ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΔΙΔΑΣΚΟΥΣΑ: Δ. ΚΟΥΛΟΥΜΠΟΥ

Εισαγωγή

- **Συνήθης Διαφορική Εξίσωση (ΣΔΕ)** είναι κάθε εξίσωση, που περικλείει (την άγνωστη) συνάρτηση μιας μεταβλητής και παραγωγούς αυτής πρώτης ή ανώτερης τάξης
- **Μερική Διαφορική Εξίσωση (ΜΔΕ)**, είναι κάθε εξίσωση, που περικλείει (την άγνωστη) συνάρτηση δύο ή περισσότερων μεταβλητών και μερικές παραγωγούς αυτής πρώτης ή ανώτερης τάξης.

Εισαγωγή

- Οι ΜΔΕ μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να περιγράψουν μια ευρεία ποικιλία φαινομένων, όπως ήχο, θερμότητα, ηλεκτροστατική, ηλεκτροδυναμική, ροή του υγρού, ελαστικότητα κ.α.

Εισαγωγή

- Αυτά τα φαινομενικά διαφορετικά φυσικά φαινόμενα μπορεί να υλοποιούνται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο με τη ΜΔΕ, που δείχνει ότι αυτά διέπονται από τις ίδιες βασικές δυναμικές.

Εισαγωγή

- Όπως οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις συχνά απλοποιούν μονοδιάστατα δυναμικά συστήματα , έτσι και οι μερικές διαφορικές εξισώσεις συχνά απλοποιούν πολυδιάστατα συστήματα.
- Οι ΜΔΕ βρίσκουν τη γενίκευση τους στις στοχαστικές μερικές διαφορικές εξισώσεις.

Εισαγωγή

Η μελέτη των μερικών διαφορικών εξισώσεων ασχολείται κυρίως με:

- Την διερεύνηση της ύπαρξης και της μοναδικότητας των λύσεων τους
- Την ευστάθεια των λύσεων τους σε μικρές διαταραχές
- Μεθόδους κατασκευής λύσεων

Παρατηρήσεις

- Όταν γράφουμε τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης της συνάρτησης u θα υποθέτουμε ότι όλες οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης της u είναι συνεχείς.
- Όταν γράφουμε τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης της u, θα υποθέτουμε ότι όλες οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης της u είναι συνεχείς.

Παρατηρήσεις

- Είναι γνωστό από τον Απειροστικό Λογισμό πολλών μεταβλητών **(Θεώρημα Swartz)** ότι οι ισότητες των μεικτών παραγώγων

  - $u_{xy} = u_{yx}$
  - $u_{xz} = u_{zx}$,
  - $u_{yz} = u_{zy}$

ισχύουν στην περίπτωση που αυτές είναι συνεχείς.

Παρατηρήσεις

- Ορίζονται και μερικές παράγωγοι τάξης ανώτερης του δύο και όποτε συναντάμε τέτοιες παραγώγους θα θεωρούμε ότι πρέπει να είναι συνεχείς
- Στις ΜΔΕ δεν αρκεί η γνώση αρχικών συνθηκών για την εύρεση της συνάρτησης , αλλά χρειάζεται να ξέρουμε τις συνοριακές συνθήκες της περιοχής για την οποία η άγνωστη συνάρτηση ορίζεται.

Ορισμοί – Συμβολισμοί

- **Τάξη μιας ΜΔΕ**, είναι η τάξη της μεγαλύτερης μερικής παραγωγού που παρουσιάζεται στην εξίσωση.
- **Βαθμός μιας ΜΔΕ**, είναι η δύναμη στην οποία είναι υψωμένη η μεγαλύτερη τάξης παράγωγος.

