Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις και οι Αντίστροφες τους

Διδάσκοντες: Ε. Παπαγεωργίου – Δ. Κουλουμπού

Αντίστροφες Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις:

Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις $f_1(x)=\sin x,\ f_2(x)=\cos x,\ f_3(x)=\tan x,\ f_4(x)=\cot x$ δεν είναι αμφιμονοσύμαντες. Οι συναρτήσεις αυτές δεν έχουν αντίστροφες. Ωστόσο περιορίζοντας το πεδίο ορισμού σε κάθε μία από αυτές, μπορούμε να αναπαράγουμε νέες αντιστρέψιμες συναρτήσεις.

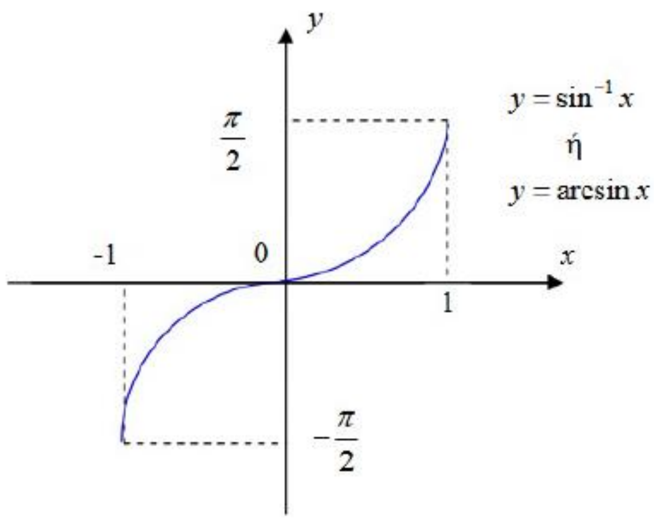
- **Τόξο Ημιτόνου** $\sin^{-1}x$ **ή** $\arcsin x$

Η συνάρτηση ημίτονο (sine function) $f(x)=\sin x$, όταν έχει πεδίο ορισμού το $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ είναι γνησίως αύξουσα και έχει σύνολο τιμών το $[-1,1]$. Επομένως αντιστρέφεται .

Την αντίστροφη συνάρτηση της $f(x)=\sin x$ την ονομάζουμε τόξο ημιτόνου και την συμβολίζουμε $\sin^{-1}x$ ή $\arcsin x$. Είναι δηλαδή $f^{-1}(x)=\arcsin x$ με πεδίο ορισμού το $[-1,1]$ και σύνολο τιμών το $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\arcsin x$ φαίνεται στο παρακάτω

Γραφική Παράσταση



- $\sin x = y,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow \arcsin y = x, y \in [-1,1]$:
- $\sin(\arcsin x) = x$ *για κάθε* $x \in [-1,1]$
- $\arcsin(\sin x) = x$ *για κάθε* $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Παράδειγμα:

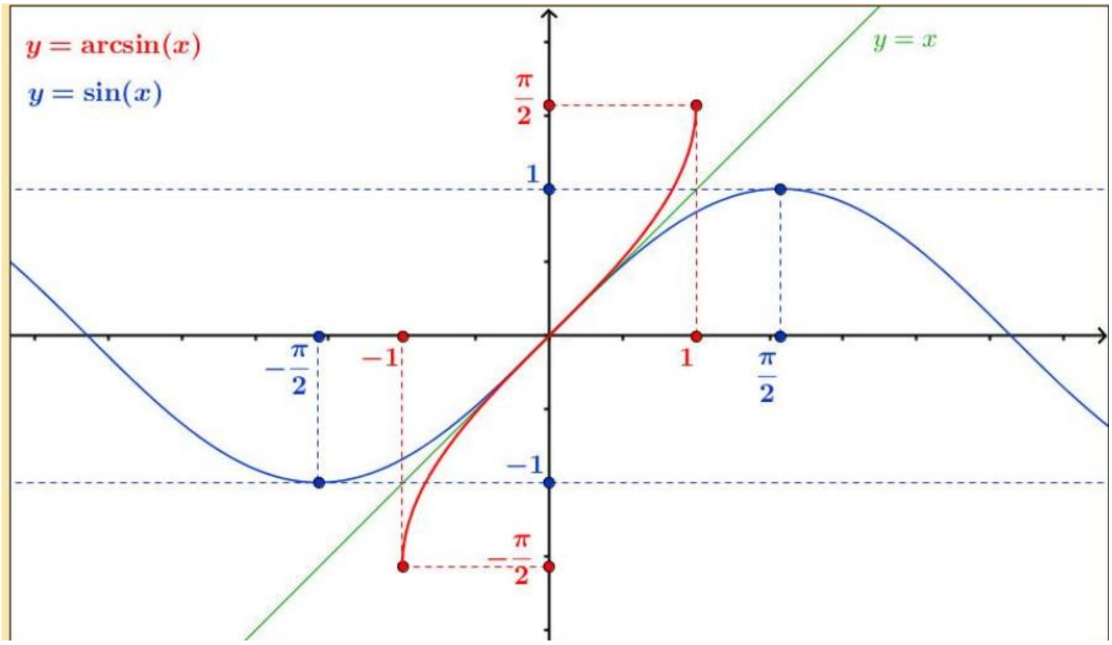
$$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$$

