

Αριθμητική  
Επίλυση  
Διαφορικών  
Εξισώσεων

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ  
Γ' ΜΑΧΙΜΩΝ – Γ' ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΔΙΔΑΣΚΟΥΣΑ: Δ. ΚΟΥΛΟΥΜΠΟΥ

# Εισαγωγή

---

- Πολλές διαφορικές εξισώσεις που προκύπτουν κατά την μαθηματική μοντελοποίηση πραγματικών προβλημάτων και εφαρμογών δεν μπορούν να επιλυθούν αναλυτικά με καμία από τις γνωστές μεθόδους.
- Ωστόσο προσεγγιστικές λύσεις τους μπορούν να ληφθούν με αριθμητικές μεθόδους.

# Εισαγωγή

---

- Οι μέθοδοι που ακολουθούμε βασίζονται στην προσέγγιση της συνάρτησης  $f(x)$  από κατάλληλες γραμμικές ή πολυωνυμικές συναρτήσεις και τη διακριτοποίηση του πεδίου ορισμού της συνάρτησης σε υποδιαστήματα.

# Εισαγωγή

---

- Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y); \quad y(x_0) = y_0 \quad (1)$$

- Υποθέτουμε αρχικά ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει μοναδική λύση.
- Έστω ότι η συνάρτηση  $h(x)$  είναι μία λύση της (1).

# Εισαγωγή

---

- Αρχικά διακριτοποιούμε το διάστημα  $[a, b]$  στο οποίο ορίζεται η άγνωστη συνάρτηση σε  $n$  υποδιαστήματα ίσου μήκους.

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

- Οι αριθμητικές μέθοδοι, επιλύουν το πρόβλημα αρχικών τιμών δίνοντας προσεγγίσεις της συνάρτησης  $y$ , στα σημεία

$$x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$$

# Μέθοδος Euler

---

- Η βασική ιδέα που στηρίζεται η μέθοδος Euler, είναι η εξής:
- Αν το γράφημα της  $h(x)$  διέρχεται από κάποιο δοσμένο σημείο  $M(x, y)$  η κλίση του γραφήματος στο σημείο αυτό ισούται με  $f(x, y)$ .

# Μέθοδος Euler

---

Πρόβλημα αρχικών τιμών  $\frac{dy}{dx} = f(x, y); y(x_0) = y_0$

Θεώρημα Taylor:  $y(x_0 + \Delta x) = y(x_0) + \Delta x \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_0} + \frac{\Delta x^2}{2} \cdot$

$\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=x_0} + \dots$

# Μέθοδος Euler

---

Κρατώντας μόνο όρους πρώτης τάξης ( $O(\Delta x^2)$ ):

$$y(x_0 + \Delta x) \cong y(x_0) + \Delta x \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_0} \Leftrightarrow$$

$$y(x_0 + \Delta x) \cong y(x_0) + \Delta x \cdot f(x_0, y_0)$$

# Μέθοδος Euler

---

- Χρησιμοποιώντας τον τύπο αυτό και την αρχική τιμή  $y(x_0) = y_0$  υπολογίζουμε τις τιμές της συνάρτησης σε σημεία που ισαπέχουν μεταξύ τους κατά  $h$ :
- $y_0 = y(x_0)$ ,
- $y(x_{i+1}) \cong y(x_i) + h \cdot f(x_i, y_i)$  [**Εξίσωση διαφορών**]

# Μέθοδος Euler

---

- Ένας άλλος τρόπος να προσεγγίσουμε τον τύπο του Euler, είναι να προσεγγίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης  $y$  μέσω των διαφορών της.

# Μέθοδος Euler

---

$$y'(x_i) = \frac{y(x_i + h) - y(x_i)}{h},$$

Δηλαδή,

$$f(x_i, y_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h}$$

# Μέθοδος Euler

---

- Η οποία οδηγεί στη αναδρομική ακολουθία του τύπου του Euler.

$$y_0 = y(x_0),$$

$$y(x_{i+1}) \cong y(x_i) + \mathbf{h} \cdot f(x_i, y_i) \text{ [Εξίσωση διαφορών]}$$

# Μέθοδος Euler

$x_0$ Δοσμένο	$y_0$ Δοσμένο
$x_1 = x_0 + h$	$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$
$x_2 = x_1 + h$	$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1)$
.....	.....
$x_n = x_{n-1} + h$	$y_n = y_{n-1} + h \cdot f(x_{n-1}, y_{n-1})$

# Παράδειγμα 1

---

Να λυθεί στο διάστημα  $[0,1]$  το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\frac{dy}{dx} = -y \quad ; \quad y(0) = 1$$

Διακριτοποιώντας το διάστημα  $[0,1]$  σε υποδιαστήματα

μήκους  $h = 0,25$

# Παράδειγμα 1

---

## Λύση:

Διακριτοποιούμε το διάστημα σε υποδιαστήματα μήκους

$$h = 0,25.$$

---

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0,25, \quad x_2 = 0,5, \quad x_3 = 0,75, \quad x_4 = 1$$

# Παράδειγμα 1

---

- Χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις διαφορών που προκύπτουν από τον τύπο Euler:

$$y_0 = y(0) = 1,$$

$$y_1 = y(0.25) = y_0 + 0.25 \cdot f(x_0, y_0) = 0.7500 \text{ (πραγμ. τιμή: } -0.778801)$$

$$y_2 = y(0.5) = y_1 + 0.25 \cdot f(x_1, y_1) = 0.5625 \text{ ( } 0.606531)$$

---

$$y_3 = y(0.75) = y_2 + 0.25 \cdot f(x_2, y_2) = 0.4219 \text{ ( } 0.472367)$$

$$y_4 = y(1) = y_3 + 0.25 \cdot f(x_3, y_3) = 0.3164 \text{ ( } 0.3677879)$$

# Μέθοδος Euler Αλγόριθμος – Matlab – Octave

---

Η υλοποίηση της μεθόδου Euler με χρήση Octave ή Matlab επιτυγχάνεται με τον παρακάτω αλγόριθμο

```
a=0;
```

```
b=1;
```

```
h=0.25; %step's size
```

```
N=(b-a)/h; % Number of steps
```

```
f=@(x,y)-y; %Define the function  $f$ 
```

```
x(1)=0; % The first value of  $x$ 
```

```
y(1)=1 %The first value of  $y$ 
```

# Μέθοδος Euler Αλγόριθμος – Matlab – Octave

---

```
for n=1:N
```

```
z(n)=f(x(n),y(n));
```

```
x(n+1)=x(n)+h;
```

```
y(n+1)=y(n)+h*(z(n));
```

```
end
```

```
plot(x,y)
```

```
x
```

```
y
```

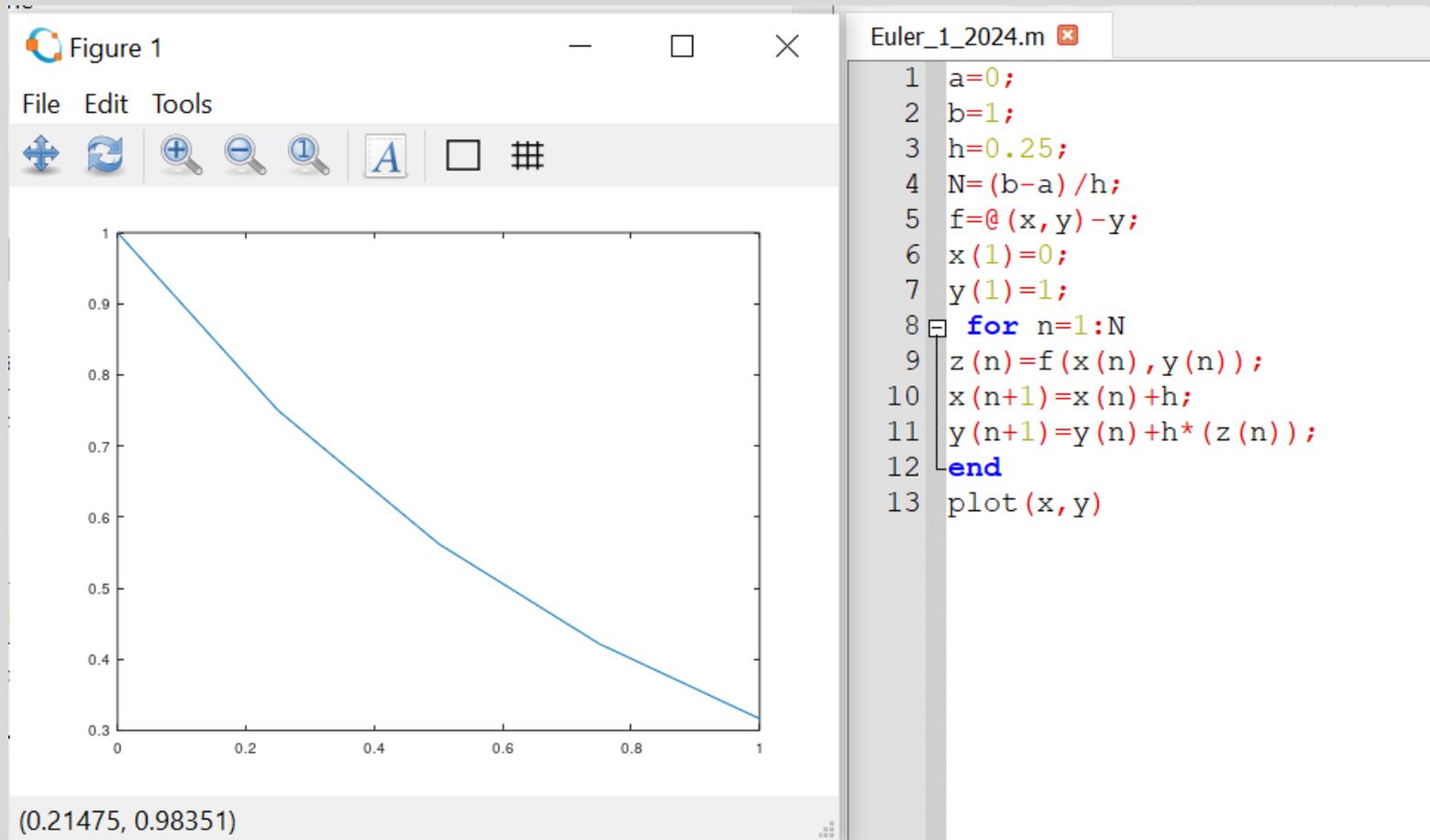
# Μέθοδος Euler Αλγόριθμος – Matlab – Octave

---

## Παρατήρηση:

Για την εμφάνιση των τιμών της  $y$  και το γράφημα χρησιμοποιούμε την εντολή **plot(x,y)**

# Μέθοδος Euler Αλγόριθμος – Matlab – Octave



# Παράδειγμα 2

---

Να λυθεί στο διάστημα  $[0,4]$  το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\frac{dy}{dx} + 2y = e^{-4x} \quad ; \quad y(0) = 1$$

Διακριτοποιώντας το διάστημα  $[0,4]$  σε υποδιαστήματα μήκους  $h = 0,5$

# Παράδειγμα 2

---

Έχουμε,

$$\frac{dy}{dx} + 2y = e^{-4x} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = e^{-4x} - 2y = f(x, y)$$

Διακριτοποιούμε το διάστημα σε υποδιαστήματα μήκους  $h=0.5$  και χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις διαφορών που προκύπτουν από τον τύπο Euler:

$$y_{i+1} = y_i + 0.5 \cdot f(x_i, y_i)$$

# Μέθοδος Euler Αλγόριθμος – Matlab – Octave

---

$x_i$	$y_i$	$x_i$	$y_i$
0	1	2.5	2.27E-05
0.5	0.067668	3	3.07E-06
1	0.009158	3.5	4.16E-07
1.5	0.001239	4	5.63E-08
2	0.000168	2.5	2.27E-05

# Μέθοδος Euler Αλγόριθμος – Matlab – Octave

---

Η υλοποίηση της μεθόδου Euler με χρήση Octave ή Matlab επιτυγχάνεται με τον παρακάτω αλγόριθμο

```
❖ >> a=0;
```

```
>> b=4;
```

```
>> h=0.5;
```

```
>> N=(b-a)/h;
```

```
>> y(1)=1;
```

```
>> x(1)=0;
```

# Μέθοδος Euler Αλγόριθμος – Matlab – Octave

---

```
>> for n=1:N  
x(n+1)=a+n*h;  
y(n+1)=y(n)+h*(exp(-4*x(n))-2*y(n));  
end
```

# Μέθοδος Euler Αλγόριθμος – Matlab – Octave

```
Command Window
>> a=0;
>> b=4;
>> h=0.5;
>> N=(b-a)/h;
>> y(1)=1;
>> x(1)=0;
>> for n=1:N
x(n+1)=a+n*h;
y(n+1)=y(n)+h*(exp(-4*x(n))-2*y(n));
end
>> x
x =

Columns 1 through 8:

    0    0.5000    1.0000    1.5000    2.0000    2.5000    3.0000    3.5000

Column 9:

    4.0000

>> y
y =

Columns 1 through 5:

    1.0000e+00    5.0000e-01    6.7668e-02    9.1578e-03    1.2394e-03

Columns 6 through 9:

    1.6773e-04    2.2700e-05    3.0721e-06    4.1576e-07
```

# Μέθοδος Euler Αλγόριθμος – Matlab – Octave