Ορισμοί – Συμβολισμοί

- **Γραμμική ΜΔΕ**, είναι εκείνη η εξίσωση της οποίας όλοι οι όροι είναι πρώτου βαθμού ως προς την άγνωστη συνάρτηση και τις παραγωγούς αυτής.
- **Ομογενής γραμμική ΜΔΕ**, είναι η εξίσωση της οποίας κάθε όρος περιέχει, είτε την άγνωστη συνάρτηση ή κάποια από τις μερικές παραγώγους αυτής.

Γνωστές Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Μερικές από τις πιο γνωστές διαφορικές εξισώσεις είναι οι εξής:

- **Εξίσωση Ροής (Flow Equation)**: $cu_x + u_t = 0$ (Ομογενής Γραμμική ΜΔΕ πρώτης τάξης)
- **Εξίσωση Θερμότητας (Heat Equation)**: $c^2u_{xx} - u_t = 0$ (Ομογενής Γραμμική ΜΔΕ δεύτερης τάξης)

Γνωστές Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

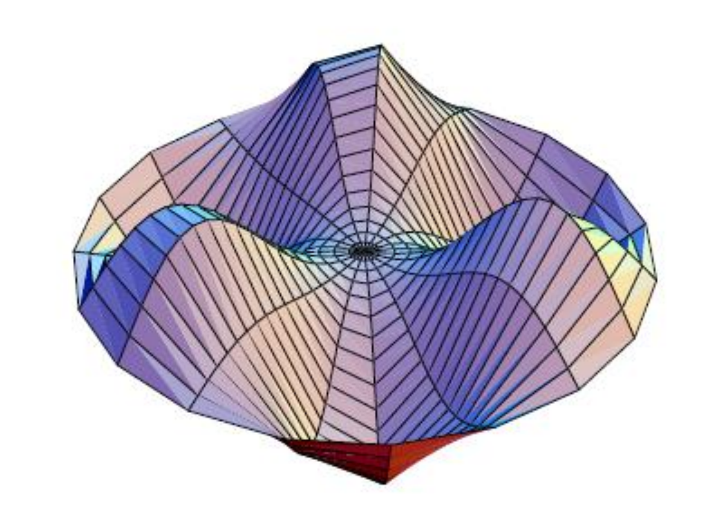
- **Εξίσωση Κύματος (Wave Equation):** $c^2 u_{xx} - u_{tt} = 0$
(Ομογενής Γραμμική ΜΔΕ δεύτερης τάξης)
- **Εξίσωση Δυναμικού (Laplace Equation)**: $u_{xx} + u_{yy} = 0$
(Ομογενής Γραμμική ΜΔΕ δεύτερης τάξης)
- **Εξίσωση Poisson (Poisson Equation)**: $u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$
(Μη Ομογενής Γραμμική ΜΔΕ δεύτερης τάξης)

Γνωστές Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

- **Μη Γραμμική Εξίσωση Θερμότητας (Non Linear Heat Equation)**: $c^2 u_{xx} - u \cdot u_t = 0$ (Μη Γραμμική Ομογενής ΜΔΕ δεύτερης τάξης)

Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε το γράφημα μιας ειδικής λύσης της εξίσωσης κύματος **(Wave Equation)**

$$c^2 u_{xx} + u_{tt} = 0$$



Παραδείγματα Επίλυσης ΜΔΕ Ειδικού Τύπου – Παράδειγμα $\mathbf{1}$

Έστω η ΜΔΕ $\boldsymbol{u_x = 0}$ $\mathbf{(1)}$, όπου $\boldsymbol{u(x,y)}$: $\mathbb{R}^{\mathbf{2}} \longrightarrow \mathbb{R}$ η άγνωστη συνάρτηση.

Ολοκληρώνοντας την (1) ως προς x έχουμε $u(x,y) = f(y)$.

Αποδείξαμε επομένως ότι κάθε λύση της (1) έχει τύπο

$u(x,y) = f(y)$, όπου η συνάρτηση f είναι συνάρτηση μιας μεταβλητής (συνεχώς παραγωγίσιμη) .

Παράδειγμα $\mathbf{1}$

Αντίστροφα , έστω η συνάρτηση με τύπο $u(x, y) = f(y)$,

τότε προφανώς ισχύει ότι $u_x = 0$ αφού η συνάρτηση $f(y)$ είναι σταθερή ως προς y.

Επομένως οι λύσεις της (1) περιγράφονται πλήρως με τον τύπο

$\boldsymbol{u(x, y) = f(y)}$ **για κάθε** $\boldsymbol{(x, y) \epsilon \mathbb{R}^2}$**.**

Παράδειγμα 2

Έστω η ΜΔΕ $\boldsymbol{u_{xx} = 0}$ $\mathbf{(1)}$, όπου $\boldsymbol{u(x,y)}$: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ η άγνωστη συνάρτηση.

Ολοκληρώνοντας την (1) ως προς x έχουμε $u_x = f(y)$ (2).

Ολοκληρώνοντας την (2) ως προς x έχουμε $u(x,y) = xf(y) + \mathrm{g}(y)$ (3), όπου οι συναρτήσεις f, g είναι συναρτήσεις μιας μεταβλητής (συνεχώς παραγωγίσιμες) .

Παράδειγμα 2

Αποδείξαμε επομένως ότι κάθε λύση της (1) έχει τύπο $u(x,y) = xf(y) + g(y)$

Αντίστροφα , έστω η συνάρτηση με τύπο $u(x,y) = xf(y) + \mathrm{g}(y)$τότε προφανώς ισχύει ότι

$u_{xx} = 0$

Επομένως οι λύσεις της (1) περιγράφονται πλήρως με τον τύπο

$\boldsymbol{u(x,y) = xf(y) + \mathrm{g}(y)}$ **για κάθε** $(x,y) \epsilon \mathbb{R}^2$**.**

Παράδειγμα 3

Έστω η ΜΔΕ $u_{xy} = 0$ (1), όπου $u(x, y)$: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ η άγνωστη συνάρτηση.

Ολοκληρώνοντας την (1) ως προς x έχουμε $u_y = f(y)$ (2).

Ολοκληρώνοντας την (2) ως προς y έχουμε $u(x, y) = \int f(y)\, dy + \mathrm{g}(x)$ (3), όπου οι συναρτήσεις f, g είναι συναρτήσεις μιας μεταβλητής.

Παράδειγμα 3

Αποδείξαμε επομένως ότι κάθε λύση της (1) έχει τύπο

$$u(x,y) = \int f(y)\,dy + \mathrm{g}(x).$$

Αντίστροφα , έστω η συνάρτηση με τύπο $u(x,y) = \int f(y)\,dy + \mathrm{g}(x)$ τότε προφανώς ισχύει ότι

$$u_{xy} = 0$$

.

Παράδειγμα 3

Επομένως οι λύσεις της (1) περιγράφονται πλήρως με τον τύπο

$\boldsymbol{u(x,y) = \int f(y)\, dy + \mathrm{g}(x)}$**για κάθε** $\boldsymbol{(x,y)\, \epsilon\, \mathbb{R}^2}$**.**

Παράδειγμα 4

Έστω η ΜΔΕ $u_{xx} + u = 0$ (1), όπου $u(x,y)$: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ η άγνωστη συνάρτηση.

Θυμόμαστε από τις ΣΔΕ ότι η διαφορική εξίσωση

$\varphi''(x) + \varphi(x) = 0$ έχει γενική λύση

$\varphi(x) = c_1 cosx + c_2 sinx$, όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ αυθαίρετες σταθερές.