Συνήθεις Τιμές του $\sin^{-1} x$

x	$\sin^{-1} x$
-1	$-\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{3}$
1	$\frac{\pi}{2}$

- Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε τα γραφήματα των συναρτήσεων

$f(x) = sinx, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ και $f^{-1}(x) = arcsinx, x \in [-1,1]$ στο ίδιο σύστημα αξόνων

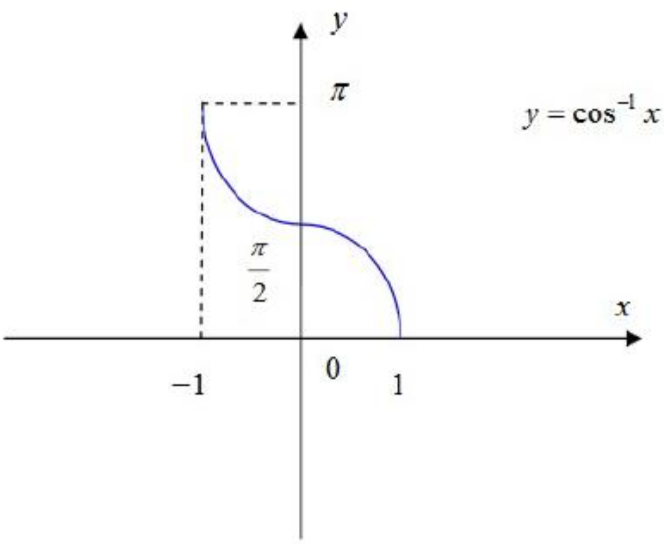


- **Τόξο Συνημιτόνου** $\cos^{-1}x$ **ή** $\arccos x$

Η συνάρτηση συνημίτονο (cosine function) $f(x) = \cos x$, όταν έχει πεδίο ορισμού το $[0, \pi]$ είναι γνησίως φθίνουσα και έχει σύνολο τιμών το $[-1, 1]$. Επομένως αντιστρέφεται . Την αντίστροφη συνάρτηση της $f(x) = \cos x$ την ονομάζουμε τόξο συνημιτόνου και την συμβολίζουμε $\cos^{-1}x$ ή $\arccos x$. Είναι δηλαδή $f^{-1}(x) = \arccos x$ με πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$ και σύνολο τιμών το $[0, \pi]$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\arccos x$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Γραφική Παράσταση



Ισχύουν τα εξής:

- $\cos x = y,\ x \in [0,\pi] \Leftrightarrow \arccos y = x,\ y \in [-1,1]$
- $\cos(\arccos x) = x$ $\textit{για κάθε}$ $x \in [-1,1]$
- $\arccos(\cos x) = x$ $\textit{για κάθε}$ $x \in [0,\pi]$

Παράδειγμα:

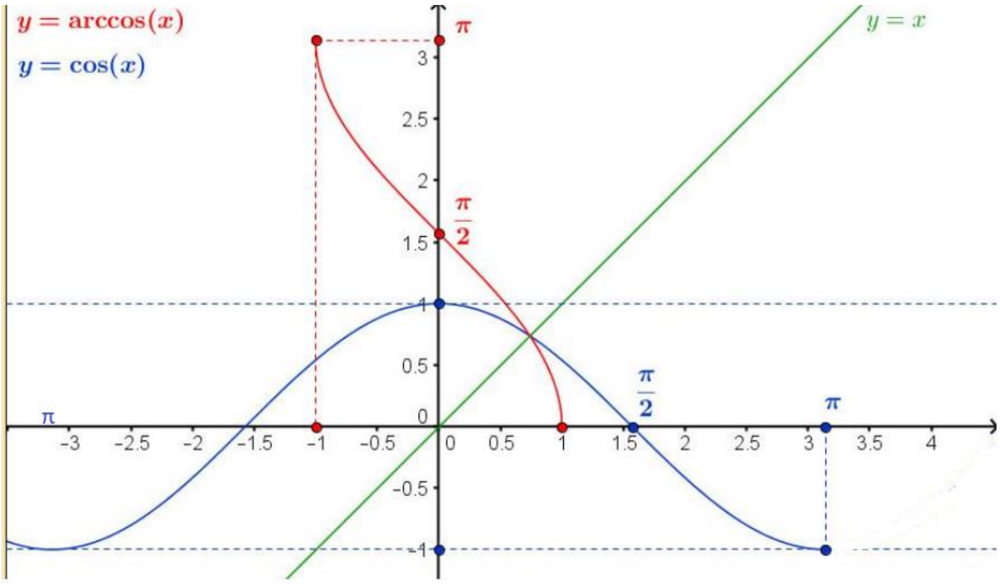
$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

Συνήθεις Τιμές του $\cos^{-1} x$

x	$\cos^{-1} x$
-1	π
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{6}$
1	0

- Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε τα γραφήματα των συναρτήσεων

$f(x) = cosx, x \in [0,\pi]$ και $f^{-1}(x) = arcscosx, x \in [-1,1]$ στο ίδιο σύστημα αξόνων



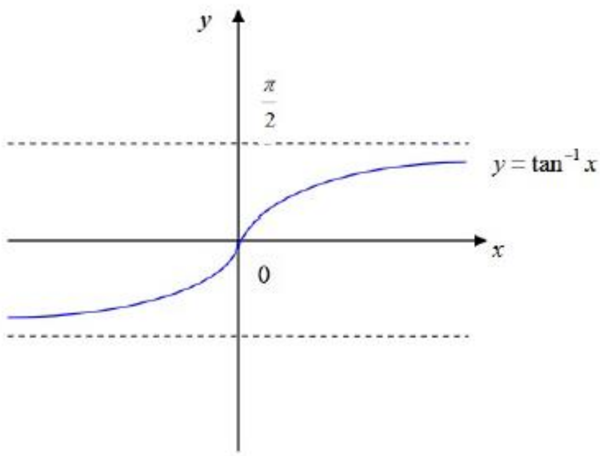
- **Τόξο Εφαπτομένης** $\tan^{-1}x$ **ή** $\arctan x$

Η συνάρτηση εφαπτομένη (tangent function) $f(x) = \tan x$, όταν έχει πεδίο ορισμού το $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι γνησίως αύξουσα και έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

Επομένως αντιστρέφεται . Την αντίστροφη συνάρτηση της $f(x) = \tan x$ την ονομάζουμε τόξο εφαπτομένης και την συμβολίζουμε $\tan^{-1}x$ ή $\arctan x$. Είναι δηλαδή $f^{-1}(x) = \arctan x$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\arctan x$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα

Γραφική Παράσταση



Ισχύουν τα εξής:

- $\tan x = y,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \arctan y = x, y \in \mathbb{R}$
- $\tan(\arctan x) = x$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$
- $\arctan(\tan x) = x$ *για κάθε* $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Συνήθεις Τιμές του $\tan^{-1} x$

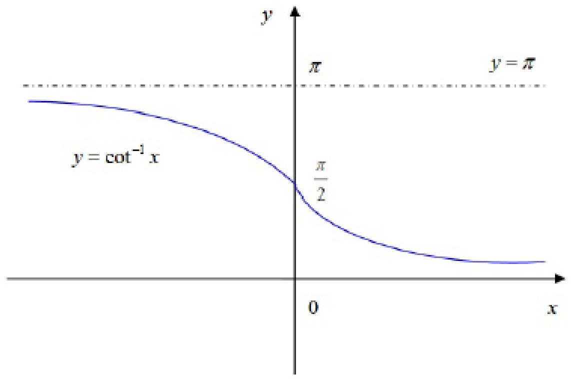
	$\tan^{-1} x$
$-\sqrt{3}$	$-\frac{\pi}{3}$
-1	$-\frac{\pi}{4}$
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$
0	0
$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\pi}{6}$
1	$\frac{\pi}{4}$
$\sqrt{3}$	$\frac{\pi}{3}$

- **Τόξο Συνφαπτομένης** $\cot^{-1} x$ **ή** $\operatorname{arc}\cot x$

Η συνάρτηση συνεφαπτομένη (cotangent function) $f(x) = \cot x$, όταν έχει πεδίο ορισμού το $(0,\pi)$ είναι γνησίως φθίνουσα και έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. Επομένως αντιστρέφεται . Την αντίστροφη συνάρτηση της $f(x) = \cot x$ την ονομάζουμε τόξο συνεφαπτομένης και την συμβολίζουμε $\cot^{-1} x$ ή $\operatorname{arc}\cot x$. Είναι δηλαδή $f^{-1}(x) = \operatorname{arccot} x$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $(0,\pi)$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\arctan x$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα

Γραφική Παράσταση



Ισχύουν τα εξής:

- $\cot x = y,\ x \in (0,\pi) \Leftrightarrow \operatorname{arccot} y = x, y \in \mathbb{R}$
- $\cot(\operatorname{arccot} x) = x \ \ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \ x \in \mathbb{R}$
- $\operatorname{arccot}(\cot x) = x \ \ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \ x \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

Παράδειγμα: $\boldsymbol{arcot\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}}$

Συνήθεις Τιμές του $\cot^{-1} x$

x	$\cot^{-1} x$
$-\sqrt{3}$	$\frac{5\pi}{6}$
-1	$\frac{3\pi}{4}$
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$
0	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\pi}{3}$
1	$\frac{\pi}{4}$
$\sqrt{3}$	$\frac{\pi}{6}$

Ταυτότητες Τόξου Ημιτόνου και Τόξου Συνημιτόνου

Για κάθε $x \in [-1,1]$ ισχύουν τα εξής:

1. $\arcsin(x) = \arcsin(-x)$

2. $\arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$

3. $\arcsin(x) + \arccos(x) = \dfrac{\pi}{2}$

Απόδειξη

1. Έστω $x \in [-1,1]$ με $\arcsin(x) = \theta$, $\theta \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Επομένως $\sin\theta = x$ και άρα $\sin(-\theta) = -x$ ή ισοδύναμα

$-\theta = \arcsin(-x)$.

Δηλαδή αποδείξαμε ότι: $\arcsin(x) = \arcsin(-x)$.

2. Έστω $x \in [-1,1]$ με $\arccos(x) = \theta$,. $\theta \in [0,\pi]$

Επομένως $\cos\theta = x$ και άρα $\cos(\pi - \theta) = -x$ ή ισοδύναμα

$\pi - \theta = \arccos(-x)$.

Δηλαδή αποδείξαμε ότι: $\arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$.

3. Έστω $x \in [-1,1]$ με $\arcsin(x) = \theta$, $\theta \in [0,\pi]$.

Επομένως $\sin\theta = x$ και άρα $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = x$, με $\dfrac{\pi}{2} - \theta \in [0,\pi]$.

ή ισοδύναμα

$\dfrac{\pi}{2} - \theta = \arccos(x)$.

Δηλαδή αποδείξαμε ότι: $\arcsin(x) + \arccos(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

Ασκήσεις:

1. Να υπολογιστούν τα παρακάτω

   Α. $arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, . $arccos(0.5)$,$sin\left(2arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$,

   $arctan(1) - arctan(-1)$

2. Να δείξετε ότι $sin(arccosx) = \sqrt{1-x^2}$ για κάθε $x \in [0,1]$ και να απλοποιήσετε την συνάρτηση $f(x) = tan(arccosx)$, όπου $x \in (0,1]$.

3. Να δείξετε ότι $cot[arcatanx] = \frac{1}{x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

4. Να δείξετε ότι $arctanx + arccotx = \frac{\pi}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Βιβλιογραφία:

1. Θ. Ρασσιάς. Μαθηματική Ανάλυση Ι , Τεύχος Α Εκδόσεις Σαββάλας
2. Σ. Τουμπής, Σ. Γκιτζένης Λογισμός Συναρτήσεων μιας Μεταβλητής. Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και βοηθήματα. HEALINK www.kallipos.gr
3. Tom M. Apostol One-Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra. Volume I. John Wiley & Sons