ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: Ε. ΠΑΠΑΓΕΩΡΓΙΟΥ, Δ. ΚΟΥΛΟΥΜΠΟΥ

Η Έννοια της Ακολουθίας

- Οι ακολουθίες αποτελούν ειδική περίπτωση συναρτήσεων.
- Χρησιμοποιούνται σε προβλήματα διακριτοποίησης, τα οποία βρίσκουν πολλές εφαρμογές στους Γραμμικούς Μετασχηματισμούς, στα Σήματα και Συστήματα, στην Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων, στις Τηλεπικοινωνίες, στην Πολυπλοκότητα Αλγορίθμων, στη Θεωρία Ουρών κ.ά.,

Η Έννοια της Ακολουθίας

Για τα επόμενα υπενθυμίζουμε τα σύνολα των φυσικών αριθμών

$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4, \dots\}$ και $\mathbb{N}^* = \{1,2,3,4, \dots\}$.

Η Έννοια της Ακολουθίας

Ορισμός:

Ακολουθία (sequence) πραγματικών αριθμών ονομάζεται μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}^* = \{1,2,3,4, \dots.\}$ και πεδίο τιμών το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Η Έννοια της Ακολουθίας

Παρατήρηση:

Μερικές φορές θεωρούμε και ακολουθίες με πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο των φυσικών αριθμών.

Η Έννοια της Ακολουθίας

<u>Συμβολισμός:</u>

Συμβολίζουμε την ακολουθία με

$$\alpha : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R} \text{ ή } (\alpha_n)_{n \epsilon \mathbb{N}^*}$$

$$\text{ή } \alpha_n,\ n = 1,2,3, \dots \text{ ή } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots .$$

Η Έννοια της Ακολουθίας

- Η ακολουθία ως συνάρτηση σημειώνεται $\alpha: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ η οποία έχει

  - ανεξάρτητη μεταβλητή την n και
  - εξαρτημένη μεταβλητή (εικόνα του στοιχείου $n \epsilon \mathbb{N}^*$) την $\alpha(n) = \alpha_n$.

Η Έννοια της Ακολουθίας

- Ο πραγματικός αριθμός α_n ονομάζεται n –οστός όρος της ακολουθίας, ενώ όταν αναφέρεται στον τύπο της ακολουθίας ονομάζεται γενικός όρος της ή γενικός τύπος αυτής.
- Σε μερικές περιπτώσεις η ακολουθία μπορεί να έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,\ldots.\}$ οπότε ορίζεται και ο μηδενικός όρος της ακολουθίας α_0.

Η Έννοια της Ακολουθίας

- **Σύνολο Τιμών:** Από τον ορισμό και τον παραπάνω συμβολισμό είναι φανερό ότι το σύνολο τιμών της ακολουθίας $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ είναι το σύνολο, που έχει στοιχεία τους όρους της ακολουθίας, δηλαδή, το σύνολο $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\}$ το οποίο είναι πεπερασμένο ή μη πεπερασμένο και αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Η Έννοια της Ακολουθίας

- **Γραφική Παράσταση:** Επειδή το πεδίο ορισμού της ακολουθίας είναι οι φυσικοί αριθμοί και σύνολο τιμών κάποιο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της ακολουθίας είναι διακριτά σημεία στο δεξιό ημιεπίπεδο.

Παράδειγμα 1

Η συνάρτηση $\alpha\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ με $\alpha(n) = 2n - 1$ για κάθε $n \epsilon \mathbb{N}^*$ είναι η ακολουθία με γενικό τύπο $\alpha_n = 2n - 1$ την οποία συμβολίζουμε
με την αναγραφή ορισμένων πρώτων όρων και του γενικού όρου της ως συνάρτηση του n ως εξής

$$1,3,5, \dots, 2n-1, \dots$$

Το σύνολο τιμών της ακολουθίας είναι το σύνολο των περιττών αριθμών (μη πεπερασμένο αριθμήσιμο σύνολο).

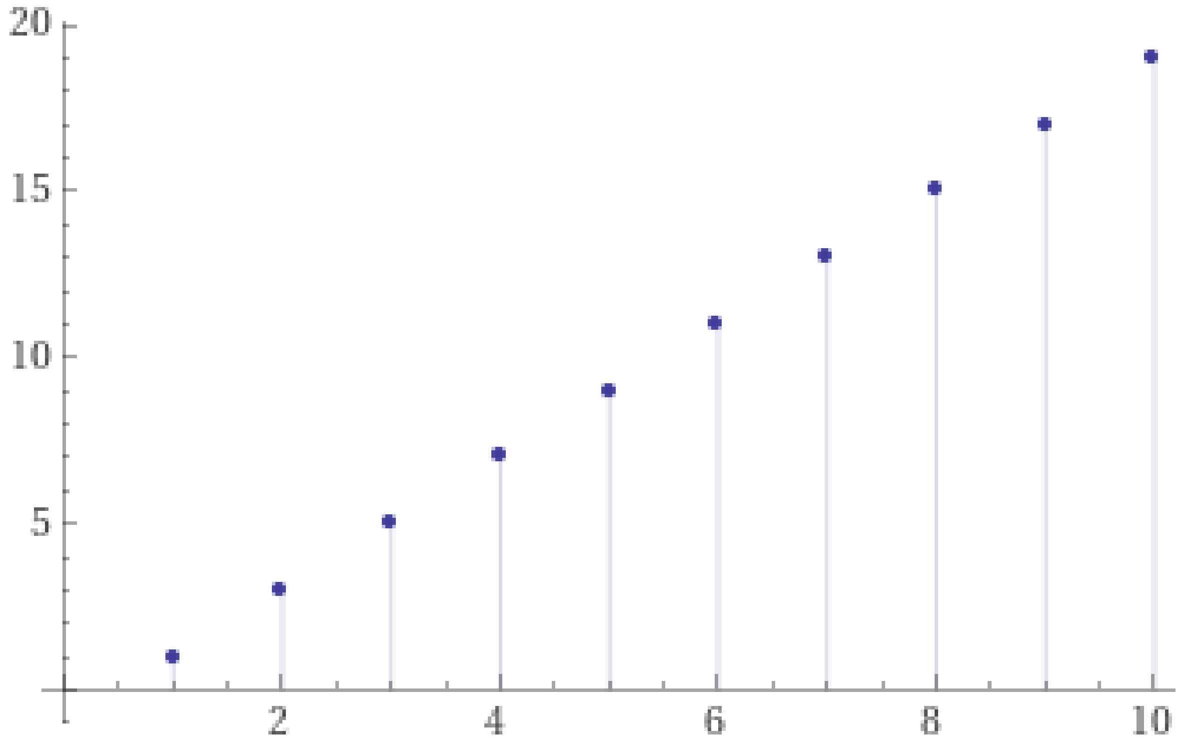
Παράδειγμα 1

Παρακάτω βλέπουμε την γραφική παράσταση της ακολουθίας $\alpha_n = 2n - 1$.

Σημείωση: Για γραφικές παραστάσεις ακολουθιών online μπορείτε να επισκεφτείτε τον σύνδεσμο

https://www.wolframalpha.com/widgets/view.jsp?id=a5dd2a74fb266e82a4bf229eb38c5409

Παράδειγμα 1



Παράδειγμα 2

- Η συνάρτηση $\alpha: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ με $\alpha(n) = (-1)^n$ για κάθε $n \epsilon \mathbb{N}^*$ είναι η ακολουθία

με γενικό τύπο $\alpha_n = (-1)^n$ την οποία συμβολίζουμε με την αναγραφή ορισμένων πρώτων όρων και του γενικού όρου της ως συνάρτηση του n ως εξής

$$-1, 1, -1, \ldots, (-1)^n, \ldots$$

- Το σύνολο τιμών της ακολουθίας είναι το σύνολο $\{-1, 1\}$ (πεπερασμένο σύνολο).

