Αόριστο Ολοκλήρωμα

Διδάσκοντες: Ε. Παπαγεωργίου – Δ. Κουλουμπού

Ορισμός (Παράγουσα ή αρχική συνάρτηση)

Έστω μια συνάρτηση $f:\Delta\to\mathbb{R}$ ορισμένη σε ένα διάστημα *Δ*

Η συνάρτηση F λέγεται **παράγουσα** της $\boldsymbol{f}$ που ορίζεται στο διάστημα *Δ* όταν :

$F'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in\Delta$.

Θεώρημα:

Έστω F μια παράγουσα της $\boldsymbol{f}$ που στο διάστημα *Δ* . Τότε η συνάρτηση G είναι μια παράγουσα της $\boldsymbol{f}$ που στο διάστημα *Δ* , όταν και μόνο όταν η G έχει την μορφή $G(x)=F(x)+c$ για κάθε $x\in\Delta$. Όπου c είναι μία σταθερά.

Ορισμός (Αόριστο Ολοκλήρωμα)

Το σύνολο όλων των παραγουσών συναρτήσεων $F:\Delta\to\mathbb{R}$ μιας συνάρτηση $f:\Delta\to\mathbb{R}$ ορισμένη σε ένα διάστημα Δ ονομάζεται αόριστο ολοκλήρωμα (indefinite integral) της f στο Δ και συμβολίζεται $\int f(x)dx$. Αν γνωρίζουμε μία παράγουσα της f στο διάστημα Δ , τότε γράφουμε $\int f(x)dx=F(x)+c$.

Αν υπάρχει μία τέτοια συνάρτηση F, τότε η f ονομάζεται ολοκληρώσιμη Συνάρτηση (integrable function).

Σχόλια:

- $\int F'(x)dx=F(x)+c$
- $\dfrac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right)=f(x)$

- Όταν το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f είναι ένωση διαστημάτων, τότε βρίσκουμε το $\int f(x)dx$ σε κάθε διάστημα του πεδίου ορισμού της.

  Π.χ. $\int \frac{1}{x}dx = \begin{cases} \ln x + c_1, & x > 0 \\ \ln(-x) + c_2, & x < 0 \end{cases}$

- **Γραμμικότητα Αόριστου Ολοκληρώματος:**

  Αν f, g ολοκληρώσιμες συναρτήσεις σε ένα διάστημα Δ και $\kappa \in \mathbb{R}$ τότε

  $\int \kappa f(x)dx = \kappa \int f(x)dx$

  $\int \left[f(x) + g(x)\right]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Πίνακας Αόριστων Ολοκληρωμάτων

$$\int 0dx = c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x + c$$

$$\int \frac{1}{x^2+k^2} dx = \frac{1}{k}\arctan\left(\frac{x}{k}\right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c = -\arccos x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{k^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{k}\right) + c$$

$$\int 1dx = x + c$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + c$$

Οι προηγούμενοι τύποι ισχύουν για τα $x \in \mathbb{R}$, όπου ορίζονται οι υπό ολοκλήρωση συναρτήσεις.

Ολοκληρώματα Σύνθετων Συναρτήσεων:

$$\int f^k(x)f'(x)dx = \frac{f^{k+1}(x)}{k+1} + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)} + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f^2(x)}dx = -\frac{1}{f(x)} + c$$

$$\int e^{f(x)}f'(x)dx = e^{f(x)} + c$$

$$\int f'(x)\sin f(x)dx = -\cos f(x) + c$$

$$\int f'(x)\cos f(x)dx = \sin f(x) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}dx = \arcsin f(x) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx = \arctan f(x) + c$$

Οι προηγούμενοι τύποι ισχύουν για τα $x \in \mathbb{R}$ όπου ορίζονται οι υπό ολοκλήρωση συναρτήσεις.

Σχόλιο:

Αν $F(x)$ είναι μία παράγουσα της συνάρτησης $f(x)$, τότε

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c$$

Παραδείγματα (Ολοκληρώματα Βασικών Συναρτήσεων):

1.

$$\int (x^2 - 2x + 5)dx = \int x^2 dx - \int 2x dx + \int 5 dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + c$$

2.

$$I = \int \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 1}{x} dx = \int \left(\frac{x^3}{x} + \frac{2x^2}{x} + \frac{3x}{x} + \frac{1}{x} \right) dx =$$

$$= \int \left(x^2 + 2x + 3 + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x + \ln|x| + c$$

3.

$$= \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 dx$$

Θυμίζουμε ότι: $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$. Επομένως:

$$I = \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 dx = \int \left(x + 2x^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{3}} + x^{-\frac{2}{3}} \right) dx =$$

$$= \int \left(x + 2x^{\frac{1}{6}} + x^{-\frac{2}{3}} \right) dx = \frac{x^2}{2} + 2\frac{x^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}} + \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + c$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{12\sqrt[6]{x^7}}{7} + 3\sqrt[3]{x} + c$$

4.

$$I = \int \left(x^2 e^x + 2xe^x \right) dx = \int \left(x^2 e^x \right)' dx = x^2 e^x + c$$

Παραδείγματα (Ολοκληρώματα Σύνθετων Συναρτήσεων):

5.

$$I = \int \frac{x+2}{x^2+1} dx = \int \left(\frac{x}{x^2+1} + \frac{2}{x^2+1} \right) dx = \int \left(\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1} + 2\frac{1}{x^2+1} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + 2\arctan x + c$$

6.

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx =$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

7.

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx =$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

<u>**Σημείωση:**</u> Για τον υπολογισμό των παραπάνω αλλά και παρόμοιων ολοκληρωμάτων χρησιμοποιούμε τις παρακάτω τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\tan^2 x = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$$

8.

$$I = \int (3x+1)^{15} dx = \frac{1}{3}\frac{(3x+1)^{16}}{16} + c = \frac{(3x+1)^{16}}{48} + c$$

9.

$$I = \int \frac{x+1}{\left(x^2+2x+4\right)^2} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{\left(x^2+2x+4\right)^2} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\left(x^2+2x+4\right)'}{\left(x^2+2x+4\right)^2} dx = -\frac{1}{2\left(x^2+2x+4\right)} + c$$

10.

$$I = \int e^{x^2+1} 2x dx = I = \int e^{x^2+1}\left(x^2+1\right)' dx = e^{x^2+1} + c$$

11.

$$I = \int \cos\left(x^2+2x\right)(x+1) dx = \frac{1}{2}\int \cos\left(x^2+2x\right)(2x+2) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos\left(x^2+2x\right)\left(x^2+1\right)' dx = \frac{\sin\left(x^2+2x\right)}{2} + c$$

12.

$$I=\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}dx=\frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x}}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{\left(x^2+2x\right)'}{\sqrt{x^2+2x}}dx=\frac{1}{2}2\sqrt{x^2+2x}+c=\sqrt{x^2+2x}+c$$

<u>Άσκηση:</u>

Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα

1. $\int (x+4)^6 dx$
2. $\int (3x+1)^{10} dx$
3. $\int \frac{x}{3x^2+1} dx$
4. $\int \frac{\ln x}{x} dx$
5. $\int \frac{1}{x\ln x} dx$
6. $\int e^{\sin x}\cos x dx$
7. $\int x^2 e^{x^3+1} dx$
8. $\int \frac{1}{x^2+9} dx$
9. $\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x} dx$
10. $\int (x^2 cosx + 2xsinx)dx$
11. $\int (x+1)^2 dx$
12. $\int \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$
13. $\int \left(\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x^2+1}\right) dx$
14. $\int \frac{3x^2+14x}{x^3+7x^2+15} dx$
15. $\int \sin(2x+5) dx$
16. $\int \cos(5x+9) dx$
17. $\int e^{-x} dx$
18. $\int e^{arcsinx}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
19. $\int \frac{sin2x}{1+sin^2x}dx$

20. $\int tanx dx$

21. $\int \frac{1}{cos^2 2x} dx$

22. $\int \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2+1)^2}} dx$

23. $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$

24. $\int \frac{cosx}{1+sin^2 x} dx$

Μέθοδοι Υπολογισμού Αόριστου Ολοκληρώματος:

Α. Μέθοδος της Αντικατάστασης

Αν δίνεται ένα ολοκλήρωμα της μορφής $I=\int f(g(t))g'(t)dt$ θέτουμε $x=g(t)$ και έτσι λαμβάνουμε την σχέση $g'(t)dt=dx$. Επομένως.

$$I=\int f(g(t))g'(t)dt=\int f(x)dx$$

Εφαρμογή:

Να δείξετε ότι

$$\int\frac{1}{x^2+k^2}dx=\frac{1}{k}\arctan\left(\frac{x}{k}\right)+c,k>0$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{k^2-x^2}}dx=\arcsin\left(\frac{x}{k}\right)+c\ ,k>0$$

Λύση:

$$\int\frac{1}{x^2+k^2}dx=\int\frac{1}{k^2\left(\left(\frac{x}{k}\right)^2+1\right)}dx=\frac{1}{k^2}\int\frac{1}{\left(\left(\frac{x}{k}\right)^2+1\right)}dx$$

Θέτουμε $u=\frac{x}{k}\Rightarrow x=ku\Rightarrow dx=kdu$. Άρα

$$\int\frac{1}{x^2+k^2}dx=\frac{1}{k^2}\int\frac{1}{\left(\left(\frac{x}{k}\right)^2+1\right)}dx=\frac{1}{k^2}\int\frac{1}{u^2+1}kdu=\frac{1}{k}\arctan u+c=\frac{1}{k}\arctan\left(\frac{x}{k}\right)+c$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{k^2-x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{k^2\left(1-\left(\frac{x}{k}\right)^2\right)}}dx=\frac{1}{k}\int\frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{x}{k}\right)^2\right)}}dx$$

Θέτουμε $u=\frac{x}{k}\Rightarrow x=ku\Rightarrow dx=kdu$. Άρα

$$\int\frac{1}{\sqrt{k^2-x^2}}dx=\frac{1}{k}\int\frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{x}{k}\right)^2\right)}}dx=\frac{1}{k}\int\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}kdu=\int\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du=$$

$$=\arcsin u+c=\arcsin\left(\frac{x}{k}\right)+c$$

<u>Παραδείγματα:</u>

1. Για να υπολογίσω το ολοκλήρωμα $I=\int x^2\sin x^3 dx$, θέτω $u=x^3$.

   Επομένως $du=3x^2dx$ ή $x^2dx=\frac{1}{3}du$.

   Άρα $I=\int\frac{1}{3}\sin u du=-\frac{1}{3}\cos u=-\frac{1}{3}\cos x^3+c$

2. Για να υπολογίσω το ολοκλήρωμα $I=\int\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}}dx$ θέτω $u=\sqrt[6]{x}$.

   Επομένως $x=u^6$ και $dx=6u^5du$.
   Άρα
   $$I=\int\frac{\sqrt{u^6}+\sqrt[3]{u^6}}{\sqrt[6]{u^6}}6u^5du=6\int\frac{u^3+u^2}{u}u^5du=6\int\left(u^7+u^6\right)du=$$
   $$=\frac{6}{8}u^8+\frac{6}{7}u^7=\frac{6}{8}\sqrt[6]{x^8}+\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}=\frac{6}{8}\sqrt[3]{x^4}+\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}\ \mathbf{+c}$$

3. Για να υπολογίσω το ολοκλήρωμα $I=\int\frac{\ln^4 x}{x}dx$ θέτω $u=\ln x$ Επομένως

   $du=\frac{1}{x}dx$. Άρα
   $$I=\int\frac{\ln^4 x}{x}dx=\int\ln^4 x\frac{1}{x}dx=\int u^4du=\frac{u^5}{5}+c=\frac{\ln^5 x}{5}+c$$

4. Για να υπολογίσω το ολοκλήρωμα $I=\int\frac{1}{x\sqrt{2x-9}}dx$ θέτω $u=\sqrt{2x-9}$

   Επομένως $u^2=2x-9\Rightarrow x=\frac{u^2+9}{2}$ *και* $dx=udu$. Άρα
   $$\boldsymbol{I=\int\frac{1}{x\sqrt{2x-9}}dx=\int\frac{1}{\frac{u^2+9}{2}u}udu=2\int\frac{1}{u^2+9}du}$$
   $$\boldsymbol{=\frac{2}{3}arctan\left(\frac{u}{3}\right)+c=\frac{2}{3}arctan\left(\frac{\sqrt{2x-9}}{3}\right)+c}$$

5. Για να υπολογίσω το ολοκλήρωμα $I=\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ θέτω $u=\sqrt{x}$ Επομένως

   $u^2=x$ *και* $dx=2udu$. Άρα
   $$I=\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{e^u}{u}2udu=\int 2e^udu=e^u+c=e^{\sqrt{x}}+c$$

<u>Άσκηση:</u>

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

1. $\int (2x+1)^5 dx$
2. $\int x\sqrt{1+x^2}dx$
3. $\int \frac{(\ln x)^4}{x}dx$
4. $\int e^{3\cos x}\sin x dx$
5. $\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$
6. $\int \frac{\ln^2 x+\ln x+2}{x}dx$
7. $\int x^2\sqrt{x^3+7}dx$
8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}}$
9. $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x}}$
10. $\int \frac{1-\sqrt{3x+4}}{1+\sqrt{3x+4}}dx$
11. $\int \frac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}dx$
12. $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}+\sqrt[6]{x^7}}dx$
13. $\int \frac{x+1}{x^2+2x+5}dx$
14. $\int e^{\arcsin x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
15. $\int \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2+1)^2}}dx$
16. $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$

Β Ολοκλήρωση Κατά Παράγοντες (Integration by parts)

Θεώρημα:

Θεωρούμε τις συναρτήσεις f,g που είναι παραγωγίσιμες σε ένα διάστημα Δ. Τότε αληθεύει η σχέση:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Παραδείγματα:

1. **(Γινόμενο εκθετικής με πολυωνυμική)** Για το ολοκλήρωμα $I=\int xe^{x}dx$, έχουμε:

$$I=\int x\left(e^{x}\right)'dx = xe^{x} - \int (x)'e^{x}dx = xe^{x} - \int e^{x}dx = xe^{x} - e^{x} + c$$

2. **(Γινόμενο εκθετικής με τριγωνομετρική)** Για το ολοκλήρωμα $I=\int x\cos xdx$, έχουμε:

$$I=\int x(\sin x)'dx = x\sin x - \int (x)'\sin xdx = x\sin x - \int \sin xdx = x\sin x + \cos x + c$$

3. Για το ολοκλήρωμα $I=\int \ln xdx$, έχουμε:

$$I=\int (x)'\ln xdx = x\ln x - \int x(\ln x)'dx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + c$$

4. Για το ολοκλήρωμα $I=\int \arctan xdx$, έχουμε:

$$I=\int (x)'\arctan xdx = x\arctan x - \int x(\arctan x)'dx =$$

$$= x\arctan x - \int x\frac{1}{x^2+1}dx =$$

$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + c$$

5. **(Γινόμενο εκθετικής με τριγωνομετρική)** Για το ολοκλήρωμα $I=\int e^{x}\cos xdx$ έχουμε

$$I=\int e^{x}\cos xdx$$

$$I=\int \left(e^{x}\right)'\cos xdx$$

$$I=e^{x}\cos x - \int e^{x}(\cos x)'dx$$

$$I=e^{x}\cos x + \int e^{x}\sin xdx$$

$$I = e^x \cos x + \int \left(e^x\right)' \sin x dx$$

$$I = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \left(\sin x\right)' dx$$

$$I = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$$

$$I = e^x \cos x + e^x \sin x - I + 2c$$

$$2I = e^x \cos x + e^x \sin x + 2c$$

$$I = \frac{e^x \cos x + e^x \sin x}{2} + c$$

<u>Άσκηση:</u>

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

1. $\int xe^x dx$
2. $\int x \cos x dx$
3. $\int x \sin 2x dx$
4. $\int \ln x dx$
5. $\int e^x \cos x dx$
6. $\int x^2 \ln x dx$
7. $\int x^5 e^{x^3} dx$
8. $\int x \sin x \cos x dx$
9. $\int x \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) dx$
10. $\int \frac{x \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}} dx$
11. $\int \arcsin x dx$
12. $\int \arctan x dx$
13. $\int x^2 \arctan x dx$
14. $\int e^{3x} \cos 2x$

Γ Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων:

Μία ρητή συνάρτηση είναι της μορφής $\frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x), Q(x)$ πολυώνυμα.

Ολοκλήρωση απλών κλασμάτων:

$$\int \frac{1}{\alpha x+\beta}dx = \frac{1}{\alpha}\ln|\alpha x+\beta| + c$$

$$\int \frac{1}{(\alpha x+\beta)^n}dx = \frac{1}{\alpha}\frac{(\alpha x+\beta)^{-n+1}}{-n+1} + c$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan x + c$$

$$\int \frac{1}{x^2+k^2}dx = \frac{1}{k}\arctan\left(\frac{x}{k}\right) + c$$

$$\int \frac{1}{(\alpha x+\beta)^2}dx = -\frac{1}{a(ax+\beta)} + c$$

Για την ολοκλήρωση άλλων ρητών συναρτήσεων θα επιδιώκουμε να γράφουμε το κλάσμα ώς άθροισμα συναρτήσεων των οποίων τα ολοκληρώματα είναι γνωστά.

Έστω $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ μια ρητή συνάρτηση.

Βασικές Περιπτώσεις:

- Για να υπολογίσουμε ολοκλήρωμα της μορφής $I = \int \frac{Ax+B}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}dx$, με $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$, εργαζόμαστε ως εξής:
  - Ελέγχουμε αν το $Ax+B$ είναι παράγωγος του $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, οπότε υπολογίζετε απλά.
  - Αν δεν συμβαίνει αυτό, τότε αναλύουμε την συνάρτηση $f(x) = \frac{Ax+B}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα.
  -

Παράδειγμα

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $I = \int \frac{x+3}{x^2-1}dx$ έχουμε:

$\frac{x+3}{x^2-1}=\frac{x+3}{(x-1)(x+1)}$. Αναζητάμε αριθμούς Α,Β τέτοιους ώστε $\frac{x+3}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$ για κάθε $x\neq\pm1$. Εδώ $A=2$ και $B=-1$. Επομένως $\frac{x+3}{(x-1)(x+1)}=\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+1}$. Έτσι έχουμε

$$I=\int\frac{x+3}{x^2-1}dx=\int\left(\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx=2\ln|x-1|-\ln|x+1|+c.$$

Παρατήρηση: Η παραπάνω μεθοδολογία γενικεύεται και στην περίπτωση που ο παρανομαστής είναι πολυώνυμο της μορφής $Q(x)=(x-r_1)(x-r_2)...(x-r_n)$ με $r_1,r_2,...r_n$ διαφορετικά ανά δύο και ο αριθμητής πολυώνυμο βαθμού μικρότερου από n.

- Για να υπολογίσουμε ολοκλήρωμα της μορφής $I=\int\frac{P(x)}{(x-\rho)^n}dx$, με $P(x)$ πολυώνυμο βαθμού μικρότερου από n, τότε γράφουμε το $\frac{P(x)}{(x-\rho)^n}=\frac{A_1}{x-\rho}+\frac{A_2}{(x-\rho)^2}+...+\frac{A_n}{(x-\rho)^n}$ και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα.

<u>**Παράδειγμα**</u>

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $I=\int\frac{x^2+1}{(x-1)^3}dx$ έχουμε:

Αναζητάμε αριθμούς A,B,Γ τέτοιους ώστε $\frac{x^2+1}{(x-1)^3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{\Gamma}{(x-1)^3}$ για κάθε $x\neq1$. Εδώ $A=1$ και $B=2$ και $\Gamma=2$. Επομένως $\frac{x^2+1}{(x-1)^3}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}$. Έτσι έχουμε

$$I=\int\frac{x^2+1}{(x-1)^3}dx=\int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}\right)dx=$$

$$=\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+c$$

- Για να υπολογίσουμε ολοκλήρωμα της μορφής $\int\frac{Ax+B}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}dx$, όπου $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma<0$ κάνουμε τον μετασχηματισμό $t=x+\frac{\beta}{2\alpha}$ και αναγόμαστε σε ολοκληρώματα του λογάριθμου και του τόξου εφαπτομένης.

Παράδειγμα:

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I=\int \frac{x+1}{x^2+6x+10}dx$.

Λύση:

Έχουμε $\Delta = 6^2 - 40 < 0$. Παρατηρούμε ότι $\frac{x+1}{x^2+6x+10} = \frac{x+1}{(x+3)^2+1}$ Θέτω $t = x+3$. Άρα $dx = dt$.

Έχουμε

$$I=\int \frac{t-3+1}{(t-3)^2+6(t-3)+10}dt$$

$$I=\int \frac{t-2}{t^2+1}dt$$

$$I=\int \frac{t}{t^2+1}dt-2\int \frac{1}{t^2+1}dt$$

$$I=\frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+1}dt-2\int \frac{1}{t^2+1}dt$$

$$I=\frac{1}{2}\ln(t^2+1)-2\arctan t+c$$

$$I=\frac{1}{2}\ln\left((x+3)^2+1\right)-2\arctan(x+3)+c$$

$$I=\frac{1}{2}\ln(x^2+6x+10)-2\arctan(x+3)+c$$

<u>Γενική Μεθοδολογία:</u>

Έστω $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ μια ρητή συνάρτηση . Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $I=\int\dfrac{P(x)}{Q(x)}dx$ ακολουθούμε τα εξής βήματα:

<u>1ο βήμα</u>

Αν ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x)$ (αριθμητή) είναι μεγαλύτερος ή ίσος από το βαθμό του $Q(x)$ (παρονομαστή), τότε εκτελείται η διαίρεση $P(x):Q(x)$ οπότε προκύπτουν δύο πολυώνυμα $\Pi(x)$ και $\upsilon(x)$ με
$P(x)=\Pi(x)Q(x)+\upsilon(x)$, όπου ο βαθμός του πολυωνύμου $\upsilon(x)$ είναι μικρότερος από τον βαθμό του πολυωνύμου $Q(x)$ ή $\upsilon(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο. Τότε είναι $R(x)=\Pi(x)+R_1(x)$, όπου $R_1(x)=\dfrac{\upsilon(x)}{Q(x)}$
είναι μια ρητή συνάρτηση με βαθμό του $\upsilon(x)$ (αριθμητή) μικρότερο από τον βαθμό του $Q(x)$ (παρονομαστή) και το ολοκλήρωμα $\int\Pi(x)dx$
υπολογίζεται εύκολα με τη βοήθεια της γραμμικής ιδιότητας, ενώ το $\int R_1(x)dx$ υπολογίζεται στα επόμενα βήματα.

<u>2ο βήμα</u>

Αναλύουμε το πολυώνυμο $Q(x)$ σε γινόμενο παραγόντων της μορφής
$(x-\rho)^n$ και $\left(x^2+\beta x+\gamma\right)^m$ όπου $\Delta=\beta^2-4\gamma<0$, και $m,n\in\mathbb{N}^*$

<u>3ο βήμα</u>

Αναλύουμε τη ρητή συνάρτηση $R_1(x)$ σε ένα άθροισμα απλούστερων ρητών συναρτήσεων. Τούτο, όπως αποδεικνύεται, είναι εφικτό για κάθε ρητή συνάρτηση με βαθμό του αριθμητή μικρότερο από το βαθμό του παρανομαστή. Η μορφή των όρων του αθροίσματος αυτού εξαρτάται από τους παράγοντες στην ανάλυση του $Q(x)$ σε γινόμενο παραγόντων.

Συγκεκριμένα για κάθε παράγοντα της μορφής $(x-\rho)^n$ θεωρείται η έκφραση
$\dfrac{A_1}{x-\rho}+\dfrac{A_2}{(x-\rho)^2}+\ldots+\dfrac{A_n}{(x-\rho)^n}$, ενώ για κάθε παράγοντα της μορφής $\left(x^2+\beta x+\gamma\right)^m$ θεωρείται η έκφραση

$$\frac{B_1x+\Gamma_1}{x^2+\beta x+\gamma}+\frac{B_2x+\Gamma_2}{\left(x^2+\beta x+\gamma\right)^2}+\ldots+\frac{B_mx+\Gamma_m}{\left(x^2+\beta x+\gamma\right)^m}.$$

<u>4ο βήμα</u>

Υπολογίζουμε τους συντελεστές στην ανάλυση της ρητής συνάρτησης σε μερικά κλάσματα, και στην συνέχεια υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα.

<u>Παράδειγμα:</u>

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I=\int\frac{x^6-x^3+1}{x^5-x^2}dx$.

<u>Λύση:</u>

Από την διαίρεση των πολυωνύμων προκύπτει ότι $x^6-x^3+1=\left(x^5-x^2\right)x+1$

και άρα $I=\int\left(x+\frac{1}{x^5-x^2}\right)dx=\frac{x^2}{2}+\int\frac{1}{x^5-x^2}dx$.

Για τον υπολογισμό του $I_1=\int\frac{1}{x^5-x^2}dx$ έχουμε:

$$\frac{1}{x^5-x^2}=\frac{1}{x^2\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{\Gamma}{x-1}+\frac{\Delta x+E}{x^2+x+1}$$ για κάθε $x\neq 0, x\neq 1$.

Βρίσκουμε ότι $A=0, B=-1, \Gamma=\frac{1}{3}, \Delta=-\frac{1}{3}, E=\frac{1}{3}$. Άρα

$$\frac{1}{x^5-x^2}=\frac{1}{x^2\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)}=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3\left(x-1\right)}-\frac{x-1}{3\left(x^2+x+1\right)}.$$

Επομένως

$$I=\int\left(x+\frac{1}{x^5-x^2}\right)dx=\frac{x^2}{2}+\int\left[-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3\left(x-1\right)}-\frac{x-1}{3\left(x^2+x+1\right)}\right]dx=$$

$$\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\ln\left|x-1\right|-\frac{1}{3}\int\frac{x-1}{x^2+x+1}dx$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $I_2=\int\frac{x-1}{x^2+x+1}dx$ έχουμε

$I_2=\int\frac{x-1}{x^2+x+1}dx=\int\frac{x-1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx$. Θέτω $t=x+\frac{1}{2}$ και έχουμε

$$I_2=\int\frac{x-1}{x^2+x+1}dx=\int\frac{t-\frac{3}{2}}{t^2+\frac{3}{4}}dt=\frac{1}{2}\int\frac{2t}{t^2+\frac{3}{4}}dt-\frac{3}{2}\int\frac{1}{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{2}\frac{3}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)-\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)-\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c$$

Άρα

$$I=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln\left(x^2+x+1\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c\,.$$

<u>Άσκηση:</u>

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

1. $\int\frac{x^5+2}{x^2-1}dx$

2. $\int\frac{x^2+5x+2}{\left(x^2+1\right)\left(x+1\right)}dx$

3. $\frac{1}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}dx$

4. $\int\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}dx$

5. $\int\frac{8x^3+13x}{\left(x^2+2\right)^2}dx$

6. $\int\frac{x^4-2x^2+4x+1}{\left(x-1\right)^2\left(x+1\right)}dx$

Δ Ολοκλήρωση Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων:

Το ολοκλήρωμα της μορφής $\int f(\sin x, \cos x)dx$ μετασχηματίζεται σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης με την βοήθεια του μετασχηματισμού $t = \tan\frac{x}{2}$ η οποία ονομάζεται **γενική τριγωνομετρική αντικατάσταση**

$t = 2\arctan x$.

Με τον μετασχηματισμό αυτό έχουμε:

$$\sin x = \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+1} = \frac{2t}{t^2+1} \text{ και}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+1} = \frac{1-t^2}{t^2+1}$$

Και $x = 2\arctan t$ από την οποία με διαφόριση έπεται ότι $dx = \frac{2}{t^2+1}dt$.

Άρα για την **γενική τριγωνομετρική αντικατάσταση** ισχύουν τα εξής:

Θέτουμε $\boldsymbol{t = tan\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow x = 2arctant \Rightarrow dx = \frac{2}{t^2+1}dt}$

$$\boldsymbol{sinx = \frac{2t}{1+t^2}}$$

$$\boldsymbol{cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

$$\boldsymbol{tanx = \frac{2t}{1-t^2}}$$

$$\boldsymbol{cotx = \frac{1-t^2}{2t}}$$

Παράδειγμα:

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $I = \int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

Λύση:

Κάνουμε την αντικατάσταση $t = \tan\frac{x}{2}$ και από τους τύπους της γενικής τριγωνομετρικής αντικατάστασης έχουμε

$$I=\int \frac{\frac{2}{t^2+1}}{1+\frac{2t}{t^2+1}+\frac{1-t^2}{t^2+1}}dt=\int \frac{1}{t+1}dt=$$
$$=\ln\left|t+1\right|+c=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right|+c$$

<u>Μεθοδολογία Ειδικών Περιπτώσεων:</u>

- Αν στο ολοκλήρωμα $\int f(\sin x,\cos x)dx$, για την προς ολοκλήρωση συνάρτηση $f(\sin x,\cos x)$ ισχύει $f(-\sin x,\cos x)=-f(\sin x,\cos x)$, τότε θέτουμε $t=\cos x$.

<u>Παράδειγμα:</u>

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $I=\int \sin^3 x dx$

<u>Λύση:</u>

Για την προς ολοκλήρωση συνάρτηση $f(\sin x,\cos x)=\sin^3 x$ ισχύει
$f(-\sin x,\cos x)=(-\sin x)^3=-\sin^3 x=-f(\sin x,\cos x)$.

Επομένως κάνουμε την αντικατάσταση $t=\cos x$ και έχουμε $dt=-\sin x dx$, $\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-t^2$. Άρα

$$I=\int \sin^3 x dx=\int \sin^2 x\sin x dx=$$
$$=\int\left(1-\cos^2 x\right)\sin x dx=\int -\left(1-t^2\right)dt=-t+\frac{t^3}{3}+c=-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}+c$$

- Αν στο ολοκλήρωμα $\int f(\sin x,\cos x)dx$ για την προς ολοκλήρωση συνάρτηση $f(\sin x,\cos x)$ ισχύει $f(\sin x,-\cos x)=-f(\sin x,\cos x)$ τότε θέτουμε $t=\sin x$.

<u>Παράδειγμα:</u>

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $I=\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x+\sin x}dx$.

<u>Λύση:</u>

Για την προς ολοκλήρωση συνάρτηση $f(\sin x,\cos x)=\dfrac{\cos^3 x}{\sin^2 x+\sin x}$

ισχύει $f(\sin x,-\cos x)=\dfrac{(-\cos x)^3}{\sin^2 x+\sin x}=-\dfrac{\cos^3 x}{\sin^2 x+\sin x}-f(\sin x,\cos x)$.

Επομένως κάνουμε την αντικατάσταση $t = \sin x$ και έχουμε $dt = \cos x dx$, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2$. Άρα

$$I = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x + \sin x} dx = \int \frac{\cos^2 x \cos x dx}{\sin^2 x + \sin x} =$$

$$= \int \frac{(1-t^2)}{t^2 + t} dt = \int \frac{1-t}{t} dt = \int \left(\frac{1}{t} - 1\right) dt = \ln|t| - t + c = \ln|\sin x| - \sin x + c$$

- Αν στο ολοκλήρωμα $\int f(\sin x, \cos x) dx$ για την προς ολοκλήρωση συνάρτηση $f(\sin x, \cos x)$ ισχύει $f(-\sin x, -\cos x) = f(\sin x, \cos x)$ τότε θέτουμε $t = \tan x$ και έχουμε

$$\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{t^2}{1 + t^2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + t^2}$$

$$dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx \Rightarrow dx = \frac{1}{t^2 + 1} dt$$

<u>Παράδειγμα:</u>

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $I = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + 4 \sin x \cos x} dx$

Για την προς ολοκλήρωση συνάρτηση

$$f(\sin x, \cos x) = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + 4 \sin x \cos x} \quad \text{ισχύει}$$

$$f(-\sin x, -\cos x) = \frac{(-\cos x)^2}{(-\sin x)^2 + 4(-\sin x)(-\cos x)} = f(\sin x, \cos x).$$

Επομένως κάνουμε την αντικατάσταση $t = \tan x$ και έχουμε

$$\cos^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + t^2},$$

$$dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx \Rightarrow dx = \frac{1}{t^2 + 1} dt$$

Άρα

$$I=\int\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x+4\sin x\cos x}dx=\int\frac{1}{\tan^2 x+4\tan x}dx=\int\frac{1}{t^2+4t}\frac{1}{t^2+1}dt=$$

$$=\int\frac{1}{t(t+4)(t^2+1)}dt=\int\left(\frac{1}{4t}-\frac{1}{68(t+4)}-\frac{2}{17}\frac{2t}{t^2+1}-\frac{1}{17}\frac{1}{t^2+1}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{4}\ln|t|-\frac{1}{68}\ln|t+4|-\frac{2}{17}\ln\left(t^2+1\right)-\frac{1}{17}\arctan t+c=$$

$$=\frac{1}{4}\ln|\tan x|-\frac{1}{68}\ln|\tan x+4|-\frac{2}{17}\ln\left(\tan^2 x+1\right)-\frac{1}{17}\arctan(\tan x)+c=$$

$$=\frac{1}{4}\ln|\tan x|-\frac{1}{68}\ln|\tan x+4|-\frac{2}{17}\ln\left(\tan^2 x+1\right)-\frac{1}{17}x+c$$

Άσκηση:

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

1. $\int \frac{1}{\sin x} dx$
2. $\int \frac{1}{\cos x} dx$
3. $\int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x} dx$
4. $\int \cos^5 x dx$
5. $\int \frac{1 - \sin x}{1 + \cos x} dx$
6. $\int \frac{\sqrt{1 + \cos x}}{\sin x} dx$
7. $\int \frac{1}{4\cos x + 3\sin x} dx$
8. $\int \frac{1}{2 + \cos x + \sin x} dx$
9. $\int \frac{1}{1 + 2\sin^2 x} dx$
10. $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$
11. $\int \frac{x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$
12. $\int \frac{\cos x}{1 + \cos x} dx$
13. $\int \frac{1}{1 + \sin^2 x} dx$
14. $\int \frac{1}{5\cos^2 x + 3\sin^2 x} dx$

Βιβλιογραφία:

1. Θ. Ρασσιάς. Μαθηματική Ανάλυση Ι , Τεύχος Β Εκδόσεις Σαββάλας
2. Σ. Τουμπής, Σ. Γκιτζένης Λογισμός Συναρτήσεων μιας Μεταβλητής. Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και βοηθήματα. HEALINK www.kallipos.gr
3. Tom M. Apostol One-Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra. Volume I. John Wiley & Sons
4. R.L. Finney, M.D. Weir, F.R. Giordano, Thomas Απειροστικός Λογισμός Τόμος Ι. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης (2012)