Παράδειγμα 4

Αντίστοιχα θεωρώντας το y προσωρινά σταθερό και υποθέτοντας ότι η $u(x, y)$ είναι λύση της (1) , τότε βρίσκουμε ότι

u$(x, y) = c_1(y)cosx + c_2(y)sinx$ (όπου $c_1(y), c_2(y)$ συναρτήσεις μιας μεταβλητής , εφόσον οι c_1, c_2 είναι σταθερές ως προς x αλλά όχι και ως προς y)

Αποδείξαμε επομένως ότι κάθε λύση της (1) έχει τύπο

$$u(x, y) = c_1(y)cosx + c_2(y)sinx$$

Παράδειγμα 4

Αντίστροφα , έστω η συνάρτηση με τύπο

$$u(x, y) = c_1(y)cosx + c_2(y)sinx$$

τότε προφανώς ισχύει ότι

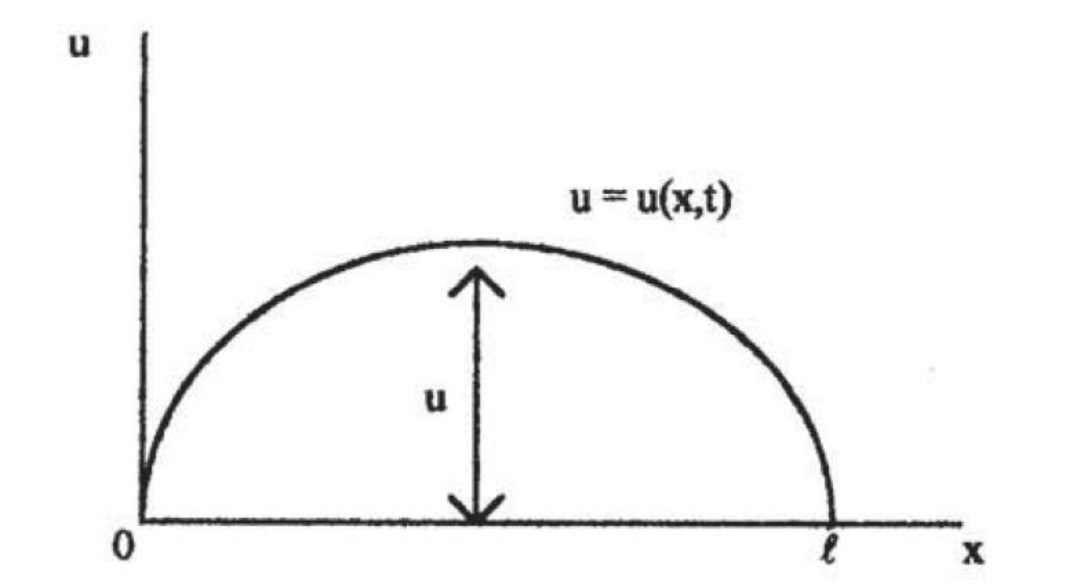
$$u_{xx} + u = 0$$

Επομένως οι λύσεις της (1) περιγράφονται πλήρως με τον τύπο

$u(x, y) = c_1(y)cosx + c_2(y)sinx$ για κάθε $(x, y) \epsilon \mathbb{R}^2$.

Εξίσωση Κύματος Μιας Διάστασης

Θεωρούμε μια λεπτή ελαστική χορδή μήκους Ol μήκους l με σταθερά τα άκρα της, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Εξίσωση Κύματος Μιας Διάστασης

- Απομακρύνουμε την χορδή από την θέση ισορροπίας και την αφήνουμε ελεύθερη.
- Κάθε σημείο x της χορδής κινείται ευθύγραμμα στο επίπεδο Oxu και έχει την τυχούσα χρονική στιγμή t απομάκρυνση $u = u(x, t)$, η οποία αποδεικνύεται ότι πληρεί την ΜΔΕ

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \qquad c > 0 \quad (1)$$

Εξίσωση Κύματος Μιας Διάστασης

- Η εξίσωση (1) ονομάζεται εξίσωση κύματος μιας διάστασης (Wave Equation)
- Αν τα άκρα της χορδής κρατούνται σταθερά στις θέσεις O και l , τότε η απομάκρυνση u των σημείων αυτών ικανοποιεί τις σχέσεις (συνοριακές συνθήκες)

$$u(0,t) = 0, u(l,t) = 0, \qquad t > 0 \quad (2)$$

Εξίσωση Κύματος Μιας Διάστασης – Επίλυση

Θα λύσουμε το παρακάτω πρόβλημα της εξίσωσης κύματος μιας διάστασης με την μέθοδο χωρισμού μεταβλητών.

