Συνέχεια Συνάρτησης

Διδάσκοντες: Μ. Ανδρουλάκης – Δ. Κουλουμπού

Ορισμός Συνέχειας:

Έστω μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$. Η συνάρτηση f καλείται συνεχής (continuous) στο $x_0 \in A$,όταν και μόνο όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό έπεται ότι:

- Έστω μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$. Αν $x_0 \in A$ και x_0 σημείο συσσώρευσης του A, τότε η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- Κάθε συνάρτηση είναι συνεχής στα μεμονωμένα σημεία του πεδίου ορισμού της.

Ορισμοί:

Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$, όπου x_0 σημείο συσσώρευσης του A.

- Η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ καλείται συνεχής (continuous) στο $x_0 \in A$ αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- Η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ καλείται δεξιά συνεχής στο $x_0 \in A$ αν $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$
- Η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ καλείται αριστερά συνεχής στο $x_0 \in A$ αν $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$
- Η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ καλείται συνεχής στο διάστημα Δ αν είναι συνεχής για κάθε εσωτερικό $x_0 \in \Delta$, αριστερά συνεχής στο δεξί άκρο του Δ (εφόσον το δεξί άκρο ανήκει στο Δ) και δεξιά συνεχής στο αριστερό άκρο του Δ (εφόσον το αριστερό άκρο ανήκει στο Δ).
- Η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ καλείται **ασυνεχής (discontinuous)** στο $x_0 \in A$ και λέμε πως έχει **ασυνέχεια (discontinuity point)** στο $x_0 \in A$ αν δεν είναι συνεχής στο $x_0 \in A$.

Ιδιότητες Συνέχειας:

- Έστω ότι οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο x_0 και $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$. Τότε είναι συνεχείς στο x_0 και οι συναρτήσεις

$$\kappa f + \lambda g$$
$$f * g$$

$\frac{f}{g}$, $αν g(x_0) \neq 0$
$|f|$
$(f(x))^{g(x)}$, $αν f(x_0) > 0$

- Έστω διάστημα $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ και x_0 εσωτερικό σημείο του A. Η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν ισχύει μία από τις παρακάτω ισοδύναμες σχέσεις.

$$\lim_{x \to x_0}(f(x) - f(x_0)) = 0$$
$$\lim_{h \to 0}(f(x_0 + h) - f(x_0)) = 0$$

- Οι πολυωνυμικές, οι τριγωνομετρικές, οι αντίστροφες τριγωνομετρικές, οι ρητές, οι εκθετικές, οι λογαριθμικές και όλες οι συναρτήσεις που εκφράζονται με βάση αυτές (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό, διαίρεση) είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού τους.
- Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ συνεχής στο x_0 και $g: B \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $f(x_0)$. Τότε η συνάρτηση $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0
- Έστω $1-1$ συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$και η αντίστροφή της $f^{-1}: f(A) \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο x_0, τότε και η f^{-1} είναι συνεχής στο $f(x_0)$
- Έστω $1-1$ συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$και η αντίστροφή της $f^{-1}: f(A) \to \mathbb{R}$ Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα Δ, τότε και η f^{-1} είναι συνεχής στο διάστημα $f(\Delta)$.

<u>Ορισμός</u>

Θεωρούμε μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \notin A$. Υποθέτουμε ότι $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell, \ell \in \mathbb{R}$. Τότε η συνεχής συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} f(x), x \neq x_0 \\ \ell, x = x_0 \end{cases}$

Λέγεται **συνεχής επέκταση (continuous extension)** της fστο x_0.

<u>Παράδειγμα:</u>

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ έχει πεδίο ορισμού $D_f = \mathbb{R}^*$. Ισχύει επίσης ότι $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Επομένως η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, x \neq 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$είναι η **συνεχής επέκταση** της fστο $x_0 = 0$.

<u>Είδη Ασυνέχειας Συναρτήσεων</u>

Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in A$

Διακρίνουμε τρία είδη ασυνέχειας συναρτήσεων

- Μια συνάρτηση f έχει **αποσβέσιμη συνέχεια (removable discontinuity)** στο x_0όταν το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, αλλά $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.
  Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να ορίσουμε μια καινούρια συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} f(x), x \neq x_0 \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x), x = x_0 \end{cases}$η οποία είναι συνεχής στο x_0.
- Μια συνάρτηση f έχει **άλμα ασυνέχειας (jump discontinuity)** στο x_0αν τα πλευρικά όρια $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ αλλά $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.
- Μια συνάρτηση f έχει **ασυνέχεια τρίτου είδους (discontinuity of third type)** στο x_0, αν το x_0είναι σημείο συσώρευσης του πεδίου ορισμού της f, η f είναι ασυνεχής στο x_0 αλλά η ασυνέχεια δεν είναι ούτε αποσβέσιμη ούτε άλμα ασυνέχειας.

Για παράδειγμα όταν κάποιο από τα πλευρικά όρια δεν υπάρχει ή $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ ή $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ ή $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty$. Πχ η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} sin\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$ έχει ασυνέχεια τρίτου είδους.

<u>Παράδειγμα:</u>

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} sin\frac{1}{x}, x < 0 \\ \frac{sin(x-1)}{x-1}, 0 \leq x < 1 \\ 2, x = 1 \\ \frac{x^2+x-2}{3x-3}, x > 1 \end{cases}$

Η Συνάρτηση f είναι συνεχής σε κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0,1) \cup (1, +\infty)$

- Στο $x_0 = 0$ έχουμε:

Το $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} sin\frac{1}{x}$δεν υπάρχει, άρα έχουμε ασυνέχεια τρίτου είδους στο $x_0 = 0$.

Εφόσον ισχύει $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = sin\,1$ η f είναι δεξιά συνεχής στο $x_0 = 0$.

- Στο $x_0 = 1$ έχουμε:

Το $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{sin(x-1)}{x-1} = 1$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{x^2+x-2}{3x-3} = \lim_{x\to1^+} \frac{(x+2)(x-1)}{3(x-1)} = \lim_{x\to1^+} \frac{(x+2)}{3} = 1$$

Άρα $\lim_{x\to1} f(x) = 1$

Εφόσον ισχύει $f(1) = 2 \neq \lim_{x\to1} f(x)$ η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Η συνέχεια στο $x_0 = 1$ είναι αποσβέσιμη.

<u>Ιδιότητες Συνεχών Συναρτήσεων</u>

<u>Θεώρημα (Bolzano)</u>

Έστω συνάρτηση $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ τέτοια ώστε $f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0$. Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(\xi) = 0$.

<u>Θεώρημα (Ύπαρξη Ρίζας Πολυωνύμου Περιττού Βαθμού)</u>

Έστω $P(x)$ πολυώνυμο περιττού βαθμού με πραγματικούς συντελεστές, τότε η εξίσωση $P(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.

<u>Θεώρημα (Διατήρησης Προσήμου)</u>

Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα και μια συνάρτηση $f: I \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο I.

<u>Θεώρημα (Ενδιάμεσων τιμών)</u>

Έστω συνάρτηση $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$.Αν

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$ τότε για κάθε αριθμό λ, που είναι μεταξύ των $f(\alpha), f(\beta)$ υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(\xi) = \lambda$.

<u>Θεώρημα</u>

Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Θεώρημα (Σταθερού Σημείου - Fixed Point Theorem)

Έστω $f:[\alpha,\beta] \to [\alpha,\beta]$ συνεχής συνάρτηση. Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(\xi) = \xi$.

Θεώρημα (Φράγματος):

Έστω συνάρτηση $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Τότε η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Υπάρχουν δηλαδή $x_1, x_2 \in [\alpha,\beta]$ τέτοια ώστε, $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$ και $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

Επίσης το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $[m,M]$.

Θεώρημα:

Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα και μια συνάρτηση $f:I \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι $1-1$ και συνεχής, τότε είναι και γνησίως μονότονη.

Ασκήσεις:

1. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι
   i) $f(0) = 0$
   ii) Η f είναι περιττή
   iii) Αν η f είναι συνεχής στο $k \in \mathbb{R}$, τότε είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

2. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $xy - y^2 \leq f(x) - f(y) \leq x^2 - xy$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

3. Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν τις ιδιότητες
   $f(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x)$
   $g(x+y) = g(x)g(y) - f(x)f(y)$
   $f(0) = 0$
   $g(0) = 1$
   Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $x_0 = 0$ να δείξετε ότι είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$.
4. Έστω δύο συναρτήσεις f, g συνεχείς στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι και οι συναρτήσεις $F = max\{f, g\}$ και $G = min\{f, g\}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$.
5. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = e^x + \ln x$.
6. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y) + k$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Όπου $k \in \mathbb{R}$. Αν $\lim_{x \to 0} \frac{k + f(x)}{x} = k$, να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
7. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$, τότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
8. Να εξετάσετε αν η εξίσωση $\frac{x^2+1}{x-2} + \frac{x^6+1}{x-5} = 0$ έχει ρίζα στο διάστημα $(2,5)$
9. Έστω $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leq c \\ ax + b, & x > c \end{cases}$ όπου $a, b, c \in \mathbb{R}$. Να βρείτε όλες τις τιμές του a (εφόσον υπάρχουν) ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = c$.
10. Έστω $f(x) = \begin{cases} 2\cos x, & x \leq c \\ ax^2 + b, & x > c \end{cases}$ όπου $a, b, c \in \mathbb{R}$. Να βρείτε όλες τις τιμές του a (εφόσον υπάρχουν) ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = c$.
11. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x \sin\frac{1}{x}$. Να βρείτε την συνεχή επέκταση της f στο $x_0 = 0$.
12. Αν ο αριθμός n είναι περιττός φυσικός αριθμός και $a \in (-\infty, 0)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $b \in (-\infty, 0)$ τέτοιος ώστε $b^n = a$

Βιβλιογραφία:

1. Θ. Ρασσιάς. Μαθηματική Ανάλυση Ι , Τεύχος Α Εκδόσεις Σαββάλας
2. Σ. Τουμπής, Σ. Γκιτζένης Λογισμός Συναρτήσεων μιας Μεταβλητής. Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και βοηθήματα. HEALINK www.kallipos.gr
3. Tom M. Apostol One-Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra. Volume I. John Wiley & Sons
4. Finney, R. L. & Giordano, F. R. (2004). Απειροστικός Λογισμός Τόμος Ι , Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης