ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ

Βασικές Αρχές και Έννοιες

Τι είναι η Μαθηματική Μοντελοποίηση

- Η μελέτη και κατανόηση της συμπεριφοράς απλών ή πολύπλοκων συστημάτων με τη χρήση των Μαθηματικών

Γιατί να χρησιμοποιήσουμε την Μαθηματική Μοντελοποίηση

- Θεμελιώδης τρόπος κατανόησης, ανάλυσης και ποσοτικοποίησης πολύπλοκων συστημάτων και φαινομένων
- Συμπληρωματική σε Θεωρία και Πειράματα
- Χρησιμοποιείται ευρέως σε: Υπολογιστική Φυσική, Χημεία, Μηχανική, Υλικά, …, Βιολογία

Παραδείγματα

- Εκτιμείστε τον πληθυσμό της Ελλάδας το 2030.
- Βρείτε την επίδραση στην οικονομία της χώρας εάν μειωθεί η συνολική φορολογία κατά 30 %.

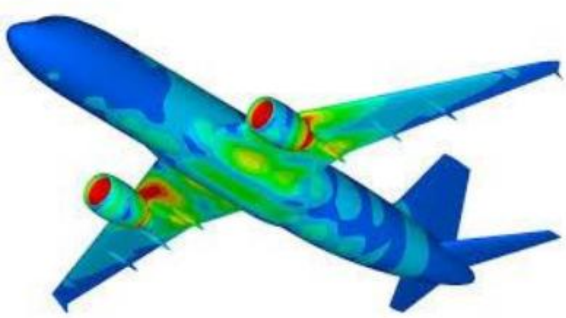
Παραδείγματα

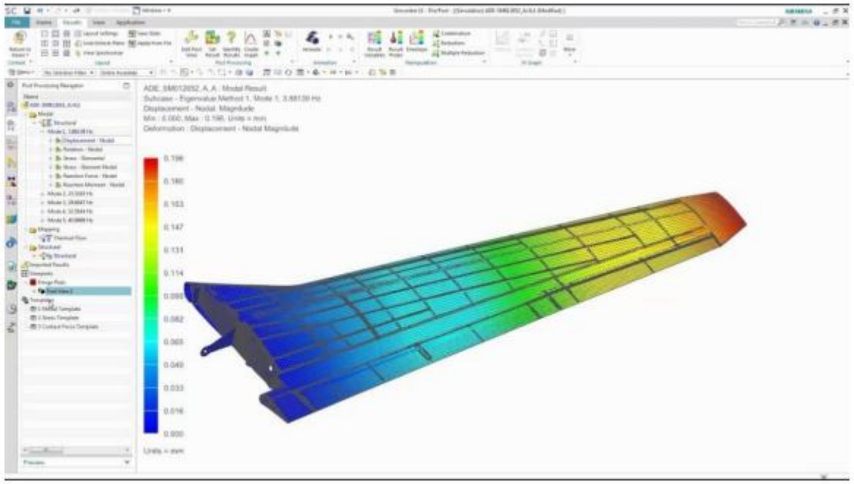
- Βρείτε μια εκτίμηση του συνολικού ποσού που θα πρέπει να πληρώσει μια ασφαλιστική εταιρεία στους πελάτες της στη διάρκεια του επόμενου έτους.
- Εκτιμήστε την αντοχή ενός αεροσκάφους πριν το κατασκευάσετε.

Παραδείγματα

- Βρείτε τη μέγιστη δύναμη που αναπτύσσεται στην πτέρυγα ενός αεροσκάφους που πετά με συγκεκριμένη ταχύτητα σε ορισμένο ύψος.

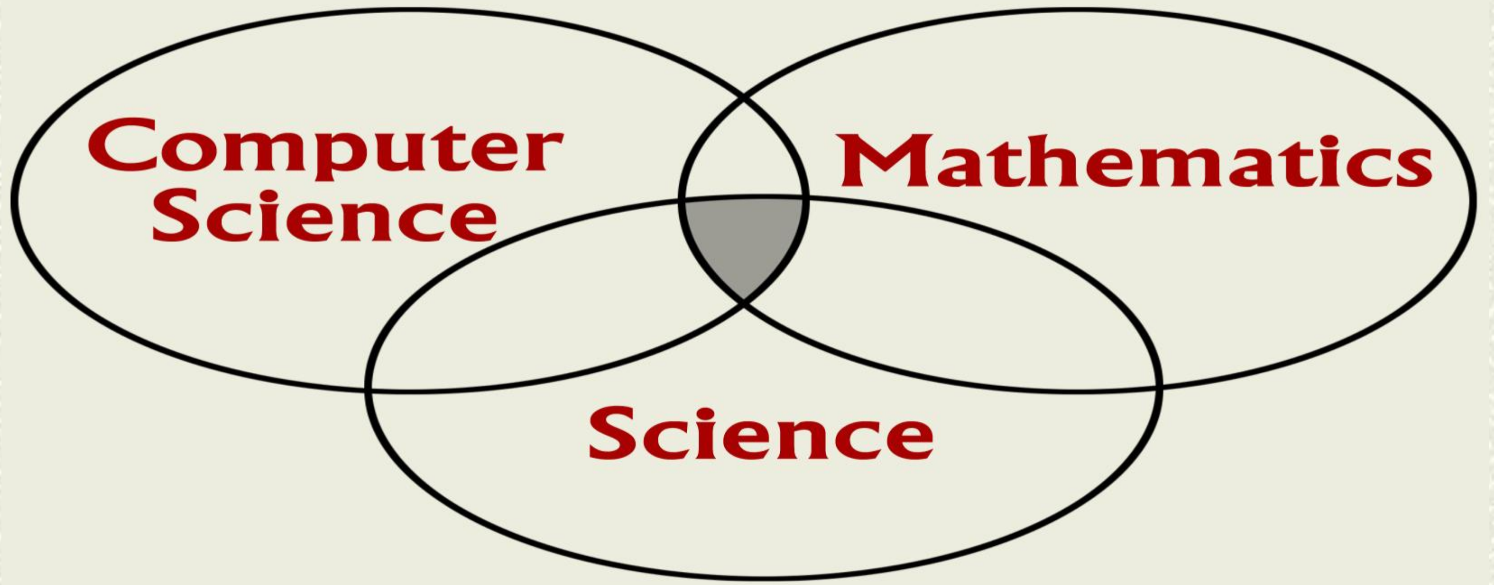
Παραδείγματα





Μαθηματική Μοντελοποίηση

Επιδιώκει να αποκτήσει κατανόηση της επιστήμης μέσω της χρήσης μαθηματικών μοντέλων σε υπολογιστικό ή στατιστικό περιβάλλον.



Μαθηματικά Μοντέλα

- Ένα μαθηματικό μοντέλο είναι μια ιδεατή, απλουστευμένη περιγραφή ενός πραγματικού συστήματος με:

Μαθηματικά Μοντέλα

- μεταβλητές (variables),
- παραμέτρους (parameters),
- σχέσεις (εξισώσεις, ανισότητες, πιθανότητες).

Μαθηματικά Μοντέλα

- Σκοπός: κατανόηση, πρόβλεψη, έλεγχος, βελτιστοποίηση.

Μαθηματικά Μοντέλα

- Κάθε μαθηματικό μοντέλο το θεωρούμε ως μια μαθηματική κατασκευή σχεδιασμένη με σκοπό την μελέτη ενός συγκεκριμένου πραγματικού συστήματος ή μιας συμπεριφοράς που μας ενδιαφέρει.

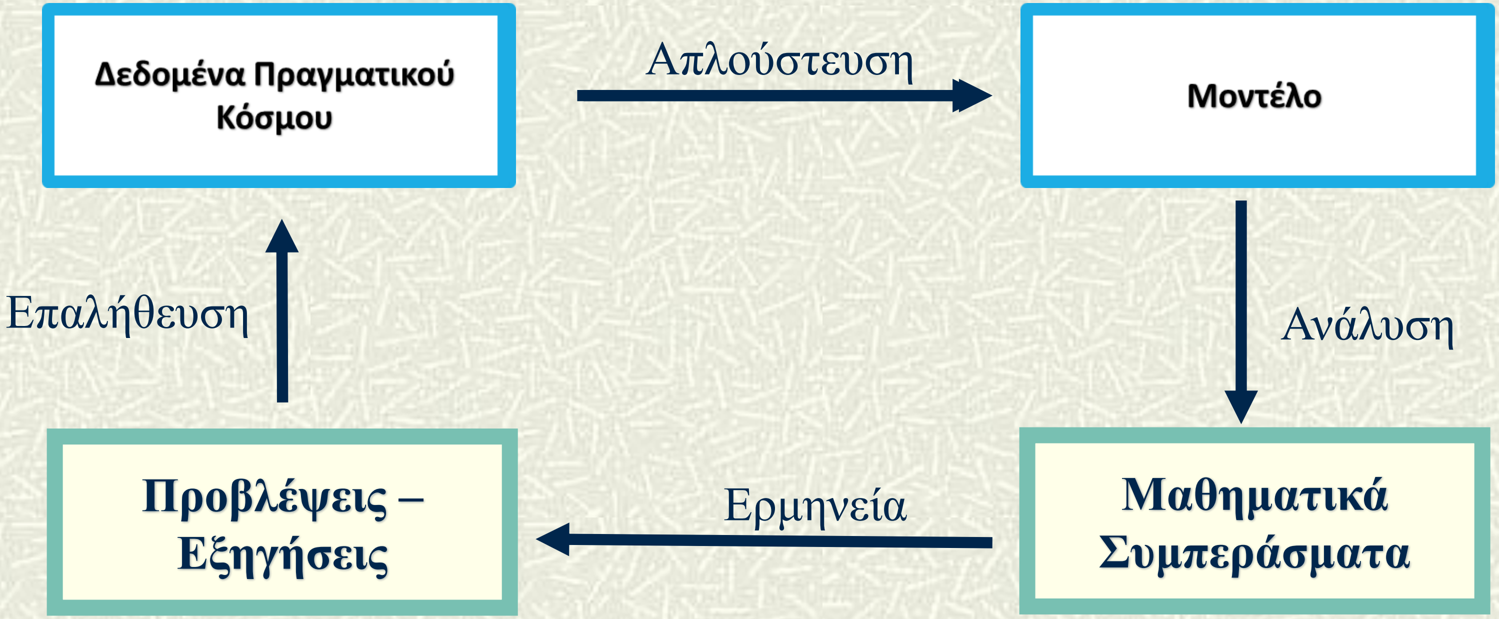
Μαθηματικά Μοντέλα

- Το μοντέλο μας επιτρέπει να εξάγουμε μαθηματικά συμπεράσματα σχετικά με την συμπεριφορά αυτή.