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \qquad c > 0 \quad (1)$$

$$u(0,t) = 0, u(l,t) = 0, \qquad t > 0 \quad (2)$$

Εξίσωση Κύματος Μιας Διάστασης – Επίλυση

Δηλαδή θα βρούμε συνάρτηση $u(x,t)$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις $(1),(2)$.

Η επίλυση θα πραγματοποιηθεί σε δύο βήματα.

Εξίσωση Κύματος Μιας Διάστασης – Επίλυση

<u>Πρώτο Βήμα:</u> Λύνουμε την εξίσωση (1) με την μέθοδο των χωρισμού των μεταβλητών. Δηλαδή ζητάμε λύσεις $u(x,t)$ της (1)

Της μορφής

$$u(x,t) = \mathrm{F}(x)G(t)$$

Έχουμε:

$u_x = \mathrm{F}'(x)G(t)$ $u_t = \mathrm{F}(x)G'(t)$

$u_{xx} = \mathrm{F}''(x)G(t)$ $\qquad u_{tt} = \mathrm{F}(x)G''(t)$

Εξίσωση Κύματος Μιας Διάστασης – Επίλυση

Άρα η εξίσωση (1) ανάγεται στην μορφή

$$\mathrm{F}(x)G''(t) - c^2\mathrm{F}''(x)G(t) = 0$$

Ή

$$\mathrm{F}(x)G''(t) -= c^2\mathrm{F}''(x)G(t)$$

Ή ισοδύναμα

$$\frac{\mathrm{F}''(x)}{\mathrm{F}(x)} = \frac{\mathrm{G}''(t)}{c^2\mathrm{G}(t)}$$

Εξίσωση Κύματος Μιας Διάστασης – Επίλυση

Επειδή στην τελευταία σχέση το πρώτο μέλος είναι συνάρτηση μόνο της μεταβλητής x και το δεύτερο μόνο της t, έπεται ότι η τελευταία σχέση είναι ισοδύναμη με την σχέση

$$\frac{\mathrm{F}''(x)}{\mathrm{F}(x)} = \frac{\mathrm{G}''(t)}{c^2\mathrm{G}(t)} = k$$

Όπου k αυθαίρετη σταθερά

Εξίσωση Κύματος Μιας Διάστασης – Επίλυση

Οι εξισώσεις

$\mathrm{F}''(x) - k\mathrm{F}(x) = 0$ και $\mathrm{G}''(t) - kc^2\mathrm{G}(t) = 0$

είναι Ομογενείς Γραμμικές Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις με Σταθερούς Συντελεστές. Επομένους με γνωστές μεθόδους βρίσκουμε τον τύπο των συναρτήσεων τους για τις διάφορες τιμές της σταθεράς $k \in \mathbb{R}$.

Εξίσωση Κύματος Μιας Διάστασης – Επίλυση

1η Περίπτωση: Αν $k > 0$ τότε $F(x) = c_1 e^{\sqrt{k}x} + c_2 e^{-\sqrt{k}x}$

Και $\mathrm{G}(t) = b_1 e^{c\sqrt{k}t} + b_2 e^{-c\sqrt{k}t}$

2η Περίπτωση: Αν $k = 0$ τότε $F(x) = c_1 + c_2 x$

Και $\mathrm{G}(t) = b_1 + b_2 t$

Εξίσωση Κύματος Μιας Διάστασης – Επίλυση

3η Περίπτωση: Αν $k < 0$ τότε $F(x) = c_1 sin\left(\sqrt{-k}x\right) + c_2 cos\left(\sqrt{-k}x\right)$ και

$$\mathrm{G}(t) = b_1 sin\left(c\sqrt{-k}t\right) + b_2 cos\left(c\sqrt{-k}t\right)$$

Όπου $b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ σταθερές.

