όριο με αντικατάσταση αφού η παράσταση $\dfrac{1}{x}$ δεν ορίζεται για $x=0$. Παρατηρούμε ότι έχουμε να υπολογίσουμε το όριο μιας φραγμένης συνάρτησης , της $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ και μιας «μηδενικής» συνάρτησης , δηλαδή μιας συνάρτησης που το όριο της τείνει στο μηδέν. Έχουμε όπως χαρακτηριστικά λέμε να υπολογίσουμε ένα όριο «μηδενικής επί φραγμένης»

Όρια τέτοιας μορφής υπολογίζονται με εφαρμογή του κριτηρίου παρεμβολής.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν:

$$\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le 1 \Leftrightarrow$$

$$\left|\left(x^2+x\right)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le \left|x^2+x\right| \Leftrightarrow$$

$$-\left|x^2+x\right| \le \left(x^2+x\right)\sin\left(\frac{1}{x}\right) \le \left|x^2+x\right|$$

Επιπλέον $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\left|x^2+x\right|\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left|x^2+x\right| = 0$.

Επομένως σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(x^2+x\right)\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0$$

<u>Παράδειγμα 3:</u>

Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{x}}$.

<u>Λύση:</u>

Θέτουμε $u=\sqrt[6]{x}$. Επομένως $x=u^6$ και $u \to \lim\limits_{x\to 2}\sqrt[6]{x} = \sqrt[6]{2}$.

Άρα

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{x}} = \lim_{u\to\sqrt[6]{2}}\frac{\sqrt{u^6}-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{u^6}} = \lim_{u\to\sqrt[6]{2}}\frac{u^3-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}-u^2} =$$

$$= \lim_{u\to\sqrt[6]{2}}\frac{u^3-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}-u^2} = \lim_{u\to\sqrt[6]{2}} -\frac{\left(u-\sqrt[6]{2}\right)\left(u^2+\sqrt[6]{2}u+\sqrt[3]{2}\right)}{\left(u-\sqrt[6]{2}\right)\left(u+\sqrt[6]{2}\right)} =$$

$$= \lim_{u\to\sqrt[6]{2}} -\frac{\left(u^2+\sqrt[6]{2}u+\sqrt[3]{2}\right)}{\left(u+\sqrt[6]{2}\right)} = -\frac{3\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[6]{2}} = -\frac{3\sqrt[6]{2}}{2}$$

Παράδειγμα 4:

Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x + x^2\sin\frac{1}{x} + x}{\cos x - 1 + x}$.

Λύση:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x + x^2\sin\frac{1}{x} + x}{\cos x - 1 + x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\left(\frac{\sin x}{x} + x\sin\frac{1}{x} + 1\right)}{x\left(\frac{\cos x - 1}{x} + 1\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{\sin x}{x} + x\sin\frac{1}{x} + 1\right)}{\left(\frac{\cos x - 1}{x} + 1\right)} = 2$$

Αφού γνωρίζουμε ότι

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0 \text{ και } \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

Πλευρικά Όρια

Παράδειγμα 5:

Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$ δεν έχει όριο όταν το $x \to 0$ υπάρχει όμως το όριο αν περιορίσουμε το x να πλησιάζει το 0 είτε από τα δεξιά , παραμένοντας δηλαδή μεγαλύτερο του 0 είτε από τα αριστερά. παραμένοντας δηλαδή μικρότερο του 0. Λέμε χαρακτηριστικά ότι η συνάρτηση έχει πλευρικά όρια (δεξιό όριο για $x > 0$ και αριστερό όριο για $x < 0$)

Γενικά:

- Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό ℓ_1, καθώς το x προσεγγίζει το x_0 από μικρότερες τιμές ($x < x_0$), τότε γράφουμε: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \ell_1$
- Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό ℓ_2, καθώς το x προσεγγίζει το x_0 από μεγαλύτερες τιμές ($x > x_0$), τότε γράφουμε: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \ell_2$

  Τους αριθμούς $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \ell_1$ και $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \ell_2$ τους λέμε **πλευρικά όρια της** f στο x_0 και συγκεκριμένα το ℓ_1 **αριστερό όριο** της f στο x_0 ενώ το ℓ_2 **δεξιό όριο** της f στο x_0.

Για να υπάρχει τώρα το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$ θα πρέπει και τα δύο πλευρικά όρια να είναι ίσα με ℓ, δηλαδή ισχύει

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\ell$$

<u>Παρατηρήσεις:</u>

- Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής (a,x_0) ή $(a,x_0]$ αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής (x_0,b) τότε ορίζουμε:
  $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$
- Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής (x_0,b) ή $[x_0,b)$ αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής (a,x_0) τότε ορίζουμε:
  $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$

<u>Παράδειγμα 6:</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & 0\le x<1\\ 1, & 1\le x<2\\ 2, & x=2\end{cases}$

Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης να βρεθούν τα όρια

$$\lim_{x\to 0} f(x)\,,\ \lim_{x\to \frac{1}{2}} f(x)\,,\ \lim_{x\to 1} f(x)\,,\ \lim_{x\to 2} f(x)$$

<u>Λύση:</u>

Η συνάρτηση $f(x)$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $D_f=[0,2]$.

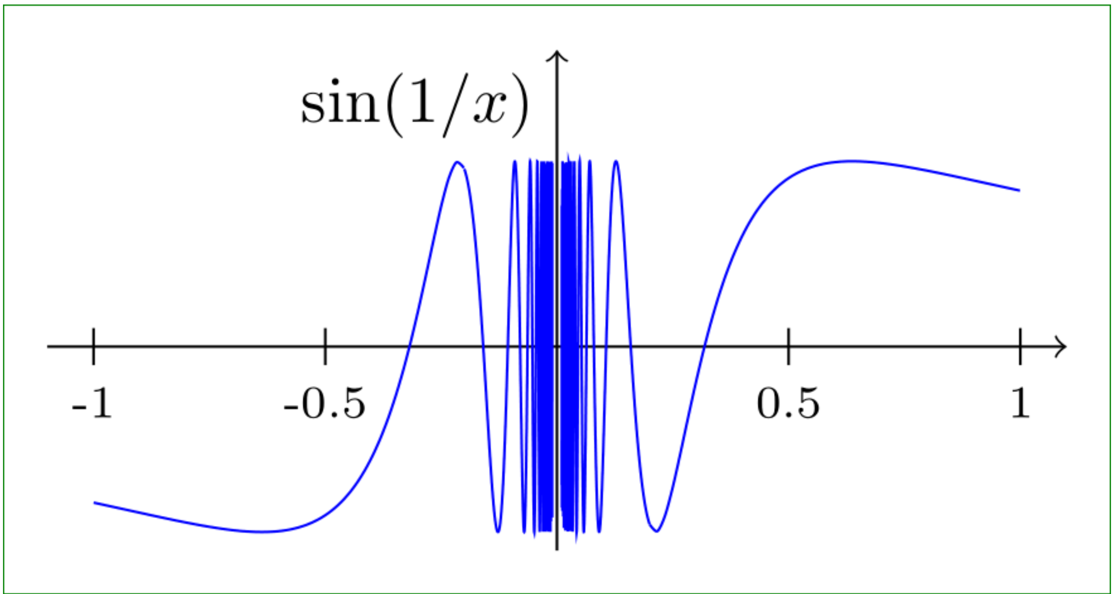
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\sqrt{1-x^2}\right)=1$
- $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} f(x)=\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\left(\sqrt{1-x^2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
  $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\sqrt{1-x^2}\right)=0$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(1)=1$
  $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

Άρα δεν υπάρχει το όριο της $f(x)$ στο σημείο $x_0 = 1$

- $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} 1 = 1$

Παράδειγμα 7 (Μία συνάρτηση που ταλαντώνεται πάρα πολύ για να έχει όριο):

Η συνάρτηση $f(x) = sin\left(\frac{1}{x}\right)$ δεν έχει όριο καθώς το x τείνει στο μηδέν από οποιαδήποτε πλευρά. Πράγματι, καθώς το x τείνει στο 0, ο αντίστροφός του $\frac{1}{x}$, αυξάνεται απεριόριστα και οι τιμές του $sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ταλαντώνονται ολοένα και πιο γρήγορα μεταξύ των τιμών -1 και 1. Δεν υπάρχει μοναδικός αριθμό L τον οποίο να προσεγγίζουν οι τιμές τις συνάρτησης καθώς το x τείνει στο μηδέν ακόμα και αν προσεγγίσουμε το x σε μονάχα θετικές ή μονάχα αρνητικές τιμές. Έτσι η συνάρτηση δεν έχει ούτε δεξιό ούτε αριστερό όριο στο $x = 0$.



Μη Πεπερασμένο όριο Συνάρτησης

Ορισμός:

- Έστω μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ και x_0 σημείο συσσώρευσης αυτής. Λέμε ότι η συνάρτηση f τείνει στο $+\infty$ καθώς το $x \to x_0$ και γράφουμε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ όταν για κάθε $M \in \mathbb{R}$, υπάρχει $\delta = \delta(M) > 0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$ να ισχύει $f(x) > M$.
- Έστω μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ και x_0 σημείο συσσώρευσης αυτής. Λέμε ότι η συνάρτηση f τείνει στο $-\infty$ καθώς το $x \to x_0$ και γράφουμε

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ όταν για κάθε $M \in \mathbb{R}$, υπάρχει $\delta = \delta(M) > 0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$ να ισχύει $f(x) < M$.

Ιδιότητες:

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, ενώ αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0.
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} (-f(x)) = -\infty$, ενώ αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} (-f(x)) = +\infty$.
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ή $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$, ενώ αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$.
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ή $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$.
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[\kappa]{f(x)} = +\infty,\ \kappa \in \mathbf{N} - \{0,1\}$.

Με την βοήθεια των παραπάνω ιδιοτήτων προκύπτει:

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ και γενικά $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^{2\nu}} = +\infty,\ \nu \in \mathbf{N}^*$.
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ και γενικά $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^{2\nu+1}} = +\infty,\ \nu \in \mathbf{N}$.
- $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ και γενικά $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^{2\nu+1}} = -\infty,\ \nu \in \mathbf{N}$
- Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^{2\nu+1}} \neq \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^{2\nu+1}},\ \nu \in \mathbf{N}$ δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^{2\nu+1}},\ \nu \in \mathbf{N}$

Για τα όρια αθροίσματος και γινομένου δύο συναρτήσεων αποδεικνύονται τα παρακάτω θεωρήματα:

Θεώρημα 1 (όριο αθροίσματος)

Αν στο $x_0 \in \mathbf{R}$						
το όριο της f είναι:	$\alpha \in \mathbf{R}$	$\alpha \in \mathbf{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
τότε το όριο της $f+g$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	;	;

Θεώρημα 2 (όριο γινομένου)

Αν στο $x_0 \in \mathbf{R}$,										
το όριο της f είναι:	$\alpha>0$	$\alpha<0$	$\alpha>0$	$\alpha<0$	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
τότε το όριο της $f \cdot g$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	;	;	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Στους πίνακες των παραπάνω θεωρημάτων, όπου υπάρχει ερωτηματικό, σημαίνει ότι το όριο (αν υπάρχει) εξαρτάται κάθε φορά από τις συναρτήσεις που παίρνουμε. Στις περιπτώσεις αυτές λέμε ότι έχουμε **απροσδιόριστη μορφή**.

Δηλαδή, απροσδιόριστες μορφές για τα όρια αθροίσματος και γινομένου συναρτήσεων είναι οι:

$$(+\infty)+(-\infty) \quad \kappa\alpha\iota \quad 0\cdot(\pm\infty).$$

Απροσδιόριστες μορφές για τα όρια της διαφοράς και του πηλίκου συναρτήσεων είναι οι:

$$(+\infty)-(+\infty), \quad (-\infty)-(-\infty) \quad \kappa\alpha\iota \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.$$

Ασκήσεις:

1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x-3}\qquad \lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{\sin(x-2)}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x^2}\qquad \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot\tan 3x}{\left(\sqrt{1+x}-1\right)^2}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{\sin x}$$

2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2\cos\frac{1}{x}\right)\qquad \lim_{x\to \pi}\frac{\sin x}{\pi-x}\qquad \lim_{x\to 0}\sin x\sin\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sin\left(x^2-4\right)}\qquad \lim_{x\to 1}\frac{\sin\left(x^2+x-2\right)}{x^3-1}$$

3. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to 0}\frac{xf(2x)+f(-x)\sin 3x}{\sin^2 x-2x^2}$

4. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια άρτια συνάρτηση τέτοια, ώστε $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=7$. Να υπολογιστεί η τιμή του ορίου $\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}$

5. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση τέτοια, ώστε $\left|xf(x)-2|x|\right|\le x^3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim_{x\to 0}f(x)$

6. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2+x^3+...+x^n-n}{x-1},n\in\mathbb{N}^*$

7. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση τέτοια, ώστε $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-1}{x-2}=3$. Να υπολογιστεί η τιμή του ορίου $\lim_{x\to -2}\frac{x^nf(x)-2^n}{x-2}$

8. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x\to 0}\frac{|x-4|+5|x|-16}{x^2-9}$

9. Αν $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(\lambda(x-1))}{x(x-1)}, & x<1\\ 2\lambda x^2-3x+1, & x>1\end{cases}$ Να υπολογίσετε το $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ να υπάρχει στο $\mathbb{R}$.

10. Αφού δείξετε ότι $\dfrac{\sin x}{x}<1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$, να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}$

11. Αν $f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax+b-1}{x-1}, & x>1\\ 2ax+1, & x\le 1\end{cases}$ Να υπολογίσετε τα $a,b\in\mathbb{R}$, ώστε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ να υπάρχει.

12. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$

Βιβλιογραφία:

1. Θ. Ρασσιάς. Μαθηματική Ανάλυση Ι , Τεύχος Α Εκδόσεις Σαββάλας
2. Σ. Τουμπής, Σ. Γκιτζένης Λογισμός Συναρτήσεων μιας Μεταβλητής. Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και βοηθήματα. HEALINK www.kallipos.gr
3. Tom M. Apostol One-Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra. Volume I. John Wiley & Sons
4. Finney, R. L. & Giordano, F. R. (2004). Απειροστικός Λογισμός Τόμος Ι , Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης