# Ορισμένο Ολοκλήρωμα – Εφαρμογές του Ορισμένου Ολοκληρώματος

## Διδάσκοντες: Ε. Παπαγεωργίου – Δ. Κουλουμπού

### Ορισμένο Ολοκλήρωμα - Γεωμετρική Ερμηνεία:

Το ορισμένο ολοκλήρωμα μιας συνεχούς συνάρτησης $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, το οποίο συμβολίζεται με $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$,

- όταν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, παριστάνει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$.
- Αν η συνάρτηση $f$ είναι θετική σε ορισμένα υποδιαστήματα του $[\alpha,\beta]$ και αρνητική στα υπόλοιπα, τότε η τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος της $f$ στο $[\alpha,\beta]$ παριστάνει το αλγεβρικό άθροισμα των εμβαδών των χωρίων τα οποία βρίσκονται πάνω και κάτω από τον άξονα $x'x$.
- το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ ισούται με $E=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)|dx$.

### Θεμελιώσες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού:

Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$, με παράγωγο ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$. Τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)dx = f(\beta)-f(\alpha)$$

Ισοδύναμα Αν $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ και F είναι μια παράγουσα της $f$ στο $[\alpha,\beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(\beta)-F(\alpha)$

.

## Ιδιότητες Ορισμένου Ολοκληρώματος:

Έστω $f,g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις και $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$.

1. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$

2. $\int_{\gamma}^{\gamma} f(x)dx = 0$ για κάθε $\gamma\in[\alpha,\beta]$

3. Η συνάρτηση $\kappa f+\lambda g$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύει

   $\int_{\alpha}^{\beta}[\kappa f(x)+\lambda g(x)]dx = \int_{\alpha}^{\beta}\kappa f(x)dx+\int_{\alpha}^{\beta}\lambda g(x)dx$

4. $\int_{\alpha}^{\beta} c\,dx = c(\beta-\alpha)$

5. Αν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\geq 0$

6. Αν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και $f$ όχι παντού $0$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx>0$

7. Αν $f(x)\leq g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\leq\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

8. Αν $f(x)\leq g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και $f,g$ όχι παντού ίσες στο $[\alpha,\beta]$ τότε

   $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx<\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$.

9. Αν $m\leq f(x)\leq M$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ τότε

   $m(\beta-\alpha)\leq\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\leq M(\beta-\alpha)$.

10. Για κάθε $\gamma,\delta,\eta\in[\alpha,\beta]$ ισχύει $\int_{\gamma}^{\delta} f(x)dx=\int_{\gamma}^{\eta} f(x)dx+\int_{\eta}^{\delta} f(x)dx$

11. Έστω ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$. Ισχύει ότι

    $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha+\beta-x)dx$

12. Έστω ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f:[-\alpha,\alpha]\to\mathbb{R}$.

    - Αν $f$ άρτια , τότε $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 2\int_{0}^{\alpha} f(x)dx$
    - Αν $f$ περιττή , τότε $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$

**<u>Παραδείγματα:</u>**

**1.** $I_1 = \int_0^1 \left(x^3 + 6x^2 + x + 3\right)dx = \left[\frac{x^4}{4} + 2x^3 + \frac{x^2}{2} + 3x\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{4} + 2 + \frac{1}{2} + 3 = \frac{23}{4}$

**2.** $I_2 = \int_0^1 \left(x^2 e^x + 2xe^x\right)dx = \int_0^1 \left(x^2 e^x\right)' dx = \left[x^2 e^x\right]_{x=0}^{x=1} = e$

**3.** $I_3 = \int_0^1 (2x+3)^{10} dx = \left[\frac{1}{2}\frac{(2x+3)^{11}}{11}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{5^{11}}{22} - \frac{3^{11}}{22} = \frac{5^{11} - 3^{11}}{22}$

**4.** $I_4 = \int_1^4 \frac{x}{x+\sqrt{x}} dx$

Θέτουμε $u = \sqrt{x} \Rightarrow x = u^2$, οπότε $dx = 2udu$.

Για $x = 1$ είναι $u = \sqrt{1} = 1$ και για $x = 4$ είναι $u = \sqrt{4} = 2$.

Επομένως

$$I_4 = \int_1^4 \frac{x}{x+\sqrt{x}} dx = \int_1^2 \frac{u^2}{u^2+u} 2udu = 2\int_1^2 \frac{u^2}{u+1} du \Rightarrow$$

$$I_4 = 2\int_1^2 \frac{u^2 - 1 + 1}{u+1} du = 2\int_1^2 \left[\frac{(u-1)(u+1)}{u+1} + \frac{1}{u+1}\right] du = 2\int_1^2 \left[(u-1) + \frac{1}{u+1}\right] du \Rightarrow$$

$$I_4 = 2\left[\frac{u^2}{2} - u + \ln(u+1)\right]_{u=1}^{u=2} = 1 + 2\ln\frac{3}{2}$$

**5.** $I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(-\frac{\cos^3 x}{3}\right)' dx = \left[-\frac{\cos^3 x}{3}\right]_{x=0}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{24} + \frac{1}{3} = \frac{7}{24}$

**6.** $I_6 = \int_0^1 \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx$

Θέτουμε $u = e^x \Rightarrow x = \ln u$, οπότε $dx = \frac{1}{u} du$.

Για $x = 0$ είναι $u = e^0 = 1$ και για $x = 1$ είναι $u = e$.

Επομένως

$$I_6 = \int_0^1 \frac{e^x - 1}{e^x + 1}dx = \int_1^e \frac{u-1}{u+1}\frac{1}{u}du = \int_1^e \frac{u-1}{u^2+u}du$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $I_6 = \int_1^e \frac{u-1}{u^2+u}du$ έχουμε:

$\frac{u-1}{u^2+u} = \frac{u-1}{u(u+1)}$. Αναζητάμε αριθμούς A,B τέτοιους ώστε $\frac{u-1}{u(u+1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u+1}$

για κάθε $x \neq \pm 1$. Εδώ $A = -1$ και $B = 2$. Επομένως

$\frac{u-1}{u(u+1)} = -\frac{1}{u} + \frac{2}{u+1}$. Έτσι έχουμε

$$I_6 = \int_1^e \frac{u-1}{u^2+u}du = \int_1^e \left[-\frac{1}{u} + \frac{2}{u+1}\right]du = \left[-\ln u + 2\ln(u+1)\right]_{u=1}^{u=e} = -1 + 2\ln\left(\frac{e+1}{2}\right).$$

**7.** $I_7 = \int_0^\pi e^x cosx dx$

Για τον υπολογισμό ολοκληρώματος θα εφαρμόσουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες.

Έχουμε:

$$I_7 = \int_0^\pi e^x \cos x dx \Rightarrow$$
$$I_7 = \int_0^\pi (e^x)' \cos x dx \Rightarrow$$
$$I_7 = \left[e^x \cos x\right]_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^\pi e^x (\cos x)' dx \Rightarrow$$
$$I_7 = -1 - e^\pi + \int_0^\pi e^x \sin x dx \Rightarrow$$
$$I_7 = -1 - e^\pi + \int_0^\pi (e^x)' \sin x dx \Rightarrow$$
$$I_7 = -1 - e^\pi + \left[e^x \sin x\right]_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^\pi e^x \cos x dx \Rightarrow$$
$$I_7 = -1 - e^\pi - I_7 \Rightarrow$$
$$2I_7 = \quad - e^\pi \Rightarrow$$
$$I_7 = \frac{-1 - e^\pi}{2}$$

**8.** $I_8 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos x \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx$

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \cos x \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

$$f(-x) = \cos(-x)\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \cos x \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1} = -\cos x \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -f(x)$$

Επομένως η συνάρτηση είναι περιττή. Άρα

$$I_8 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos x \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx = 0$$

**9.** $I_9 = \int_{-1}^{1} \sin\left(\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)\right) dx$

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \sin\left(\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)\right)$, $x \in [-1,1]$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in [-1,1]$

$$f(-x) = \sin\left(\ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)\right) = \sin\left(\ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)\right) = \sin\left(\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{-1}\right) =$$
$$= \sin\left(-\ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)\right) = -\sin\left(\ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)\right) = -f(x)$$

Επομένως η συνάρτηση είναι περιττή. Άρα

$$I_9 = \int_{-1}^{1} \sin\left(\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)\right) dx = 0$$

**10.** $I_{10} = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

Το ολοκλήρωμα αυτό θα βρεθεί με την βοήθεια του μετασχηματισμού $u = \alpha + \beta - x$

Θέτουμε $u = 0 + \pi - x = \pi - x$. Δηλαδή είναι $x = \pi - u$, οπότε $dx = -du$. Για $x = 0$ είναι $u = \pi$ και για $x = \pi$ είναι $u = 0$. Επομένως,

$$I_{10} = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \int_{\pi}^{0} \frac{(\pi-u)\sin(\pi-u)}{1+\cos^2(\pi-u)}(-du) \Rightarrow$$

$$I_{10} = \int_0^{\pi} \frac{(\pi-u)\sin u}{1+\cos^2 u}du \Rightarrow$$

$$I_{10} = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{1+\cos^2 u}du - \int_0^{\pi} \frac{u\sin u}{1+\cos^2 u}du \Rightarrow$$

$$I_{10} = \pi\left[-\arctan(\cos u)\right]_{u=0}^{u=\pi} - I_{10} \Rightarrow$$

$$2I_{10} = \pi\left(-\arctan(-1) + \arctan(1)\right) \Rightarrow$$

$$2I_{10} = \pi\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow$$

$$I_{10} = \frac{\pi^2}{4}$$

## Ασκήσεις

**1.** Να υπολογίσετε τα παρακάτω ορισμένα ολοκληρώματα.

1. $\int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu^2 x dx$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x dx$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^5 x dx$

4. $\int_o^{\pi} \eta\mu^3 x \sigma\upsilon\nu^2 x dx$

5. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \eta\mu^4 x \sigma\upsilon\nu^5 x dx$

6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu 3x \sigma\upsilon\nu 4x dx$

7. $\int_0^{\pi} 2\sigma\upsilon\nu 4x \sigma\upsilon\nu 5x dx$

8. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2dx}{\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x}$

9. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\phi x dx$

10. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\phi^3 x dx$

11. $\int_1^2 \frac{dx}{x(x-5)+6}$

12. $\int_0^1 \frac{xdx}{x^2-7x+10}$

13. $\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2-4x+4} dx$

14. $\int_0^1 \frac{3x+2}{(4-x)^3} dx$

15. $\int_1^2 \frac{dx}{x^3+x}$

16. $\int_0^1 \frac{x^2-6x+8}{x^2+6x+8}$

17. $\int_1^2 \frac{x^4+2}{x^3+2x} dx$

18. $\int_0^1 x^2 \cdot e^x dx$

19. $\int_0^1 x \cdot e^{-x} dx$

20. $\int_0^1 (6-x) \cdot e^{6x} dx$

21. $\int_0^1 e^x \eta\mu 3x dx$

22. $\int_0^1 \sigma\upsilon\nu 2x \cdot e^{3x} dx$

23. $\int_0^{\pi} x \cdot \sigma\upsilon\nu x dx$

24. $\int_1^e \ln^2 x dx$

25. $\int_0^{\pi} x^2 \eta\mu x dx$

26. $\int_0^1 x \cdot \sigma\upsilon\nu(2x+3) dx$

27. $\int_1^e \sigma\upsilon\nu(\ln x) dx$

28. $\int_0^1 x^2 \cdot 2^x dx$

29. $\int_1^e 4x \ln x dx$

30. $\int_1^e 9x^2 \ln x dx$

**2.** Να υπολογίσετε τα παρακάτω ορισμένα ολοκληρώματα.

1. $\int_0^3 \frac{6xdx}{(x^2+6)^2}$

2. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x+12}+\sqrt[4]{x+12}}{\sqrt[3]{x+12}}dx$

3. $\int_0^2 x^2\sqrt{1+xdx}$

4. $\int_0^2 2x^2\sqrt{x^3+1}dx$

5. $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$

6. $\int_0^1 x^5\sqrt{x^2+4dx}$

7. $\int_0^1 x^2\sqrt[5]{7-4x^3}dx$

8. $\int_0^1 \frac{2xdx}{\sqrt[3]{5-4x^2}}$

9. $\int_0^1 2xe^{x^2}dx$

10. $\int_0^1 e^x(e^x-1)dx$

11. $\int_0^{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{e^{2x}dx}$

12. $\int_{\frac{1}{2}}^1 2x^{-3}\cdot e^{x^{-2}}dx$

13. $\int_0^9 \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

14. $\int_0^1 3e^{3x}\sqrt[3]{e^{ex}-1}dx$

15. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$

16. $\int_1^e \frac{4\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}dx$

17. $\int_0^1 2x\ln(2+x^2)dx$

18. $\int_1^{\pi^2} \frac{\eta\mu\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

19. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\eta\mu x}{2-\sigma\upsilon\nu x}dx$

20. $\int_0^{\frac{\pi}{6\alpha}} \eta\mu(3\alpha x)dx$, $\alpha \neq 0$

21. $\int_{\ln\frac{\pi}{2}}^{\ln\pi} e^x\eta\mu e^x dx$

22. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\eta\mu x}$.

## Εφαρμογές του Ορισμένου Ολοκληρώματος:

## Εμβαδόν Επίπεδου Χωρίου:

- Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ μιας συνεχής συνάρτηση , το εμβαδόν του χωρίου $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[\alpha,\beta], 0\le y\le f(x)\}$ που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ ισούται με $E(D)=\int_\alpha^\beta |f(x)|dx$.
- Έστω $f,g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f,g$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ ισούται με $E(D)=\int_\alpha^\beta |f(x)-g(x)|dx$.

## Μεθοδολογία

- Αν ζητείται το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_f$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ $(\alpha<\beta)$ και η $f$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$ τότε, βρίσκουμε τις ρίζες $x_1,x_2,...,x_k$ της $f$ στο $[\alpha,\beta]$ με $x_1<x_2<...<x_k$ και κατασκευάζουμε πίνακα προσήμων της $f$. Έτσι θα ισχύει:

$$E(\Omega)=\int_\alpha^{x_1}|f(x)|dx+\int_{x_1}^{x_2}|f(x)|dx+...+\int_{x_k}^{\beta}|f(x)|dx$$

- Αν ζητείται το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_f$, τον άξονα $x'x$ και δεν δίνονται οι εξισώσεις των κατακόρυφων ευθειών, τότε το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι:

$$E(\Omega)=\int_{x_1}^{x_2}|f(x)|dx+\int_{x_2}^{x_3}|f(x)|dx+...+\int_{x_{k-1}}^{x_k}|f(x)|dx$$

**<u>Παραδείγματα:</u>**

**1.** Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου $\Omega$ που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f$ με τύπο $f(x) = xe^x$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$.

**<u>Λύση:</u>**

Η f είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων

Επίσης $f(x) = xe^x > 0$ για κάθε $x \in [1,2]$ οπότε το ζητούμενο εμβαδόν θα δίνεται από το $E(\Omega) = \int_1^2 |f(x)| dx = \int_1^2 xe^x dx$.

Άρα

$$E(\Omega) = \int_1^2 |f(x)| dx = \int_1^2 xe^x dx = \left[ xe^x \right]_{x=1}^{x=2} - \int_1^2 e^x dx = 2e^2 - e - \left[ e^x \right]_{x=1}^{x=2} = e^2 \tau.\mu$$

**2.** Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου $\Omega$ που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f$ με τύπο $f(x) = \ln x$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = \frac{1}{e}$.

**<u>Λύση:</u>**

Επειδή μας δίνεται μόνο η μία κατακόρυφη ευθεία, η άλλη προκύπτει από την λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$, δηλαδή $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Επομένως η δεύτερη ευθεία είναι η $x = 1$.

Ισχύει $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \left[ \frac{1}{e}, 1 \right]$, διότι:

Η $f$ είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{e},1\right]$ ως λογαριθμική.

Συνεπώς το ζητούμενο εμβαδόν θα δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$E(\Omega) == \int_{\frac{1}{e}}^{1} |f(x)| dx =$$

$$= \int_{\frac{1}{e}}^{1} -xlnxdx = \int_{\frac{1}{e}}^{1} (-x)' lnxdx = [-xlnx]_{\frac{1}{e}}^{1} - \int_{\frac{1}{e}}^{1} -x(lnx)' dx = [-xlnx]_{\frac{1}{e}}^{1} - \int_{\frac{1}{e}}^{1} -x(lnx)' dx =$$

$$= [-xlnx]_{\frac{1}{e}}^{1} + \int_{\frac{1}{e}}^{1} 1dx = -\frac{1}{e} + 1 - \frac{1}{e} = \left(1 - \frac{2}{e}\right) \tau\mu$$

**3.** Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου $\Omega$ που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f$ με τύπο $f(x) = -x^2 + x + 2$ και τον άξονα $x'x$.

**<u>Λύση:</u>**

Οι εξισώσεις των δύο κατακόρυφων ευθειών θα δίνονται από τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 2$

Το πρόσημο της $f$ φαίνεται στον πίνακα:

| x | -∞ | | -1 | | 2 | | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f (x) | | - | 0 | + | 0 | - | |

Η $f$ είναι συνεχής στο $[-1,2]$ ως πολυωνυμική και $f(x) \geq 0$ στο $[-1,2]$.

Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν θα δίνεται από το ολοκλήρωμα.

$$E(\Omega)=\int_{-1}^{2}|f(x)|dx=\int_{-1}^{2}\left(-x^2+x+2\right)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{x=-1}^{2}=\frac{9}{2}\tau.\mu$$

**4.** Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου $\Omega$ που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f$ με τύπο $f(x)=x^3+x^2-2x$ και τον άξονα $x'x$.

<u>**Λύση:**</u>

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x^3+x^2-2x=0 \Leftrightarrow x=-2 \text{ ή } x=0 \text{ ή } x=1$$

Το πρόσημο της $f$ φαίνεται στον πίνακα:

| x | -∞ | | -2 | | 0 | | 1 | | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + | |

Η $f$ είναι συνεχής στο $[-2,1]$ ως πολυωνυμική.

Το ζητούμενο εμβαδόν θα δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$E(\Omega)=\int_{-2}^{1}|f(x)|dx\ .$$

Επομένως

$$E(\Omega)=\int_{-2}^{1}|f(x)|dx=\int_{-2}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{1}-f(x)\,dx=$$
$$=\int_{-2}^{0}\left(x^3+x^2-2x\right)dx+\int_{0}^{1}\left(-x^3-x^2+2x\right)dx=\frac{37}{12}\tau.\mu$$

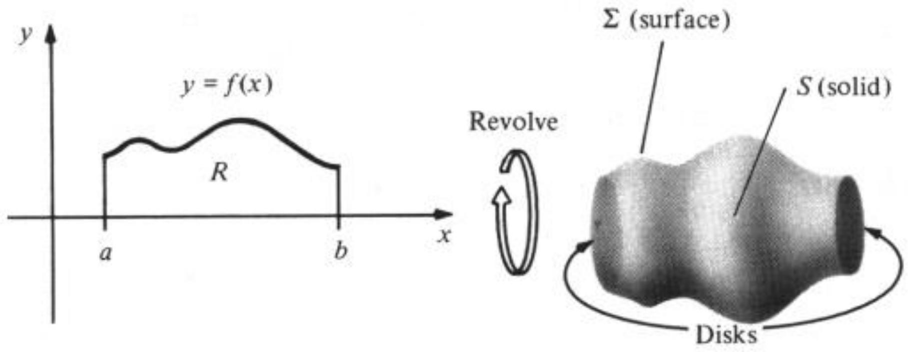
## Ασκήσεις:

1. Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από την καμπύλη $y = 4x(x-1)(x-2)$ και τον άξονα $x'x$
2. Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας που ορίζουν η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x - 2$ ο άξονας $x'x$ και οι ευθείες $x = -2$ και $x = 3$
3. Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από την καμπύλη $y = \ln x$ και τις ευθείες $x = 0, y = 0, y = 1$.
4. Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από τις καμπύλες με εξισώσεις $y = \sin x, y = e^x, x = 0, x = \pi$ .
5. Να βρεθεί το εμβαδόν του επίπεδου τμήματος που ορίζεται μεταξύ της καμπύλης $y^2 = \dfrac{x^2}{1-x^2}$ και των ευθειών $x = -\dfrac{1}{2}$ και $x = \dfrac{1}{2}$.

## Όγκος Στερεού εκ Περιστροφής

Θεωρούμε συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής και μη αρνητική. Έστω $D$ το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη $c$ που είναι η γραφική παράσταση της $f$, τον άξινα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$. Ο όγκος του στερεού που παράγεται από την περιστροφή του $D$ γύρω από τον άξονα $x'x$ δίνεται από τον τύπο

$$V=\pi\int_{\alpha}^{\beta}\left[f(x)\right]^{2}dx.$$




---

## Παραδείγματα:

**1.** Το χωρίο μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y=\dfrac{\sqrt{\arcsin x}}{x}$ και των ευθειών $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ και $x=1$. Περιστρέφεται γύρω από τον άξονα $x'x$. Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που παράγεται.

**<u>Λύση:</u>**

Ο όγκος του στερεού που παράγεται δίνεται από την σχέση $V=\pi\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} y^2dx$

$$V=\pi\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} y^2dx=\pi\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}\frac{\arcsin x}{x^2}dx=\pi\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}\left(-\frac{1}{x}\right)'\arcsin x dx=$$
$$=-\pi\arcsin 1+\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\pi\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx=$$
$$=-\frac{\pi^2}{2}+\frac{2\pi^2}{3\sqrt{3}}+\pi\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα $I=\pi\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx=\pi\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}\frac{x}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx$.

Με την βοήθεια της αντικατάστασης. $u=\sqrt{1-x^2}$ . Άρα $\begin{aligned} u^2&=1-x^2\\ x^2&=1-u^2\\ dx&=-2du\end{aligned}$

Τελικά προκύπτει ότι $V=\pi^2\left(\frac{2\sqrt{3}}{9}-\frac{1}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\ln 3$.

**2.** Να βρεθεί ο όγκος της σφαίρας ακτίνας $R$ .

**<u>Λύση:</u>**

Η σφαίρα μπορεί να προκύψει από την περιστροφή του κύκλου $x^2+y^2=R^2,\ x\in[-R,R]$ γύρω από τον άξονα $x'x$ . Οπότε ο όγκος του είναι

$$V=\pi\int_{-R}^{R} y^2dx=\pi\int_{-R}^{R}\left(R^2-x^2\right)dx=\pi\left[R^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R}=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

## <u>Ασκήσεις:</u>

**1.** Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που γεννάται από την περιστροφή της κλειστής καμπύλης με εξίσωση $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ περί τον άξονα $x'x$.

**2.** Το χωρίο μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y=\frac{r}{h}x$ και των ευθειών $x=0$ και $x=h$ περιστρέφεται γύρω από τον άξονα $x'x$. Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που παράγεται. Τι είδους στερεό παράγεται;

**Βιβλιογραφία:**

1. Θ. Ρασσιάς. Μαθηματική Ανάλυση Ι , Τεύχος Β Εκδόσεις Σαββάλας
2. Σ. Τουμπής, Σ. Γκιτζένης Λογισμός Συναρτήσεων μιας Μεταβλητής. Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και βοηθήματα. HEALINK www.kallipos.gr
3. Tom M. Apostol One-Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra. Volume I. John Wiley & Sons
4. R.L. Finney, M.D. Weir, F.R. Giordano, Thomas Απειροστικός Λογισμός Τόμος Ι. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης (2012)