Αριθμητική Επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΉ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΊΗΣΗ

Γ΄ ΜΆΧΙΜΩΝ – Γ΄ ΜΗΧΑΝΙΚΏΝ

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: Γ. ΓΑΛΆΝΗΣ, Δ. ΚΟΥΛΟΥΜΠΟΎ

Εισαγωγή

- Πολλές διαφορικές εξισώσεις που προκύπτουν κατά την μαθηματική μοντελοποίηση πραγματικών προβλημάτων και εφαρμογών δεν μπορούν να επιλυθούν αναλυτικά με καμία από τις γνωστές μεθόδους.
- Ωστόσο προσεγγιστικές λύσεις τους μπορούν να ληφθούν με αριθμητικές μεθόδους.

Εισαγωγή

- Οι μέθοδοι που ακολουθούμε βασίζονται στην προσέγγιση της συνάρτησης $f(x)$ από κατάλληλες γραμμικές ή πολυωνυμικές συναρτήσεις και τη διακριτοποίηση του πεδίου ορισμού της συνάρτησης σε υποδιαστήματα.

Εισαγωγή

- Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y); \;\; y(x_0) = y_0 \qquad (1)$$

- Υποθέτουμε αρχικά ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει μοναδική λύση.
- Έστω ότι η συνάρτηση $h(x)$ είναι μία λύση της (1).

Εισαγωγή

- Αρχικά διακριτοποιούμε το διάστημα $[a, b]$ στο οποίο ορίζεται η άγνωστη συνάρτηση σε n υποδιαστήματα ίσου μήκους.

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

- Οι αριθμητικές μέθοδοι, επιλύουν το πρόβλημα αρχικών τιμών δίνοντας προσεγγίσεις της συνάρτησης y, στα σημεία

$$x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$$

Μέθοδος Euler

- Η βασική ιδέα που στηρίζεται η μέθοδος Euler, είναι η εξής:
- Αν το γράφημα της $h(x)$ διέρχεται από κάποιο δοσμένο σημείο $M\ (x, y)$ η κλίση του γραφήματος στο σημείο αυτό ισούται με $f(x, y)$.

Μέθοδος Euler

Πρόβλημα αρχικών τιμών $\frac{dy}{dx} = f(x,y);\ \ y(x_0) = y_0$

Θεώρημα Taylor: $y(x_0 + \Delta\mathrm{x}) = y(x_0) + \Delta\mathrm{x}\frac{dy}{dx}|_{x=x_0} + \frac{\Delta\mathrm{x}^2}{2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2}|_{x=x_0} + \cdots$

Μέθοδος Euler

Κρατώντας μόνο όρους πρώτης τάξης ($O(\Delta x^2)$):

$$y(x_0 + \Delta x) \cong y(x_0) + \Delta x \frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0} \Leftrightarrow$$

$$y(x_0 + \Delta x) \cong y(x_0) + \Delta x \cdot f(x_0, y_0)$$

Μέθοδος Euler

- Χρησιμοποιώντας τον τύπο αυτό και την αρχική τιμή $y(x_0) = y_0$ υπολογίζουμε τις τιμές της συνάρτησης σε σημεία που ισαπέχουν μεταξύ τους κατά h:
- $y_0 = y(x_0),$
- $\boldsymbol{y(x_{i+1}) \cong y(x_i) + \mathbf{h} \cdot f(x_i, y_i)}$ **[*Εξίσωση διαφορών*]**

Μέθοδος Euler

- Ένας άλλος τρόπος να προσεγγίσουμε τον τύπο του Euler, είναι να προσεγγίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης y μέσω των διαφορών της.

Μέθοδος Euler

$$y'(x_i) = \frac{y(x_i + h) - y(x_i)}{h},$$

Δηλαδή,

$$\boldsymbol{f(x_i, y_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h}}$$

Μέθοδος Euler

- Η οποία οδηγεί στη αναδρομική ακολουθία του τύπου του Euler.

$$y_0 = y(x_0),$$

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}_{i+1}) \cong \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}_i) + \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i) \ \ [\textbf{\textit{Εξίσωση διαφορών}}]$$

Μέθοδος Euler

x_0 **Δοσμένο**	y_o **Δοσμένο**
$\boldsymbol{x_1 = x_0 + h}$	$\boldsymbol{y_1 = y_0 + \mathrm{h} \cdot f(x_0, y_0)}$
$\boldsymbol{x_2 = x_1 + h}$	$\boldsymbol{y_2 = y_1 + \mathrm{h} \cdot f(x_1, y_1)}$
…………………	………………………
$\boldsymbol{x_n = x_{n-1} + h}$	$\boldsymbol{y_n = y_{n-1} + \mathrm{h} \cdot f(x_{n-1}, y_{n-1})}$

Παράδειγμα 1

Να λυθεί στο διάστημα $[0,1]$ το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\frac{dy}{dx} = -y \quad ; \quad y(0) = 1$$

Διακριτοποιώντας το διάστημα $[0,1]$ σε υποδιαστήματα

μήκους $h = 0,25$

Παράδειγμα 1

Λύση:

Διακριτοποιούμε το διάστημα σε υποδιαστήματα μήκους

$h = 0{,}25.$

$x_0 = 0, \qquad x_1 = 0{,}25, \qquad x_2 = 0{,}5, \qquad x_3 = 0{,}75, \qquad x_4 = 1$

Παράδειγμα 1

- Χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις διαφορών που προκύπτουν από τον τύπο Euler:

$y_0 = y(0) = 1,$

$y_1 = y(0.25) = y_0 + 0.25 \cdot f(x_0, y_0) = 0.7500$ (πραγμ. τιμή: -0.778801)

$y_2 = y(0.5) = y_1 + 0.25 \cdot f(x_1, y_1) = 0.5625$ (0.606531)

$y_3 = y(0.75) = y_2 + 0.25 \cdot f(x_2, y_2) = 0.4219$ (0.472367)

$y_4 = y(1) = y_3 + 0.25 \cdot f(x_3, y_3) = 0.3164$ (0.3677879)

Μέθοδος Euler Αλγόριθμος – Matlab – Octave

Η υλοποίηση της μεθόδου Euler με χρήση Octave ή Matlab επιτυγχάνεται με τον παρακάτω αλγόριθμο

```
a=0;
b=1;
h=0.25; %step's size
N=(b-a)/h; % Number of steps
f=@(x,y)-y; %Define the function f
x(1)=0; % The first value of x
y(1)=1 %The first value of y
```

Μέθοδος Euler Αλγόριθμος – Matlab – Octave

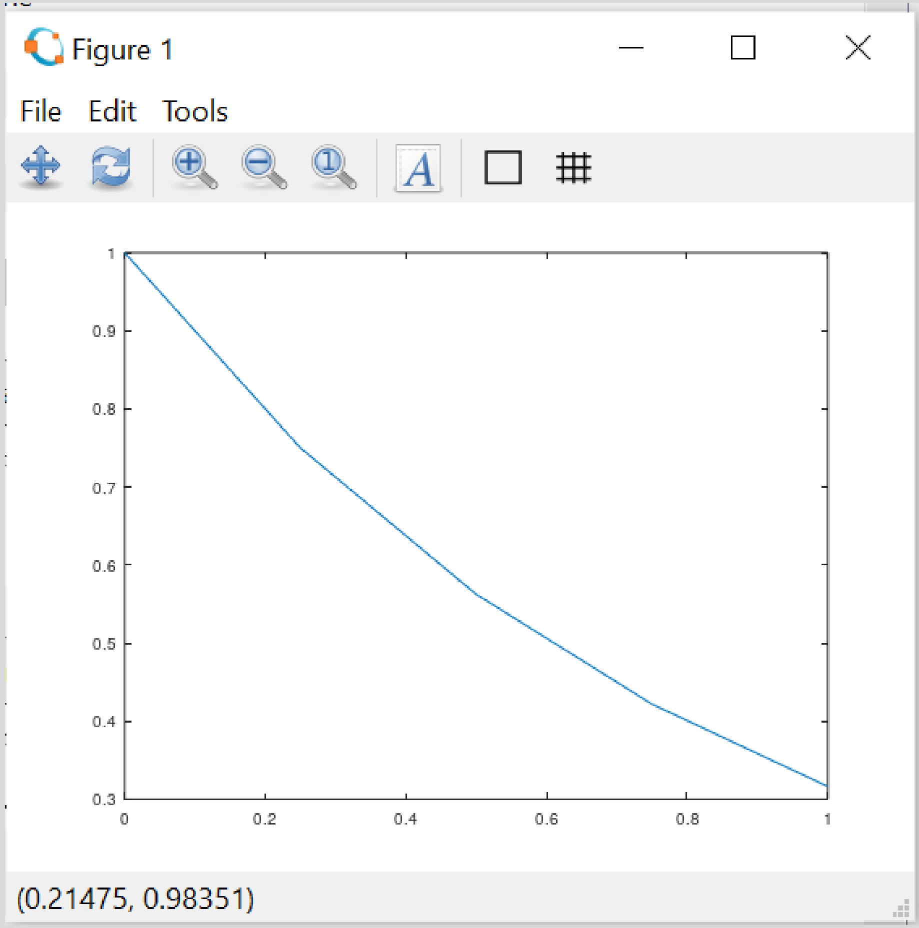
```
 for n=1:N
z(n)=f(x(n),y(n));
x(n+1)=x(n)+h;
y(n+1)=y(n)+h*(z(n));
end
plot(x,y)
x
y
```

Μέθοδος Euler Αλγόριθμος – Matlab – Octave

Παρατήρηση:

Για την εμφάνιση των τιμών της y και το γράφημα χρησιμοποιούμε την εντολή **plot(x,y)**

Μέθοδος Euler Αλγόριθμος – Matlab – Octave



Euler_1_2024.m

```
a=0;
b=1;
h=0.25;
N=(b-a)/h;
f=@(x,y)-y;
x(1)=0;
y(1)=1;
 for n=1:N
z(n)=f(x(n),y(n));
x(n+1)=x(n)+h;
y(n+1)=y(n)+h*(z(n));
end
plot(x,y)
```

Παράδειγμα 2

Να λυθεί στο διάστημα [0,4] το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\frac{dy}{dx} + 2y = e^{-4x} \quad ; \quad y(0) = 1$$

Διακριτοποιώντας το διάστημα $[0,4]$ σε υποδιαστήματα μήκους $h = 0{,}5$

Παράδειγμα 2

Έχουμε,

$$\frac{dy}{dx} + 2y = e^{-4x} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = e^{-4x} - 2y = f(x, y)$$

Διακριτοποιούμε το διάστημα σε υποδιαστήματα μήκους h=0.5 και χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις διαφορών που προκύπτουν από τον τύπο Euler:

$$y_{i+1} = y_i + 0.5 \cdot f(x_i, y_i)$$

Μέθοδος Euler Αλγόριθμος – Matlab – Octave

x_i	y_i	x_i	y_i
0	1	2.5	2.27E-05
0.5	0.067668	3	3.07E-06
1	0.009158	3.5	4.16E-07
1.5	0.001239	4	5.63E-08
2	0.000168	2.5	2.27E-05

Μέθοδος Euler Αλγόριθμος – Matlab – Octave

Η υλοποίηση της μεθόδου Euler με χρήση Octave ή Matlab επιτυγχάνεται με τον παρακάτω αλγόριθμο

```
>> a=0;
>> b=4;
>> h=0.5;
>> N=(b-a)/h;
>> y(1)=1;
>> x(1)=0;
```

Μέθοδος Euler Αλγόριθμος – Matlab – Octave

```
>> for n=1:N
x(n+1)=a+n*h;
y(n+1)=y(n)+h*(exp(-4*x(n))-2*y(n));
end
```

Μέθοδος Euler Αλγόριθμος – Matlab – Octave

```
Command Window
>> a=0;
>> b=4;
>> h=0.5;
>> N=(b-a)/h;
>> y(1)=1;
>> x(1)=0;
>> for n=1:N
x(n+1)=a+n*h;
y(n+1)=y(n)+h*(exp(-4*x(n))-2*y(n));
end
>> x
x =

 Columns 1 through 8:

        0    0.5000    1.0000    1.5000    2.0000    2.5000    3.0000    3.5000

 Column 9:

   4.0000

>> y
y =

 Columns 1 through 5:

   1.0000e+00   5.0000e-01   6.7668e-02   9.1578e-03   1.2394e-03

 Columns 6 through 9:

   1.6773e-04   2.2700e-05   3.0721e-06   4.1576e-07
```

Μέθοδος Euler Αλγόριθμος – Matlab – Octave