ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ

ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: Ε. ΠΑΠΑΓΕΩΡΓΙΟΥ – Δ. ΚΟΥΛΟΥΜΠΟΎ

Σύγκλιση Ακολουθίας

Ορισμός:

Μία Ακολουθία $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ λέμε ότι συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό a όταν και μόνο όταν για κάθε θετικό αριθμό ε υπάρχει φυσικός αριθμός n_0 τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $|\alpha_n - a| < \varepsilon$.

Σύγκλιση Ακολουθίας

<u>Συμβολισμός:</u>

Γράφουμε $a_n \to a$ καθώς $n \to +\infty$ ή $\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha$ ή ισοδύναμα

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n - \alpha) = 0.$$

Σύγκλιση Ακολουθίας

- Ο πραγματικός αριθμός α είναι μοναδικός και ονομάζεται όριο (limit) ή οριακή τιμή της ακολουθίας $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$
- Όταν υπάρχει το όριο α μιας ακολουθίας $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ η ακολουθία ονομάζεται συγκλίνουσα
- Αν $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, τότε η ακολουθία $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ ονομάζεται μηδενική (null sequence).

Ιδιότητες Συγκλίνουσων Ακολουθιών

- Αν $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \alpha$, τότε η ακολουθία $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ είναι φραγμένη. (Το αντίστροφο δεν ισχύει)

- Αν για τις ακολουθίες $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$, $(\beta_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$, $(\gamma_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ ισχύει ότι $\beta_n \leq \alpha_n \leq \gamma_n$ για κάθε

  $n \geq n_0$, όπου $n_0\epsilon\mathbb{N}^*$ και $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \gamma_n = a$, τότε

  $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \alpha$

Ιδιότητες Συγκλίνουσων Ακολουθιών

- Αν $\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha$ και $\lim_{n\to+\infty} \beta_n = \beta$, τότε $\lim_{n\to+\infty} (\alpha_n + \beta_n) = a + \beta$

- Αν $\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha$ και $\lambda \epsilon \mathbb{R}$, τότε $\lim_{n\to+\infty} (\lambda \alpha_n) = \lambda a$

Ιδιότητες Συγκλίνουσων Ακολουθιών

- Αν $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \alpha$ και $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = \beta$, τότε $\lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha_n \cdot \beta_n) = a \cdot \beta$

- Αν $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \alpha$ και $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = \beta$, τότε $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right) = \frac{\alpha}{\beta}, \beta \neq 0$

Ιδιότητες Συγκλίνουσων Ακολουθιών

- Αν $\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha$ $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[k]{\alpha_n}\right) = \sqrt[k]{a}\,, k\epsilon\mathbb{N}, k \geq 2,\ a \geq 0$
- Αν $\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha$ $\lim_{n\to+\infty} (\alpha_n)^k = a^k$
- Αν $\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha$ $\lim_{n\to+\infty} |\alpha_n| = |a|$

Ακολουθίες που Συγκλίνουν στο $\pm\infty$

Ορισμός:

- Μία Ακολουθία $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ λέμε ότι συγκλίνει στο $+\infty$ όταν και μόνο όταν για κάθε θετικό αριθμό M υπάρχει φυσικός αριθμός n_0 τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $\alpha_n > M$.
- Μία Ακολουθία $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ λέμε ότι συγκλίνει στο $-\infty$ όταν και μόνο όταν η ακολουθία $(-\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ συγκλίνει στο $+\infty$

Κριτήρια Σύγκλισης Ακολουθιών

- Μια ακολουθία $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ η οποία είναι άνω φραγμένη και γνησίως αύξουσα συγκλίνει σε έναν πραγματικό αριθμό ο οποίος είναι το supremum του συνόλου τιμών της.
- Μια ακολουθία $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ η οποία είναι κάτω φραγμένη και γνησίως φθίνουσα συγκλίνει σε έναν πραγματικό αριθμό ο οποίος είναι το infimum του συνόλου τιμών της

Κριτήρια Σύγκλισης Ακολουθιών

(Κριτήριο Λόγου D' Alembert) Αν $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ είναι μια ακολουθία με μη μηδενικούς όρους και

$\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \kappa < 1$, τότε $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$

Όρια Ειδικών Ακολουθιών

Όριο Ακολουθίας	Περιορισμοί
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^a} = 0$	$a\epsilon(0,+\infty)$
$\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$	$a\epsilon(-1,1)$
$\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$	$a\epsilon(1,+\infty)$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{a^n} = 0$	$a\epsilon(1,+\infty)$

Όρια Ειδικών Ακολουθιών

Όριο Ακολουθίας	**Περιορισμοί**
$\lim\limits_{n \to +\infty} n a^n = 0$	$a \epsilon (0,1)$
$\lim\limits_{n \to +\infty} (\sqrt[n]{n}) = 1$	
$\lim\limits_{n \to +\infty} (\sqrt[n]{a}) = 1$	$a \epsilon (0, +\infty)$

Όρια Ειδικών Ακολουθιών

Όριο Ακολουθίας	Περιορισμοί
$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{n!}\right) = +\infty$	
$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$	
$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$	$a\epsilon\mathbb{R}^*$

Όρια Ειδικών Ακολουθιών

Όριο Ακολουθίας	Περιορισμοί
$\lim_{n \to +\infty} \frac{lnn}{n} = 0$	
$\lim_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$	$a \epsilon \mathbb{R}$

Άσκηση 1

Να εξετάσετε ως προς την σύγκλιση την ακολουθία $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ με

$$\alpha_n = \frac{2n+1}{n}, n\epsilon\mathbb{N}^*$$

Λύση:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n} = \lim_{n\to+\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right) = 2+0 = 2$$

Άσκηση 2

Αν $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ ακολουθία με

$\alpha_n = \frac{4n^2-3n+4}{n^2+1}$, $n\epsilon\mathbb{N}^*$ να βρεθεί το $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

Άσκηση 2

Λύση:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{4n^2-3n+4}{n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\left(4-\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(4-\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}\right)}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = 4$$

Άσκηση 3

Αν $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ ακολουθία με

$\alpha_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+4}}$, $n\epsilon\mathbb{N}^*$ να βρεθεί το $\lim_{n\to+\infty} a_n$

Άσκηση 3

Λύση:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+4}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{4}{n^2}\right)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}} = 1$$

Άσκηση 4

Αν $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ ακολουθία με

$\alpha_n = \frac{n^3+4n^2-2n+7}{n^2+1}$, $n\epsilon\mathbb{N}^*$ να βρεθεί το $\lim_{n\to+\infty} a_n$

Άσκηση $\mathbf{4}$

Λύση:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+4n^2-2n+7}{n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3\left(1+\frac{4}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{7}{n^3}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(1+\frac{4}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{7}{n^3}\right)}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = +\infty$$

Άσκηση 5

Αν $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ ακολουθία με

$\alpha_n = \frac{2-cos(\sqrt{n})}{n}$, $n\epsilon\mathbb{N}^*$ να βρεθεί το $\lim_{n\to+\infty} a_n$

Άσκηση 5

Λύση:

Έχουμε: $-1 \leq -cos(\sqrt{n}) \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 2 - cos(\sqrt{n}) \leq 3 \Rightarrow$
$\frac{1}{n} \leq \frac{2-cos(\sqrt{n})}{n} \leq \frac{3}{n}$

για κάθε $n\epsilon\mathbb{N}^*$

Επιπλέον $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0$

Άρα από το κριτήριο παρεμβολής $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

Άσκηση 6

Αν $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ ακολουθία με

$\alpha_n = \frac{4\cdot 10^n - 3\cdot 10^{2n}}{3\cdot 10^{n-1} - 2\cdot 10^{2n-1}}$, $n\epsilon\mathbb{N}^*$ να βρεθεί το $\lim_{n\to+\infty} a_n$

Άσκηση 6

Λύση:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{4\cdot 10^n - 3\cdot 10^{2n}}{3\cdot 10^{n-1} - 2\cdot 10^{2n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{10^{2n}\left(\frac{4}{10^n} - 3\right)}{10^{2n}\left(\frac{3}{10^{n+1}} - \frac{2}{10}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{4}{10^n} - 3\right)}{\left(\frac{3}{10^{n+1}} - \frac{2}{10}\right)} = 15$$

Άσκηση 7

Διότι:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\left(\frac{9}{4}\right)^n}=0\ \left(\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{a^n}=0\ \gamma\iota\alpha\ a\epsilon(1,+\infty)\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{3^n}=0\ \left(\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{a^n}=0\ \gamma\iota\alpha\ a\epsilon(1,+\infty)\right)$$

Άσκηση 7

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^n = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^n = 0$$

Άσκηση 8

Αν $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ακολουθία με

$\alpha_n = \frac{n\cdot 2^n+3^n-1}{4^n+5^n}$, $n\in\mathbb{N}^*$ να βρεθεί το $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

Άσκηση 8

Λύση:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n \cdot 2^n + 3^n - 1}{4^n + 5^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n\left(\frac{n}{\left(\frac{3}{2}\right)^n} + 1 - \frac{1}{3^n}\right)}{5^n\left(\left(\frac{4}{5}\right)^n + 1\right)} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n \frac{\frac{n}{\left(\frac{3}{2}\right)^n} + 1 - \frac{1}{3^n}}{\left(\frac{4}{5}\right)^n + 1} = 0$$

Άσκηση 8

Διότι:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\left(\frac{3}{3}\right)^n}=0\ \left(\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{a^n}=0\ \gamma\iota\alpha\ a\epsilon(1,+\infty)\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3^n}=0$$

Άσκηση 8

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$$

Άσκηση $\mathbf{9}$

Αν $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ ακολουθία με

$\alpha_n = \left(\frac{n+3}{n}\right)^n$, $n\epsilon\mathbb{N}^*$ να βρεθεί το $\lim_{n\to+\infty} a_n$

Άσκηση 9

Λύση:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+3}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n = e^3$$

Υπενθύμιση: $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a \;\; a\epsilon\mathbb{R}$

Άσκηση 10

Αν $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ ακολουθία με

$$\alpha_n = \left(1 - \frac{2}{n+2}\right)^n, \quad n\epsilon\mathbb{N}^*$$

να βρεθεί το $\lim_{n\to+\infty} a_n$

Άσκηση 10

Λύση:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{n+2}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{2}{n}}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} = \frac{1}{e^2} = e^{-2}$$

Άσκηση 11

Αν $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ ακολουθία με

$\alpha_n = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n, \quad n\epsilon\mathbb{N}^*$ να βρεθεί το $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

Άσκηση 11

Λύση:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{-\frac{1}{2}}{n}\right)^n = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Άσκηση 12

Αν $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ ακολουθία με

$\alpha_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n, \quad n\epsilon\mathbb{N}^*$ να βρεθεί το $\lim_{n\to+\infty} a_n$

Άσκηση 12

Λύση:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] = e^{-1}e = 1$$

Άσκηση 13

Αν $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ ακολουθία με

$\alpha_n = \left(\frac{n+3}{n-1}\right)^n$, $n\epsilon\mathbb{N}^*$ να βρεθεί το $\lim_{n\to+\infty} a_n$

Άσκηση 13

Λύση:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n+3}{n-1}\right)^n = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{4}{n-1}\right)^n$$

Θέτουμε $m = n - 1$. Άρα $n = m + 1$ και $m \to +\infty$

καθώς $\mathrm{n} \to +\infty$ Επομένως:

Άσκηση 13

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{4}{m}\right)^{m+1} = \lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{4}{m}\right)^{m}\left(1+\frac{4}{m}\right)$$
$$= e^4$$

Άσκηση 14

Αν $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ ακολουθία με

$\alpha_n = \frac{(n-1)!}{n^n} n\epsilon\mathbb{N}^*$ να βρεθεί το $\lim_{n\to+\infty} a_n$

Άσκηση 14

Λύση:

Έχουμε: $0 \leq (n-1)! \leq n^{n-1} \Rightarrow 0 \leq \frac{(n-1)!}{n^n} \leq \frac{n^{n-1}}{n^n} \Rightarrow 0 \leq \frac{(n-1)!}{n^n} \leq \frac{1}{n}$ για κάθε $n \epsilon \mathbb{N}^*$

Επιπλέον $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \to +\infty} 0 = 0$

Άρα από το κριτήριο παρεμβολής $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

Βιβλιογραφία

- Θεμιστοκλής Μ. Ρασσιάς, Μαθηματική Ανάλυση Ι, Τεύχος Α, Εκδόσεις Σαββάλα, Αθήνα 2004
- H. L. Royden, Real Analysis, The Macmillan Company, London 1968
- Αναστάσιος Σ. Κορκοτσίδης, Μαθηματικά Οικονομικής Ανάλυσης, Τόμος Α, Εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα 1994
- Σ. Νεγρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος, Ε. Γιαννακούλιας, Απειροστικός Λογισμός, Τόμος Ι, Εκδόσεις Αίθρα, Αθήνα 1995
- Παπαδημητράκης, Μ. 2015. ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΚΑΙ ΟΡΙΑ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ. [Κεφάλαιο Συγγράμματος]. Στο Παπαδημητράκης, Μ. 2015. *Ανάλυση*. [ηλεκτρ. βιβλ.] Αθήνα:Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών. κεφ 2. Διαθέσιμο στο: **http://hdl.handle.net/11419/2892**