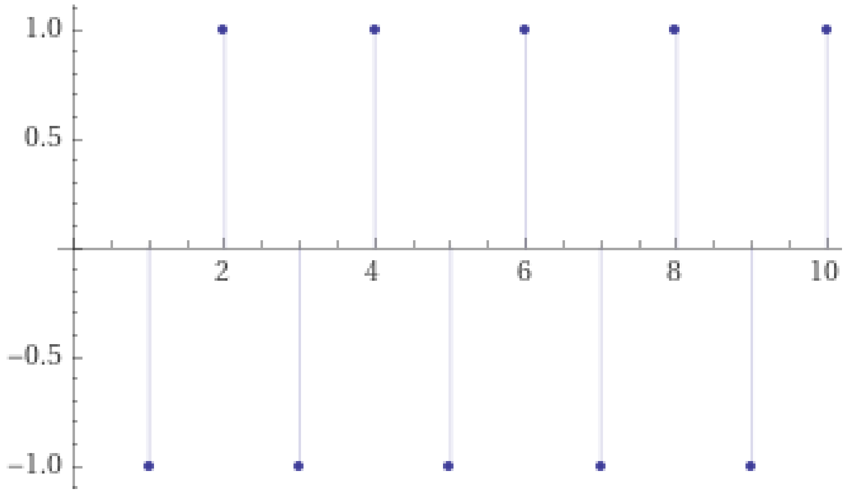
Παράδειγμα $\mathbf{2}$

Παρακάτω βλέπουμε την γραφική παράσταση της ακολουθίας $\alpha_n = (-1)^n$.

Παράδειγμα 2

discrete plot	$(-1)^n$	$n = 1$ to 10

Plot:



Παράδειγμα 3

Η συνάρτηση $\alpha: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ με $\alpha(n) = \frac{1}{n(n+1)}$ για κάθε $n \epsilon \mathbb{N}^*$ είναι η ακολουθία με γενικό τύπο $\alpha_n = \frac{1}{n(n+1)}$ την οποία συμβολίζουμε
με την αναγραφή ορισμένων πρώτων όρων και του γενικού όρου της ως συνάρτηση του n ως εξής

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 4}, \cdots, \frac{1}{n(n+1)}, \cdots$$

Παράδειγμα 3

Το σύνολο τιμών της ακολουθίας είναι το σύνολο

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{3\cdot 4}, \dots, \frac{1}{n(n+1)}, \dots\right\}$$

(μη πεπερασμένο αριθμήσιμο σύνολο) .

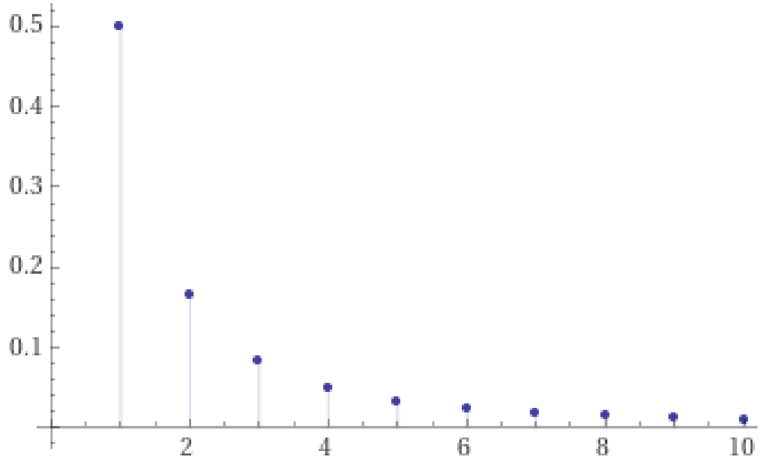
Παράδειγμα 3

Παρακάτω βλέπουμε την γραφική παράσταση της ακολουθίας $\alpha_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

Παράδειγμα 3

discrete plot	$\frac{1}{n\,(n+1)}$	$n = 1$ to 10

Plot:



Παράδειγμα 4

Δίνεται ο πρώτος όρος μιας ακολουθίας, $\alpha_1 = 1$ $\alpha: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα κάθε άλλος όρος να δίνεται από τον **αναδρομικό τύπο** (recursive formula)

$\alpha_{n+1} = 3a_n + 2n$, για κάθε $n \epsilon \mathbb{N}^*$.

Οι πέντε πρώτοι όροι της ακολουθίας είναι

$1,5,19,63,197.$

Παράδειγμα 5

Δίνονται οι δύο πρώτοι όροι μιας ακολουθίας,

$$\alpha: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}\ \alpha_1 = \alpha_2 = 1$$

με την ιδιότητα κάθε άλλος όρος να δίνεται από τον αναδρομικό τύπο (recursive formula)

$$\alpha_{n+1} = a_n + \alpha_{n-1}$$

για κάθε $n \epsilon \mathbb{N}^*\ \mu\varepsilon\ n \geq 2.$

Παράδειγμα 5

Οι δέκα πρώτοι όροι της ακολουθίας είναι

$$1,1,2,3,5,8.13,21,34,55$$

Η ακολουθία είναι γνωστή και ως **ακολουθία Fibonacci.**

Ιστορικό Σημείωμα

Η Ακολουθία Φιμπονάτσι εμφανίζεται στα Μαθηματικά των Ινδών και συγκεκριμένα σε Σανσκριτικές Προσωδίες.

Στην Σανσκριτική προφορική παράδοση, δίνονταν μεγάλη έμφαση κατά πόσο οι μακρόσυρτες συλλαβές (M) συνέπιπταν με τις σύντομες (Σ), και μετρούσαν τα διαφορετικά πρότυπα των M και των Σ μέσα σε ένα προκαθορισμένο διάστημα, κάτι που οδήγησε στους αριθμούς Φιμπονάτσι.

Ιστορικό Σημείωμα

Ο αριθμός των προτύπων που γίνονται m σύντομες συλλαβές μακρόσυρτες είναι ο αριθμός Φιμπονάτσι F_{m+1}.

Η ανάπτυξη τη ακολουθίας αποδίδεται στον Πινγκάλα $(200\ \pi.\mathrm{X}.)$, αλλά η πρώτη ξεκάθαρη αναφορά στην ακολουθία γίνεται στα έργα του Βιραχάνκα $(700\ \mu.\mathrm{X}.)$, τα έργα του οποίου δε σώζονται, αλλά μεταφέρθηκαν αυτούσια στα στα έργα του Γκοπάλα $(1153\ \mu.\mathrm{X}.)$.

Ιστορικό Σημείωμα

Στη Δύση, οι αριθμοί Φιμπονάτσι εμφανίζονται για πρώτη φορά στο βιβλίο Liber Abaci (1202) του Λεονάρντο της Πίζας γνωστού και ως Φιμπονάτσι.

Ο Φιμπονάτσι παίρνει ως δεδομένο ένα ιδανικό πληθυσμό κουνελιών και κάνει τις εξής υποθέσεις:

Ιστορικό Σημείωμα

Έχουμε ένα νεογέννητο ζευγάρι κουνελιών (αρσενικό και θηλυκό) σε ένα χωράφι, τα κουνέλια είναι σε θέση να ζευγαρώσουν σε ηλικία ενός μήνα από τη γέννησή τους, έτσι ώστε στο τέλος του δεύτερου μήνα το θηλυκό να μπορεί να γεννήσει ένα ζευγάρι κουνελιών, τα κουνέλια δε πεθαίνουν ποτέ και κάθε ζευγάρι κουνελιών γεννάει ένα νέο ζευγάρι (ένα αρσενικό και ένα θηλυκό) κάθε μήνα από τον δεύτερο μήνα και μετά.

Το ερώτημα που έθεσε ο Φιμπονάτσι ήταν: πόσα ζεύγη κουνελιών θα έχουν γεννηθεί μέσα σε ένα έτος;

Ιστορικό Σημείωμα

Στο τέλος του πρώτου μήνα, ζευγαρώνουν, αλλά ακόμη υπάρχει μόνο ένα ζεύγος.

Στο τέλος του δεύτερου μήνα το θηλυκό γεννάει ένα νέο ζεύγος, οπότε στο χωράφι υπάρχουν δύο ζεύγη κουνελιών.

Στο τέλος του τρίτου μήνα, το πρώτο θηλυκό γεννάει και δεύτερο ζεύγος, οπότε έχουμε τρία ζεύγη κουνελιών.

Στο τέλος του τέταρτου μήνα, το πρώτο θηλυκό γεννάει ακόμη ένα ζεύγος, το θηλυκό που γεννήθηκε δύο μήνες πριν γεννάει το πρώτο της ζεύγος, οπότε έχουμε πέντε ζεύγη κουνελιών στο χωράφι.

Ιστορικό Σημείωμα

Στο τέλος του νιοστού μήνα, το πλήθος των ζευγών των κουνελιών είναι ίσος με το πλήθος των νέων ζεύγων $(n-2)$ προσθέτοντας το πλήθος ζεύγων που υπήρχαν στο χωράφι τον προηγούμενο μήνα $(n-1)$.

Αυτός είναι ο νιοστός αριθμός Φιμπονάτσι.

Ιστορικό Σημείωμα

Ο Λεονάρντο της Πίζας ή Φιμπονάτσι έζησε κοντά στην πόλη της Μπεζάια, η οποία αποτελούσε ένα σημαντικό εξαγωγέα κεριού την εποχή του Φιμπονάτσι (από εκεί προέρχεται και η γαλλική εκδοχή του ονόματος της πόλης αυτής, “μπουζί" (bougie), που σημαίνει" κερί "στα γαλλικά).

Ιστορικό Σημείωμα

Μια πρόσφατη μαθηματικο-ιστορική ανάλυση της περιόδου και της περιοχής στην οποία έζησε ο Φιμπονάτσι προτείνει ότι στην πραγματικότητα οι μελισσοκόμοι της Μπεζάια και οι γνώσεις τους σχετικά με την αναπαραγωγή των μελισσών αποτέλεσαν την πηγή έμπνευσης της ακολουθίας Φιμπονάτσι και όχι το ευρύτερα ίσως γνωστό μοντέλο της αναπαραγωγής κουνελιών.

Ο όρος «Ακολουθία Φιμπονάτσι» χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά τον $19o$ αιώνα από τον Γάλλο μαθηματικό Εδουάρδο Λούκας.

Η Έννοια της Ακολουθίας

Σχόλιο:

Από τα προηγούμενα παραδείγματα προκύπτει ότι μια ακολουθία είναι δυνατόν να καθοριστεί αν γνωρίζουμε τον γενικό της τύπο ή γενικό όρο ή έναν αναδρομικό τύπο και τις τιμές ενός επαρκούς πλήθους πρώτων όρων της.

Η Έννοια της Ακολουθίας

Είναι επίσης φανερό ότι ένα πεπερασμένο πλήθος πρώτων όρων μιας ακολουθίας δεν την ορίζει. Για παράδειγμα υπάρχουν άπειρες ακολουθίες οι οποίες έχουν ως πέντε πρώτους όρους τους αριθμούς $2,4,6,8,10$.

Τρεις από αυτές είναι οι εξής:

Η Έννοια της Ακολουθίας

$$\alpha_n = 2n$$

$$\beta_n = 2n + (n-1)(n-2)\,(n-3)\,(n-4)\,(n-5)$$

$$\gamma_n = \begin{cases} 2n, & n \leq 5 \\ n^2, & n > 5 \end{cases}$$

Ισότητα και Πράξεις Ακολουθιών

- **<u>Ισότητα Ακολουθιών:</u>**

Δύο ακολουθίες $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$, $(\beta_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ ονομάζονται ίσες αν ισχύει $\alpha_n = \beta_n$ για κάθε $n\epsilon\mathbb{N}^*$

- **<u>Πράξεις Ακολουθιών</u>**

Οι πράξεις άθροισμα, διαφορά, γινόμενο, γινόμενο επί αριθμό και πηλίκο μεταξύ ακολουθιών, ορίζονται όπως ορίστηκαν και οι αντίστοιχες πράξεις μεταξύ δύο συναρτήσεων.

Φραγμένες Ακολουθίες

- **Άνω Φραγμένη Ακολουθία:**

Μια ακολουθία $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ λέγεται **φραγμένη προς τα άνω (bounded from above)**, όταν και μόνο όταν υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός M τέτοιος ώστε $a_n \leq M$ για κάθε $n\epsilon\mathbb{N}^*$.

Στην περίπτωση αυτή ο αριθμός M και κάθε αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του M ονομάζεται **άνω φράγμα (upper bound)** της ακολουθίας $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$

Φραγμένες Ακολουθίες

- **Κάτω Φραγμένη Ακολουθία:**

Μια ακολουθία $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ λέγεται λέγεται **φραγμένη προς τα κάτω (bounded from below)**, όταν και μόνο όταν υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός m τέτοιος ώστε $a_n \geq m$ για κάθε $n\epsilon\mathbb{N}^*$.

Στην περίπτωση αυτή ο αριθμός m και κάθε αριθμός μικρότερος ή ίσος του m ονομάζεται **κάτω φράγμα (lower bound)** της ακολουθίας $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$.

Φραγμένες Ακολουθίες

- **Φραγμένη Ακολουθία:**

Μια ακολουθία $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ λέγεται φραγμένη (bounded), όταν και μόνο όταν είναι άνω και κάτω φραγμένη.

- **Απολύτως Φραγμένη Ακολουθία:**

Μια ακολουθία $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ λέγεται απολύτως φραγμένη (absolutely bounded), όταν και μόνο όταν υπάρχει ένας μη αρνητικός αριθμός M τέτοιος ώστε $|\alpha_n| \leq M$για κάθε $n\epsilon\mathbb{N}^*$.

Φραγμένες Ακολουθίες

- **<u>Θεώρημα</u>**:

Μια ακολουθία $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ είναι φραγμένη όταν και μόνο όταν είναι απολύτως φραγμένη.

Επομένως οι έννοιες φραγμένη και απολύτως φραγμένη είναι ισοδύναμες.

Μονότονες Ακολουθίες

- Μια ακολουθία $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ είναι **αύξουσα (increasing)** ,όταν και μόνο όταν

$$a_n \leq a_{n+1} \text{ για κάθε } n\epsilon\mathbb{N}^*$$

- Μια ακολουθία $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ είναι **γνησίως αύξουσα (strictly increasing)** ,όταν και μόνο όταν

$$a_n < a_{n+1} \text{ για κάθε } n\epsilon\mathbb{N}^*$$

Μονότονες Ακολουθίες

- Μια ακολουθία $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ είναι **φθίνουσα (decreasing)** ,όταν και μόνο όταν

$$a_n \geq a_{n+1} \text{ για κάθε } n\epsilon\mathbb{N}^*$$

- Μια ακολουθία $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ είναι **γνησίως φθίνουσα (strictly decreasing)** ,όταν και μόνο όταν

$$a_n > a_{n+1} \text{ για κάθε } n\epsilon\mathbb{N}^*$$

Μονότονες Ακολουθίες

- Κάθε αύξουσα ή φθίνουσα ακολουθία ονομάζεται **μονότονη ακολουθία (monotonic sequence).**

Μονότονες Ακολουθίες

- Κάθε γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα ακολουθία ονομάζεται **γνησίως μονότονη ακολουθία (strictly monotonic aequence)**
- Μια ακολουθία $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ λέγεται **σταθερή** αν και μόνο αν

$$a_n = c \ \text{ για κάθε } n\epsilon\mathbb{N}^*$$

(είναι ταυτόχρονα αύξουσα και φθίνουσα).

Μονότονες Ακολουθίες

Ισχύουν τα παρακάτω:

- Η ακολουθία $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ είναι αύξουσα αν και μόνο αν για κάθε $\mathrm{m}, n\epsilon\mathbb{N}^*$ με $m < n$ ισχύει

$a_m \leq a_n$.

- Η ακολουθία $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ είναι γνησίως αύξουσα αν και μόνο αν για κάθε $\mathrm{m}, n\epsilon\mathbb{N}^*$ με $m < n$ ισχύει

$a_m < a_n$.

Μονότονες Ακολουθίες

- Η ακολουθία $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ είναι φθίνουσα αν και μόνο αν για κάθε $\mathrm{m}, n\epsilon\mathbb{N}^*$ με $m < n$ ισχύει

$a_m \geq a_n$.

- Η ακολουθία $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ είναι γνησίως φθίνουσα αν και μόνο αν για κάθε $\mathrm{m}, n\epsilon\mathbb{N}^*$ με $m < n$ ισχύει

$a_m > a_n$.

Άσκηση 1

Να δειχθεί ότι η ακολουθία $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ με $\alpha_n = \frac{n}{3^n}$ $n\epsilon\mathbb{N}^*$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Λύση:

Για να βρούμε την μονοτονία μιας ακολουθίας $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ αρκεί να συγκρίνουμε τους διαδοχικούς όρους a_n $και$ a_{n+1} $για$ τυχόν $n\epsilon\mathbb{N}^*$.

Για το λόγο αυτό θα υπολογίσουμε την διαφορά $a_{n+1} - a_n$

Άσκηση 1

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{3^{n+1}} - \frac{n}{3^n}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{3 \cdot 3^n} - \frac{n}{3^n}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1-3n}{3 \cdot 3^n}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1-2n}{3^{n+1}} < 0$$

Άσκηση 1

Δηλαδή, $a_{n+1} - a_n < 0$

$$\text{για κάθε } n \epsilon \mathbb{N}^*$$

Άρα $a_{n+1} < a_n$ για κάθε $n \epsilon \mathbb{N}^*$.

Άρα η ακολουθία $(\alpha_n)_{n \epsilon \mathbb{N}^*}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Άσκηση 2

Να εξετάσετε ως προς την μονοτονία την ακολουθία $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ με

$$\alpha_n = \frac{2^n}{n!} \ n\epsilon\mathbb{N}^*$$

Λύση:

Θα συγκρίνουμε τους διαδοχικούς όρους a_n $\kappa\alpha\iota$ a_{n+1} $\gamma\iota\alpha$ τυχόν $n\epsilon\mathbb{N}^*$.

Για το λόγο αυτό θα υπολογίσουμε την διαφορά $a_{n+1} - a_n$.

Άσκηση 2

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{2^n}{n!}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2^{n+1}}{n!\,(n+1)} - \frac{2^n}{n!}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2 \cdot 2^n - (n+1)2^n}{n!\,(n+1)}$$

Άσκηση 2

Δηλαδή,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2^n}{(\boldsymbol{n} + \mathbf{1})!}(\mathbf{1} - \boldsymbol{n}) \leq \mathbf{0} \text{ για κάθε } n \epsilon \mathbb{N}^*$$

Άρα $a_{n+1} \leq a_n$ για κάθε $n\epsilon\mathbb{N}^*$.

Άρα η ακολουθία $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ είναι φθίνουσα.

Άσκηση 3

Να εξετάσετε ως προς την μονοτονία την ακολουθία $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ με

$$\alpha_n = n^2 + (n+3)^2 \quad n\epsilon\mathbb{N}^*$$

<u>Λύση:</u>

Θα συγκρίνουμε τους διαδοχικούς όρους a_n $και$ a_{n+1} $για$ τυχόν $n\epsilon\mathbb{N}^*$.

Για το λόγο αυτό θα υπολογίσουμε την διαφορά $a_{n+1} - a_n$

Άσκηση 3

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 + (n+4)^2 - n^2 - (n+3)^2$$

$$a_{n+1} - a_n$$
$$= n^2 + 2n + 1 + n^2 + 8n + 16 - n^2 - n^2 - 6n - 9$$

$$a_{n+1} - a_n = 4\text{n} + 8 > 0 \text{ για κάθε } n\epsilon\mathbb{N}^*$$

Άρα $a_{n+1} > a_n$ για κάθε $n\epsilon\mathbb{N}^*$.

Άρα η ακολουθία $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ είναι γνησίως αύξουσα.

Άσκηση 4

Να εξετάσετε ως προς την μονοτονία την ακολουθία $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ με

$$\alpha_n = \frac{4^n}{n^2},\ n\epsilon\mathbb{N}^*$$

Άσκηση 4

Λύση:

Θα συγκρίνουμε τους διαδοχικούς όρους a_n $και$ a_{n+1} $για$ τυχόν $n \epsilon \mathbb{N}^*$.

Για το λόγο αυττό θα υπολογίσουμε την διαφορά $a_{n+1} - a_n$

Άσκηση 4

$$a_{n+1} - a_n = \frac{4^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{4^n}{n^2}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{4^{n+1}n^2 - 4^n(n+1)^2}{n^2(n+1)^2}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{4^n[4n^2 - (n+1)^2]}{n^2(n+1)^2}$$

Άσκηση 4

$$a_{n+1} - a_n = a_{n+1} - a_n = \frac{4^n(3n^2 - 2n - 1)}{n^2(n+1)^2}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{4^n(n-1)(3n+1)}{n^2(n+1)^2} \geq 0 \text{ για κάθε } n \epsilon \mathbb{N}^* \,.$$

Άσκηση $\mathbf{4}$

Άρα $a_{n+1} \geq a_n$ για κάθε $n \epsilon \mathbb{N}^*$.

Άρα η ακολουθία $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ είναι αύξουσα.

Άσκηση 5

Να εξετάσετε ως προς την μονοτονία την ακολουθία $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ με

$$\alpha_n = \frac{(n-1)!}{n^n},\ n\epsilon\mathbb{N}^*$$

Άσκηση 5

Λύση:

Θα συγκρίνουμε τους θετικούς διαδοχικούς όρους $a_n \; \kappa\alpha\iota \quad a_{n+1} \; \gamma\iota\alpha$ τυχόν $n \epsilon \mathbb{N}^*$.

Για το λόγο αυττό θα υπολογίσουμε το πηλίκο $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Άσκηση 5

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{n!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{(n-1)!}{n^n}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!\, n^n}{(n-1)!\,(n+1)^{n+1}}$$

Άσκηση 5

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{nn^n}{(n+1)^{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$$

Άσκηση 5

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < 1 \text{ για κάθε } n\epsilon\mathbb{N}^* .$$

Άρα $a_{n+1} < a_n$ για κάθε $n\epsilon\mathbb{N}^*$.
Άρα η ακολουθία $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Άσκηση 6

Να δείξετε ότι η ακολουθία $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ με

$\alpha_n = \frac{(-1)^n}{n^2+2}$, $n\epsilon\mathbb{N}^*$δεν είναι μονότονη.

Λύση:

Παρατηρούμε ότι $\alpha_1 = \frac{-1}{3}$, $\alpha_2 = \frac{1}{6}$, $\alpha_3 = \frac{-1}{11}$. Δηλαδή

$\alpha_1 < \alpha_2$ και $\alpha_2 > \alpha_3$. Επομένως η ακολουθία $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ δεν είναι μονότονη.

Άσκηση 7

Να εξετάσετε την ακολουθία $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ με

$$\alpha_n = \frac{1}{n} sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) n\epsilon\mathbb{N}^*$$

ως προς την μονοτονία.

Άσκηση 7

Λύση:

Παρατηρούμε ότι $\alpha_1 = \frac{1}{1} sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \alpha_2 = \frac{1}{2} sin\left(\frac{2\pi}{2}\right) = 0,$

$\alpha_3 = \frac{1}{3} sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{1}{3}, \alpha_4 = \frac{1}{4} sin\left(\frac{4\pi}{2}\right) = 0$

$\alpha_2 < \alpha_3$ και $\alpha_3 > \alpha_4$. Επομένως η ακολουθία $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ δεν είναι μονότονη.

Βιβλιογραφία

- Θεμιστοκλής Μ. Ρασσιάς, Μαθηματική Ανάλυση Ι, Τεύχος Α, Εκδόσεις Σαββάλα, Αθήνα 2004
- H. L. Royden, Real Analysis, The Macmillan Company, London 1968
- Αναστάσιος Σ. Κορκοτσίδης, Μαθηματικά Οικονομικής Ανάλυσης, Τόμος Α, Εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα 1994
- Σ. Νεγρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος, Ε. Γιαννακούλιας, Απειροστικός Λογισμός, Τόμος Ι, Εκδόσεις Αίθρα, Αθήνα 1995
- Παπαδημητράκης, Μ. 2015. ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΚΑΙ ΟΡΙΑ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ. [Κεφάλαιο Συγγράμματος]. Στο Παπαδημητράκης, Μ. 2015. *Ανάλυση*. [ηλεκτρ. βιβλ.] Αθήνα:Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών. κεφ 2. Διαθέσιμο στο: **http://hdl.handle.net/11419/2892**