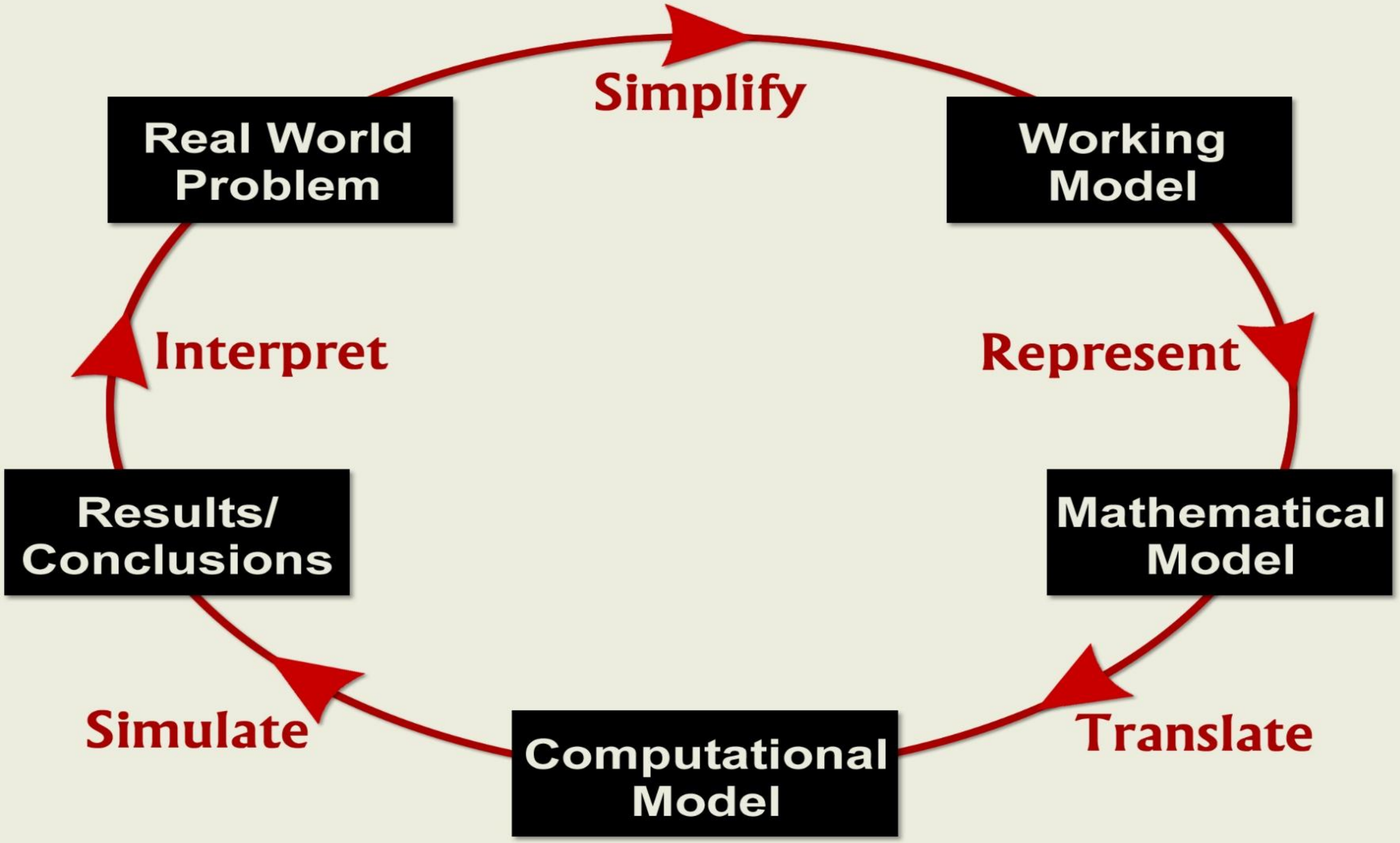
Μαθηματικά Μοντέλα

- Η ανάλυση και η ερμηνεία τέτοιων συμπερασμάτων μπορεί να βοηθήσει στην λήψη αποφάσεων και στον σχεδιασμό μελλοντικών ενεργειών.

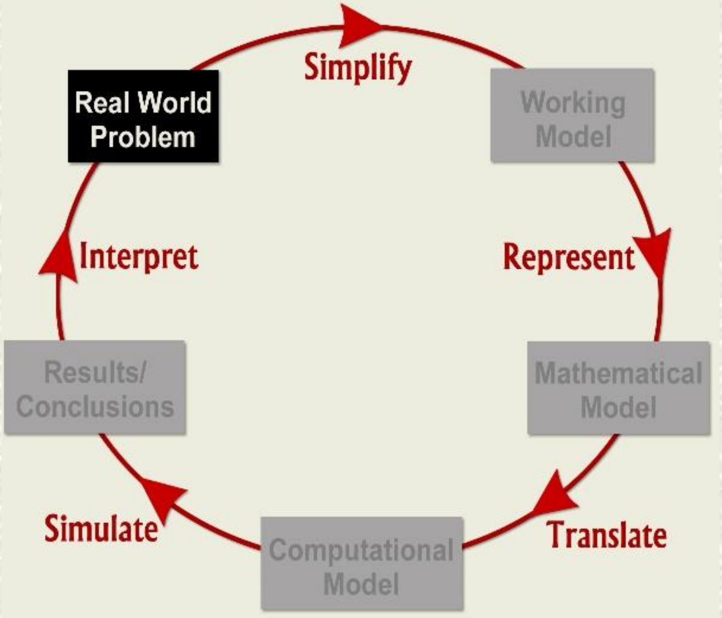
Διαδικασία Κατασκευής Μοντέλου



Ο κύκλος της Μοντελοποίησης



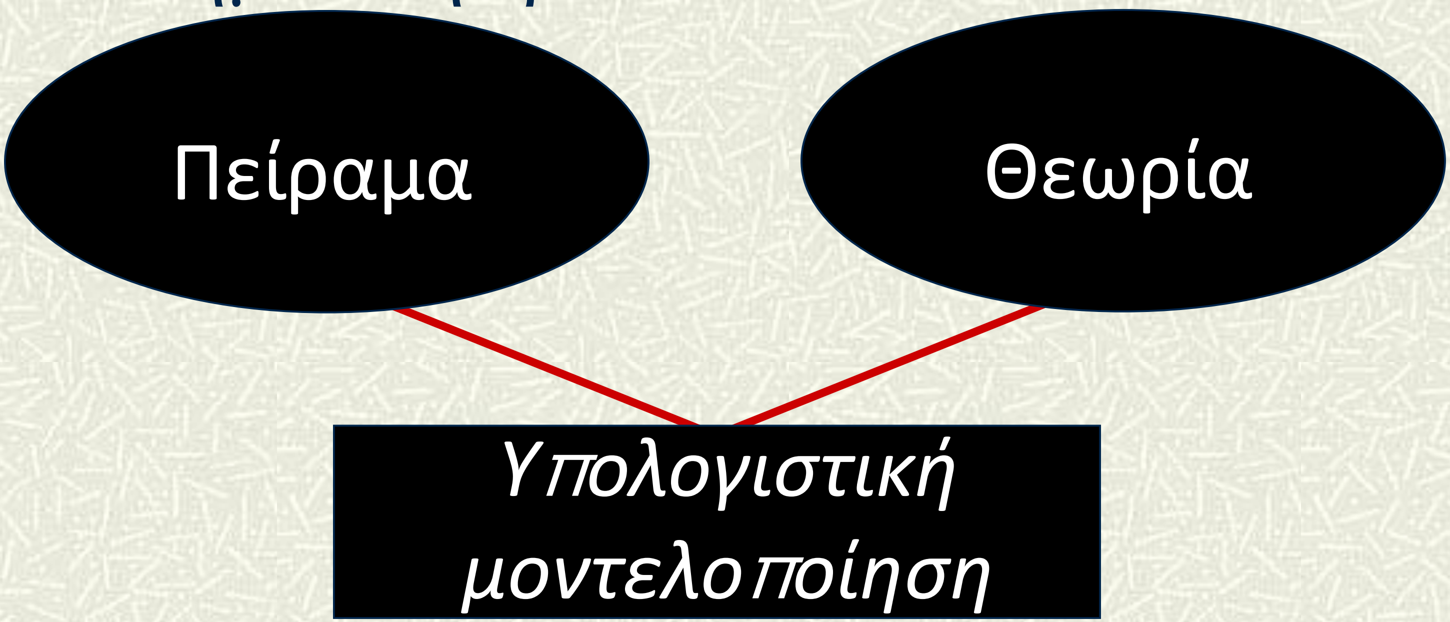
Μοντελοποίηση Προβλημάτων της Πραγματικής Ζωής



- **Προσδιορισμός του προβλήματος**
- **Απλοποίηση – προσέγγιση του προβλήματος ώστε να μπορεί να κωδικοποιηθεί μαθηματικά**
- **Μετατροπή σε Υπολογιστικό Πρόβλημα**
- **Επίλυση**

Μαθηματική Μοντελοποίηση

Συμπληρώνει, αλλά δεν αντικαθιστά, τη θεωρία και την πειραματική προσέγγιση στην επιστημονική έρευνα.



Μαθηματική Μοντελοποίηση

- Συχνά χρησιμοποιείται στη θέση των πειραμάτων όταν αυτά είναι πολύ μεγάλα, πολύ ακριβά, πολύ επικίνδυνα ή πολύ χρονοβόρα.
- Μπορεί να χρησιμοποιηθεί/εφαρμοστεί σε “what if” μελέτες

Μαθηματική Μοντελοποίηση

Έχει αναδειχθεί ως ένα ισχυρό, απαραίτητο εργαλείο για τη μελέτη μεγάλου εύρους προβλημάτων στην επιστημονική έρευνα, την ανάπτυξη προϊόντων και διαδικασιών και τις κατασκευές

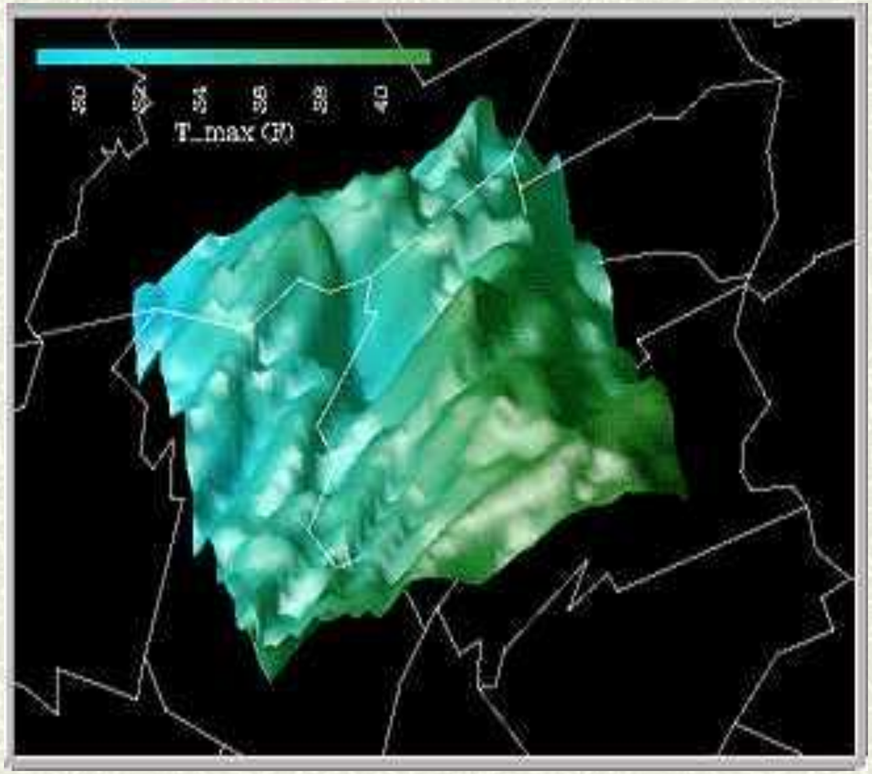
- **Σεισμολογία**
- **Περιβάλλον**
- **Οικονομικά**
- **Υλικά**
- **Ιατρική**
- **Κατασκευές**
- **Βιολογία**
- **Άμυνα**

Παράδειγμα: Βιομηχανία

- Το πρώτο αεροσκάφος που σχεδιάστηκε ψηφιακά, "προσυναρμολογήθηκε" στον υπολογιστή, εξαλείφοντας την ανάγκη για δαπανηρή, πλήρους κλίμακας μακέτα.
- Η υπολογιστική μοντελοποίηση βελτίωσε την ποιότητα της εργασίας και μείωσε τις ανάγκες αλλαγών και τα σφάλματα

Παράδειγμα: Climate Modeling

- 3-D αναπαράσταση θερμοκρασίας
- Η ταυτόχρονη εμφάνιση πολλών συνόλων δεδομένων βοηθά τους χρήστες να μελετούν και να αναλύουν γρήγορα τα δεδομένα τους.



Παράδειγμα Κατασκευής Μαθηματικού μοντέλου: Μόλυνση σε μια λίμνη

- Θεωρούμε ότι έχουμε μια λίμνη σταθερού όγκου V σε κυβικά μέτρα.
- Υποθέτουμε ότι η λίμνη είναι μολυσμένη και ότι η μόλυνση είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στον όγκο της.

Παράδειγμα Κατασκευής Μαθηματικού μοντέλου: Μόλυνση σε μια λίμνη

- Συμβολίζουμε με $x(t)$ τη συγκέντρωση της μόλυνσης ανά κυβικό μέτρο και έστω r ο ρυθμός με τον οποίο το νερό της λίμνης διαφεύγει από αυτήν (πχ. λόγω εξάτμισης).

Παράδειγμα Κατασκευής Μαθηματικού μοντέλου: Μόλυνση σε μια λίμνη

- Για να παραμένει ο όγκος της σταθερός πρέπει να έχουμε και αντίστοιχη εισροή υδάτων στη λίμνη (πχ. λόγω βροχοπτώσεων)

Παράδειγμα Κατασκευής Μαθηματικού μοντέλου: Μόλυνση σε μια λίμνη

- Θέλουμε να δούμε, εάν η εισροή μόλυνσης πάψει, σε πόσο χρόνο η λίμνη θα αυτοκαθαριστεί δηλαδή πότε η συγκέντρωση της μόλυνσης θα φτάσει το 5%.

Παράδειγμα Κατασκευής Μαθηματικού μοντέλου: Μόλυνση σε μια λίμνη

- Θα καταστρώσουμε για τον λόγο αυτό μια εξίσωση που θα συσχετίζει τα φυσικά μεγέθη του προβλήματος μεταξύ τους. Αυτά είναι η συγκέντρωση $x(t)$, ο όγκος V , ο ρυθμός εισροής-εκροής r, και ο χρόνος t.

Παράδειγμα Κατασκευής Μαθηματικού μοντέλου: Μόλυνση σε μια λίμνη

- Έχουμε ότι:
- **Ρυθμός μεταβολής μόλυνσης = Εισροή μόλυνσης − εκροή μόλυνσης**,
- ή εναλλακτικά ότι

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{V}{r}x(t) \quad (1)$$

Παράδειγμα Κατασκευής Μαθηματικού μοντέλου: Μόλυνση σε μια λίμνη

- Επίσης τη χρονική στιγμή $t = 0$ θεωρούμε ότι στη λίμνη περιέχεται ποσό μόλυνσης $x(0) = x_0$.
- Επειδή $-\frac{V}{r} < 0$, το μοντέλο μας δίνει εκθετική μείωση για το $x(t)$.

Παράδειγμα Κατασκευής Μαθηματικού μοντέλου: Μόλυνση σε μια λίμνη

- Λύνοντας την διαφορική εξίσωση (1) παίρνουμε

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{r}{V}t}$$

- Για να βρούμε το χρόνο $t = t_c$ για τον οποίο $\frac{x(t_c)}{x_0} = 0{,}05$, Έχουμε:

- $\frac{x(t_c)}{x_0} = 0{,}05 \Leftrightarrow 0{,}05 = e^{-\frac{r}{V}t_c} \Leftrightarrow$

$t_c = -\frac{V}{r} ln(0{,}05) \approx 3\frac{V}{r}$

Παράδειγμα Κατασκευής Μαθηματικού μοντέλου: Μόλυνση σε μια λίμνη

Το παραπάνω αποτέλεσμα έχει εφαρμοστεί για τη μελέτη αυτού του φαινομένου στις λίμνες Michigan, Erie και Superior και τα αποτελέσματα συνοψίζονται στο πίνακα που ακολουθεί.

	Michigan	Erie	Superior
V	$4871 \times 10^9\ m^3$	$458 \times 10^9\ m^3$	$1921 \times 10^9\ m^3$
r	$433092096\ lt/sec$	$479582208\ lt/sec$	$178619904\ lt/sec$
t_c	7.8 χρόνια	92 χρόνια	562 χρόνια

Μοντελοποίηση Θαλάσσιου Κυματισμού

Το κυματικό μοντέλο WAM

Η εξίσωση ενέργειας μεταφοράς που επιλύεται είναι:

$$\frac{\partial N}{\partial t}+\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(N\dot{\phi}\quad\cos\phi\quad\right)+\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\dot{\lambda}\quad N\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\dot{\theta}\quad N\right)=S$$

N = 2-διάστατο κυματικό φάσμα

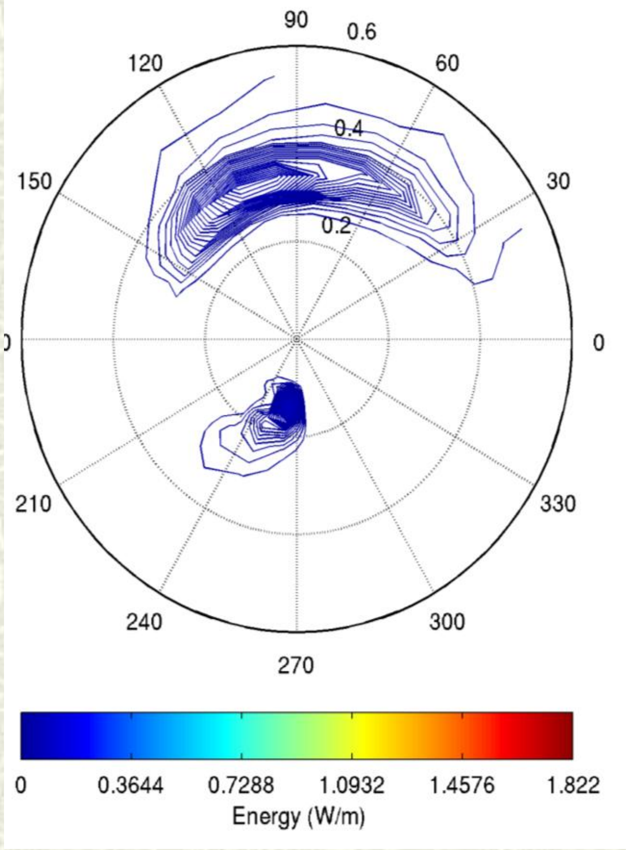
S = το άθροισμα των πηγών της κυματικής ενέργειας (wind forcing, dissipation, nonlinear transfer)