Εξίσωση Κύματος Μιας Διάστασης – Επίλυση

Δεύτερο Βήμα:

Βρίσκουμε τις σταθερές $b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ώστε η

$u(x,t) = \mathrm{F}(x)G(t)$ να πληρεί τις συνοριακές συνθήκες

$$u(0,t) = 0, u(l,t) = 0, \qquad t > 0 \quad (2)$$

Εξίσωση Κύματος Μιας Διάστασης – Επίλυση

<u>Για την 1η περίπτωση:</u>

$u(0,t)=0$

άρα

$$\mathrm{F}(0)G(t)=0 \;\; \kappa\alpha\iota \; \mathrm{F}(l)G(t)=0$$

Δηλαδή, $\mathrm{F}(0)=0 \;\; \kappa\alpha\iota \; \mathrm{F}(l)=0$

Άρα $c_2=0 \; \kappa\alpha\iota \; c_1 e^{\sqrt{k}l}+c_2 e^{-\sqrt{k}l}=0$ δηλαδή $c_1=c_2=0$

Επομένως $F=0$ Αδύνατο! Επομένως η 1η περίπτωση απορρίπτεται

Εξίσωση Κύματος Μιας Διάστασης – Επίλυση

<u>Για την 2η περίπτωση:</u>

$u(0,t)=0$ και $u(l,t)=0$ άρα

$$\mathrm{F}(0)G(t)=0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\mathrm{F}(l)G(t)=0$$

Δηλαδή, $\mathrm{F}(0)=0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\mathrm{F}(l)=0$

Άρα $c_1=0 \; \kappa\alpha\iota \; c_1+c_2 l=0$

δηλαδή $c_1=c_2=0$

Επομένως $F=0$ Αδύνατο! Επομένως η 2η περίπτωση απορρίπτεται

Εξίσωση Κύματος Μιας Διάστασης – Επίλυση

Για την 3η περίπτωση:

$u(0,t)=0$ και $u(l,t)=0$ άρα

$$\mathrm{F}(0)G(t)=0 \;\; \kappa\alpha\iota \; \mathrm{F}(l)G(t)=0$$

Δηλαδή, $\mathrm{F}(0)=0 \;\; \kappa\alpha\iota \; \mathrm{F}(l)=0$

Άρα $c_2=0 \; \kappa\alpha\iota \;\; c_1 sin\left(\sqrt{-k}l\right)+c_2 cos\left(\sqrt{-k}l\right)=0$

δηλαδή $c_2=0$ και $c_1=0$ ή $sin\left(\sqrt{-k}l\right)=0$

- Αν $c_1=c_2=0$, τότε $F=0$ Αδύνατο!

Εξίσωση Κύματος Μιας Διάστασης – Επίλυση

- Αν $c_2 = 0$ και $sin\left(\sqrt{-k}l\right) = 0$ τότε,

$c_2 = 0$ και $\sqrt{-k} = \frac{n\pi}{l}, n = 1,2,3, \ldots$

Επομένως $F(x) = c_1 sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$ με $c_1 \in \mathbb{R}$ σταθερά

Εξίσωση Κύματος Μιας Διάστασης – Επίλυση

Άρα

$$u(x,t) = c_1 sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(b_1 sin\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) + b_2 cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right)\right)$$

Με $b_1, b_2, c_1 \in \mathbb{R}$ σταθερές και $n = 1,2,3,\ldots$ η λύση του προβλήματος.

Βιβλιογραφία

- Finney, R.L & Giordano, F.R. (2004). Απειροστικός Λογισμός Τόμος Ι, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης
- Σημειώσεις για το Μάθημα Μαθηματικά Μοντέλα στις Φυσικές Επιστήμες, Χρήστος Νικολόπουλος
- Μ. Παπαδημητράκης, Σημειώσεις Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων