Αριθμητική Επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων Μέθοδος Runge – Kutta

Μαθηματική Μοντελοποίηση

Γ΄ Μάχιμων – Γ΄ Μηχανικών

ΔιδάσκουσαΔ. Κουλουμπού

Αριθμητική Επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων
Μέθοδοι Runge — Kutta

- Η μέθοδος **Runge – Kutta** είναι μια κλασική μέθοδος με πολύ καλή ακρίβεια η οποία χρησιμοποιείται ευρύτατα.

Αριθμητική Επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων
Μέθοδοι Runge – Kutta

- Με τη μέθοδο Runge – Kutta προσπαθούμε να αντικαταστήσουμε τις παραγώγους ανώτερης τάξης που εμφανίζονται στη μέθοδο Taylor με κατάλληλους συνδυασμούς των $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ τα οποία είναι γνωστά.

- Έτσι, αποφεύγουμε τον υπολογισμό των παραγώγων ανώτερης τάξης.

Αριθμητική Επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων
Μέθοδοι Runge – Kutta

Έστω ότι έχουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

Αριθμητική Επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων
Μέθοδοι Runge – Kutta

- Η μέθοδος Runge-Kutta δεύτερης τάξης αποτελεί μία γενίκευση της μεθόδου Euler.
- Χρησιμοποιώντας το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης της συνάρτησης y έχουμε ότι

$$y(x_i + \mathrm{h}) = y(x_i) + \mathrm{h}y'(x_i) + \frac{\mathrm{h}^2}{2} y''(x_i)$$

Αριθμητική Επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων
Μέθοδοι Runge – Kutta

Μέσω της σχέσης (1) και λόγω του ότι

$$x_i + h = x_{i+1}$$

οδηγούμαστε στην παρακάτω ισοδύναμη μορφή

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \mathrm{h}f(x_i, y_i) + \frac{\mathrm{h}^2}{2} y''(x_i)$$

Όμως

$$y''(x_i) \cong \frac{y'(x_{i+1}) - y'(x_i)}{h} = \frac{f(x_{i+1}, y_{i+1}) - f(x_i, y_i)}{h}$$

Αριθμητική Επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων
Μέθοδοι Runge – Kutta

Επομένως έχουμε ότι

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_{i+1}, y_{i+1}) - f(x_i, y_i)]$$

Από τη μέθοδο Euler έχουμε ότι

$$y_{i+1} \cong y_i + \mathrm{h} \cdot f(x_i, y_i)$$

Αριθμητική Επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων
Μέθοδοι Runge – Kutta

Συνεπώς οδηγούμαστε στον αναδρομική ακολουθία, **Runge - Kutta δεύτερης τάξης**:

$$\boldsymbol{y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f\left(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i)\right) + f(x_i, y_i)\right]}$$

Στη συνέχεια δίνονται οι μέθοδο επίλυσης Ruge – Kutta δεύτερης και τρίτης τάξης.

Αριθμητική Επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων
Μέθοδοι Runge – Kutta

Πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (1)$$

- **Runge - Kutta δεύτερης τάξης**:

$$\boldsymbol{y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f\big(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i)\big) + f(x_i, y_i)\right]}$$

Αριθμητική Επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων **Μέθοδοι Runge – Kutta**

- **Runge - Kutta τρίτης τάξης**:

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_1\right)$$

$$k_3 = f(x_i + h, y_i + hk_2)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}[k_1 + 4k_2 + k_3]$$

Παράδειγμα 1

Να λυθεί στο διάστημα $[0,4]$ το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\frac{dy}{dx} + 2y = e^{-4x} \quad ; \quad y(0) = 1$$

διακριτοποιώντας το διάστημα $[0,4]$ σε υποδιαστήματα μήκους $h = 0,5$.

Παράδειγμα 1

- Έχουμε:

$$\frac{dy}{dx} + 2y = e^{-4x} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = e^{-4x} - 2y = f(x, y)$$

- Διακριτοποιούμε το διάστημα σε υποδιαστήματα μήκους $h = 0{,}5$ και χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις διαφορών **Runge – Kutta δεύτερης τάξης**:

$$y(x_{i+1}) \cong y(x_i) + \frac{0.5}{2} \cdot \left[f(x_i, y_i) + f\big(x_{i+1}, y_i + \mathrm{h} \cdot f(x_i, y_i)\big)\right]$$

Παράδειγμα 1

x_i	y_i	x_i	y_i
0	1	2.5	0.034145182
0.5	0.533833821	3	0.017074127
1	0.27149582	3.5	0.008537271
1.5	0.136367598	4	0.004268664
2	0.068267665	2.5	0.034145182

Μέθοδοι Runge – Kutta / Υλοποίηση μέσω Octave

Η υλοποίηση της μεθόδου Runga – Kutta για το συγκεκριμένο παράδειγμα με χρήση Octave ή Matlab επιτυγχάνεται με τον παρακάτω αλγόριθμο.

Μέθοδοι Runge – Kutta Octave

```
a=0;
b=4;
h=0.5;
N=(b-a)/h;
f=@(x,y)exp(-4*x)-2*y;
x(1)=a;
y(1)=1;
```

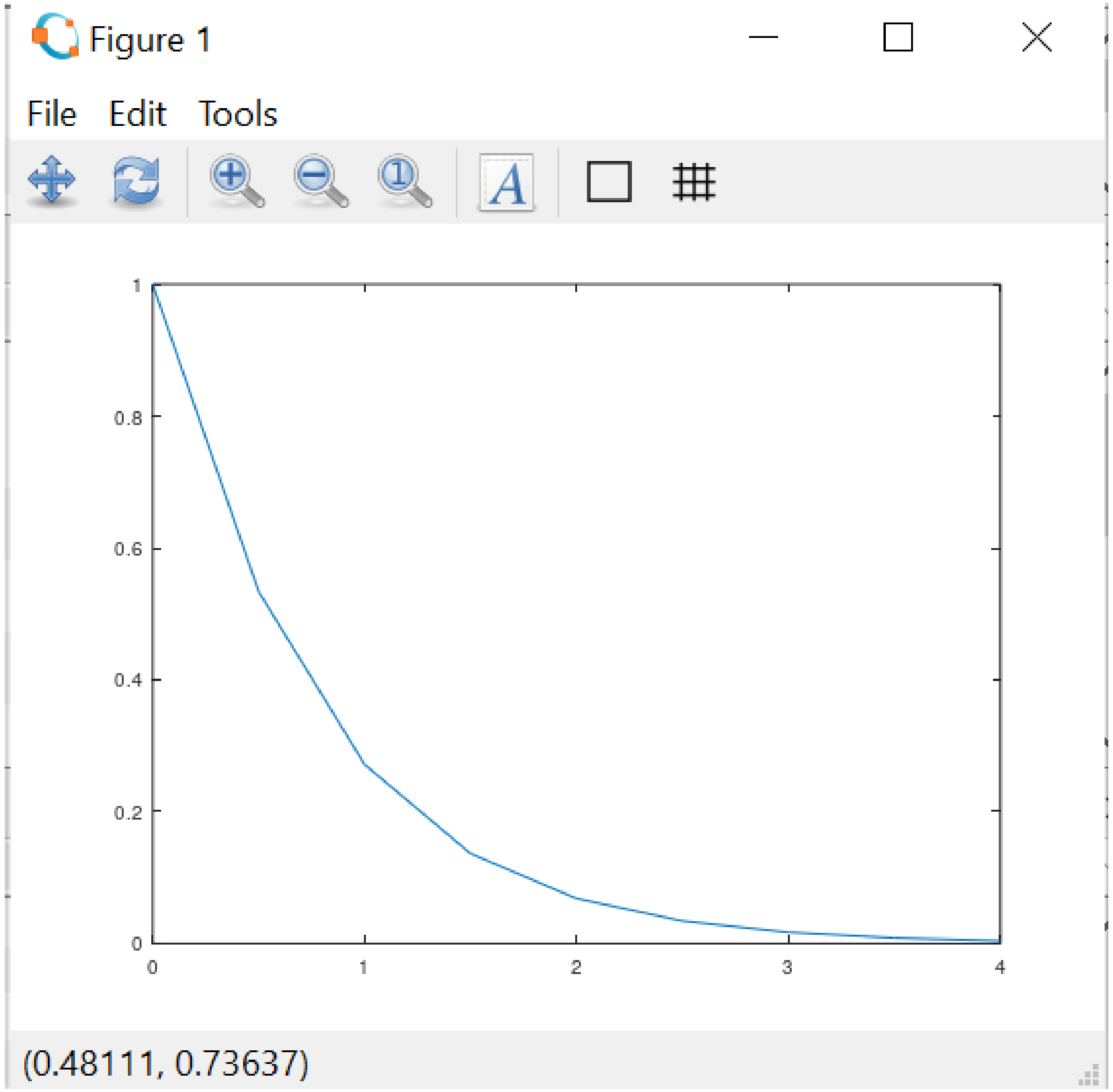
Μέθοδοι Runge – Kutta Octave

```
for n=1:N
z(n)=f(x(n),y(n));
x(n+1)=x(n)+h;
y(n+1)=y(n)+(h/2)*(z(n)+f(x(n+1),y(n)
+h*z(n)));
end
```

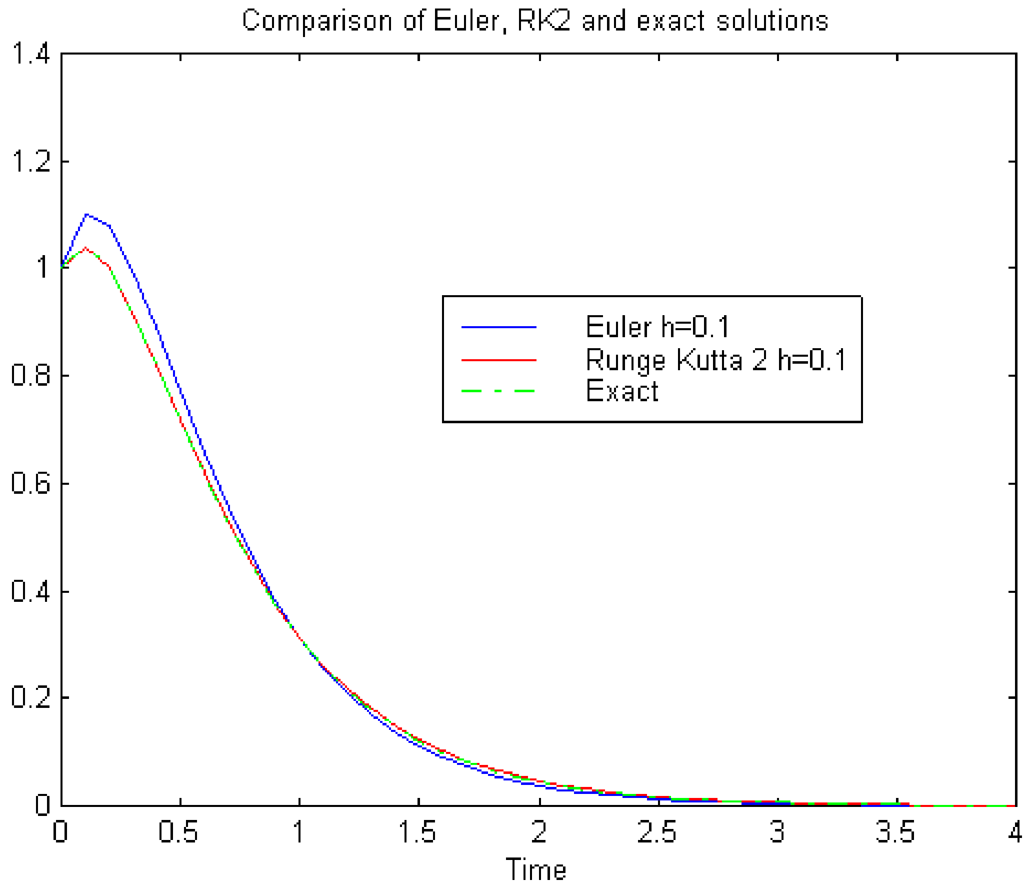
Μέθοδοι Runge – Kutta Octave

```
>> a=0;
>> b=4;
>> h=0.5;
>> N=(b-a)/h;
>> f=@(x,y)exp(-4*x)-2*y;
>> x(1)=a;
>> y(1)=1;
>> for n=1:N
z(n)=f(x(n),y(n));
x(n+1)=a+n*h;
y(n+1)=y(n)+(h/2)*(z(n)+f(x(n+1),y(n)+h*z(n)));
end
>> x
x =

 Columns 1 through 8:

        0    0.5000    1.0000    1.5000    2.0000    2.5000    3.0000    3.5000

 Column 9:

   4.0000

>> y
y =

 Columns 1 through 5:

   1.0000e+00   5.3383e-01   2.7150e-01   1.3637e-01   6.8268e-02

 Columns 6 through 9:

   3.4145e-02   1.7074e-02   8.5373e-03   4.2687e-03
```

Μέθοδοι Runge – Kutta Octave



Σύγκριση Μεθόδων Runge – Kutta , Euler



Ασκήσεις

Εφαρμόστε την μέθοδο Euler και την Runge-Kutta 2ης τάξης για την επίλυση των επόμενων προβλημάτων:

Ασκήσεις

1. $y' = y + e^x \qquad y(0) = 1$
2. $y' = x - \dfrac{y}{x} \qquad y(1) = 0$
3. $y' = y + e^x\sqrt{y} \qquad y(0) = 0$
4. $y' = \dfrac{y}{4x} + \dfrac{x}{y^3} \qquad y(1) = 1$
5. $y' = \dfrac{y + xy^2}{x} \qquad y(1) = 1$
6. $y' = xy^2 - \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{x} \qquad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$
7. $y' = y - \dfrac{1}{4}y^{3/2}, \qquad y(0) = \dfrac{1}{4}$
8. $y' = \dfrac{2y}{t} + t\tan\left(\dfrac{y}{t^2}\right) \qquad y(1) = 2$
9. $(t-3)y'' + y = 0 \qquad y(1) = 1 \qquad y'(1) = -3$
10. $y'' + x^3 = 0 \qquad y(1) = 1 \qquad y'(1) = 0.$