f = συχνότητα

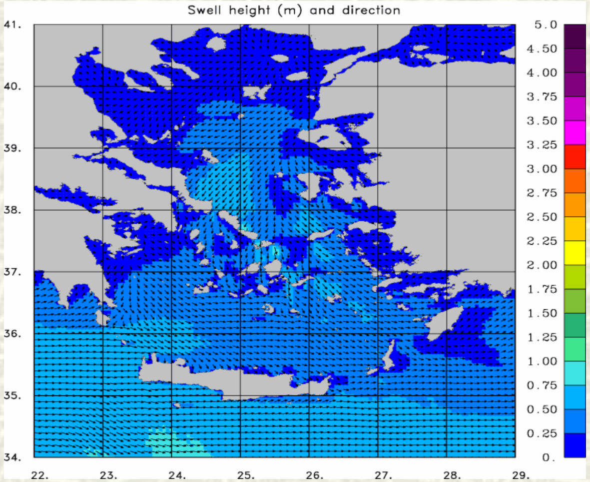
ϑ = διεύθυνση

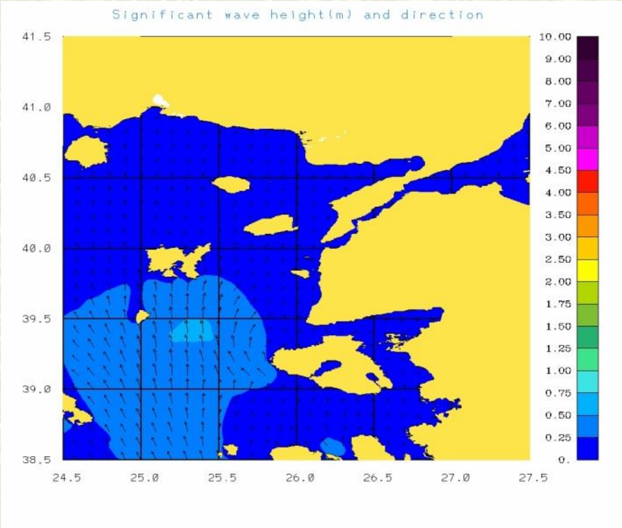
φ = το γεωγραφικό πλάτος

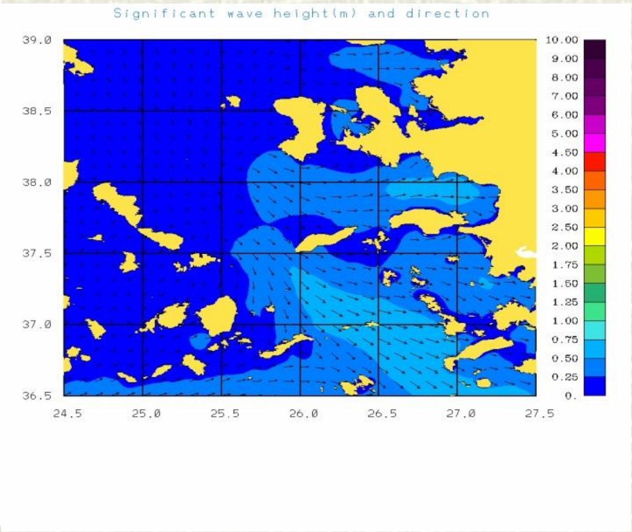
λ = το γεωγραφικό μήκος

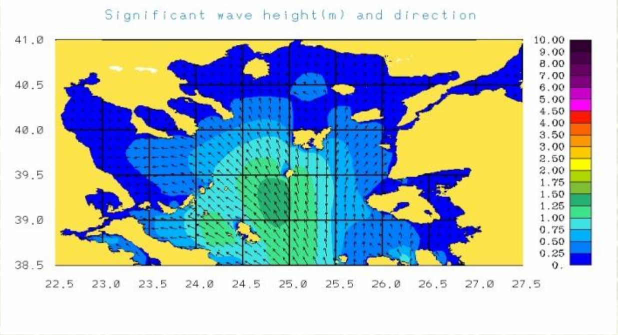


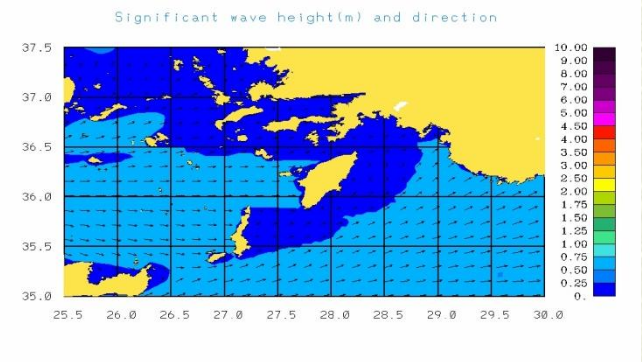
Μοντελοποίηση Θαλάσσιου Κυματισμού

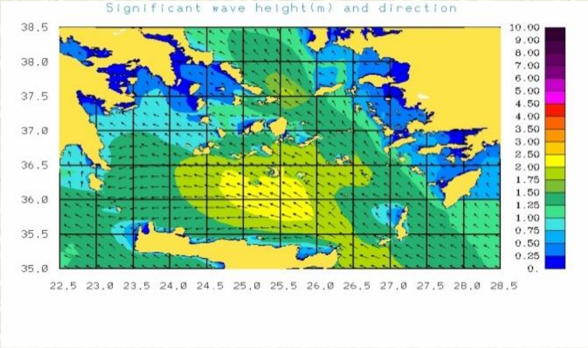












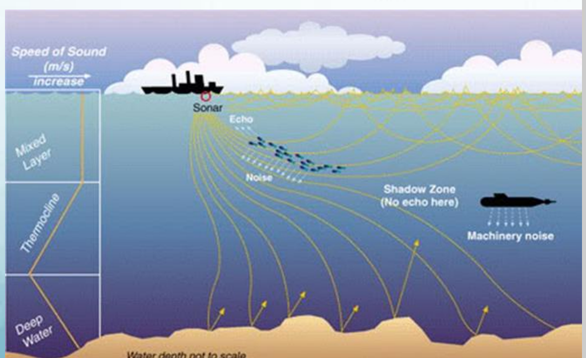
Μαθηματική Μοντελοποίηση Υποθαλάσσιας Ακουστικής

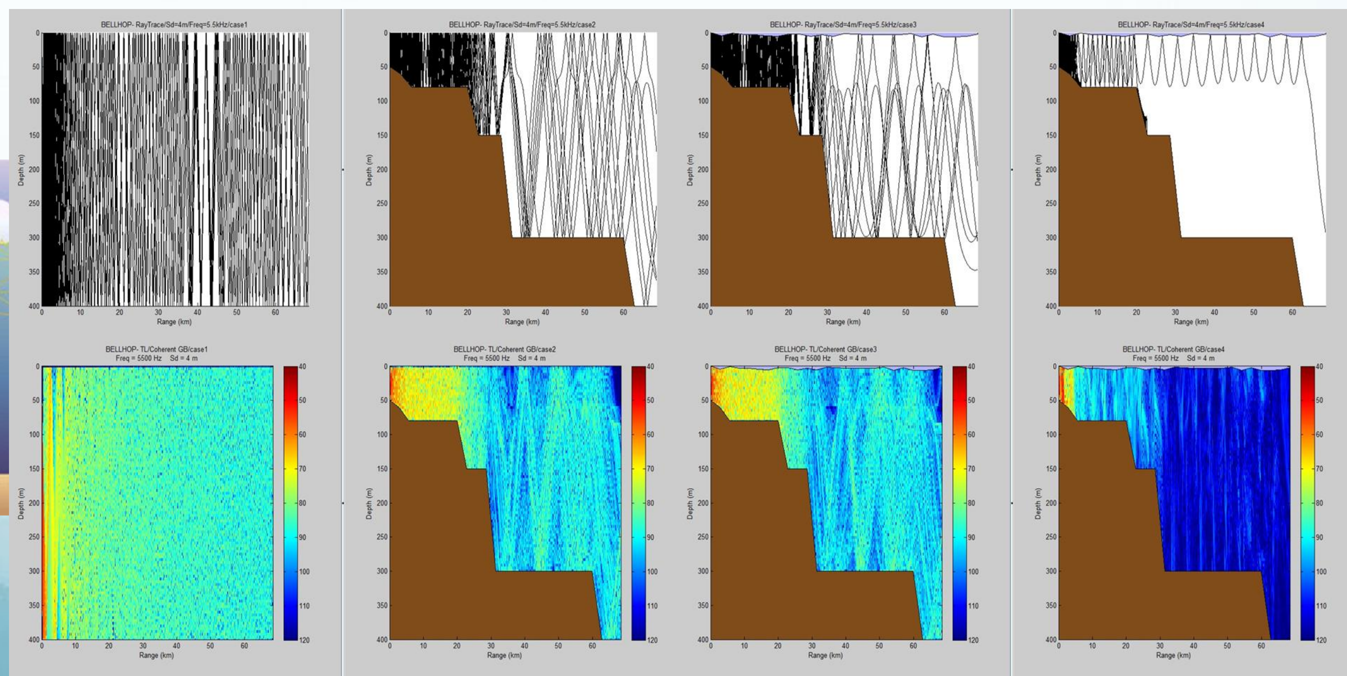
Στόχος:
Η αξιόπιστη πρόγνωση – προσομοίωση της μετάδοσης του ήχου στη θάλασσα με χαμηλό υπολογιστικό κόστος

Η ταχύτητα του ήχου στην θάλασσα είναι συνάρτηση της θερμοκρασίας T, της αλλατότητας S και της πίεσης P.

$$\boldsymbol{C(T,P,S) = 1449.2 + 4.6T + 0.055T^2 + 1.39(S-35) + 0.016P}$$

Χρήση – ανάλυση ευαισθησίας του μοντέλου NPS-Bellhop





Μοντελοποίηση Κυματικής Ενέργειας

Προσδιορισμός κυματικής ενέργειας:

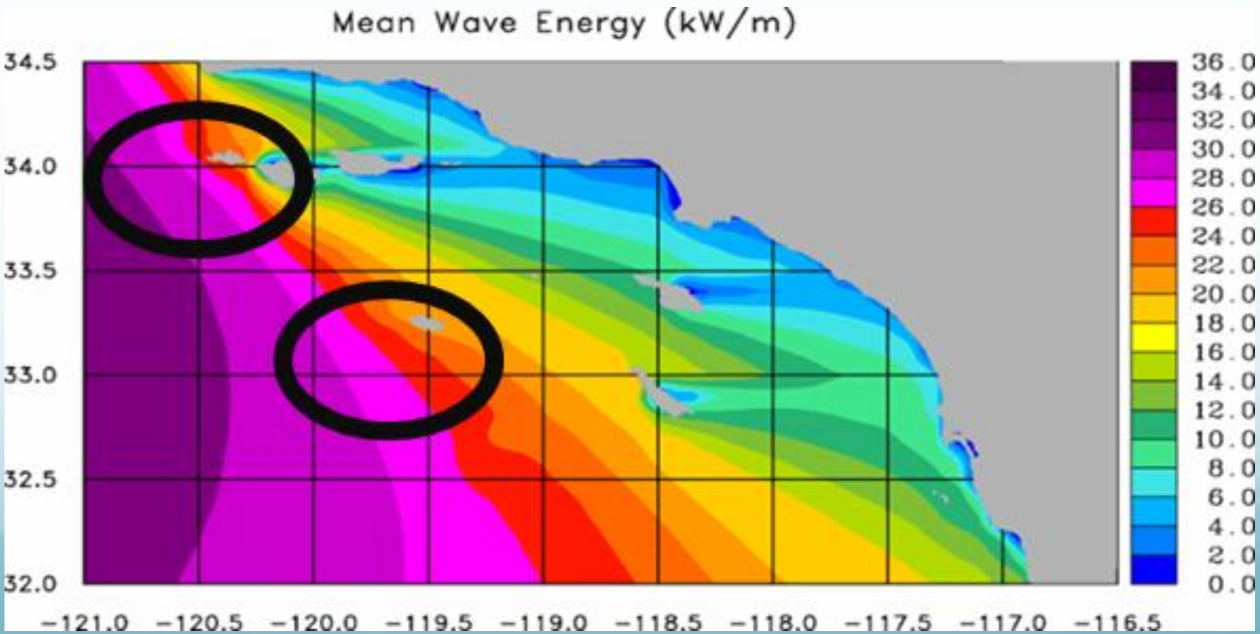
$$P_w = pg\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} f^{-1}E(f,\theta)dfd\theta = \frac{pg^2}{64\pi}\mathrm{H}_s^2 T_e \quad [W/m]$$

όπου

E(f,θ) είναι το 2-διάστατο κυματικό φάσμα,

H_s το σημαντικό ύψος κύματος

Te η μέση περίοδος κυματισμού.



Μαθηματική Μοντελοποίηση Κίνησης Νάρκης

Στόχος:

Μοντελοποίηση της κίνησης ενός αντικειμένου από την στιγμή εκτόξευσης του από ένα πλοίο έως και την στιγμή ακινητοποίησης του στον πυθμένα της θάλασσας

Χρήση του μοντέλου προσομοίωσης Impact35 Έχει αναπτυχθεί από το Naval Ocean Analysis and Prediction Laboratory of the US Naval Postgraduate School, και λειτουργεί σε περιβάλλον Matlab