

Αριθμητική Επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΉ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΪΗΣΗ

Γ΄ ΜΆΧΙΜΩΝ – Γ΄ ΜΗΧΑΝΙΚΉΝ

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: Γ. ΓΑΛΆΝΗΣ, Δ. ΚΟΥΛΟΥΜΠΟΥ

Εισαγωγή

- Πολλές διαφορικές εξισώσεις που προκύπτουν κατά την μαθηματική μοντελοποίηση πραγματικών προβλημάτων και εφαρμογών δεν μπορούν να επιλυθούν αναλυτικά με καμία από τις γνωστές μεθόδους.
- Ωστόσο προσεγγιστικές λύσεις τους μπορούν να ληφθούν με αριθμητικές μεθόδους.

Εισαγωγή

- Οι μέθοδοι που ακολουθούμε βασίζονται στην προσέγγιση της συνάρτησης $f(x)$ από κατάλληλες γραμμικές ή πολυωνυμικές συναρτήσεις και τη διακριτοποίηση του πεδίου ορισμού της συνάρτησης σε υποδιαστήματα.

Εισαγωγή

- Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y); \quad y(x_0) = y_0 \quad (1)$$

- Υποθέτουμε αρχικά ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει μοναδική λύση.

Εισαγωγή

- Στη συνέχεια διακριτοποιούμε το διάστημα $[a, b]$ στο οποίο ορίζεται η άγνωστη συνάρτηση σε N υποδιαστήματα ίσου μήκους.

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

- Οι αριθμητικές μέθοδοι, επιλύουν το πρόβλημα αρχικών τιμών δίνοντας προσεγγίσεις της συνάρτησης y , στα σημεία

$$x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$$

Εισαγωγή

- Οι αριθμητικές μέθοδοι για
- Στη συνέχεια διακριτοποιούμε το διάστημα $[a, b]$ στο οποίο ορίζεται η άγνωστη συνάρτηση σε N υποδιαστήματα ίσου μήκους.

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

Μέθοδος Euler

Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y); \quad y(x_0) = y_0 \quad (1)$$

Το οποίο υποθέτουμε ότι έχει μία και μοναδική λύση.

■ Έστω ότι η συνάρτηση $h(x)$ είναι μία λύση της (1).

Μέθοδος Euler

- Η βασική ιδέα που στηρίζεται η μέθοδος Euler, είναι η εξής: Αν το γράφημα της $h(x)$ διέρχεται από κάποιο δοσμένο σημείο $M(x, y)$ η κλίση του γραφήματος στο σημείο αυτό ισούται με $f(x, y)$.

Μέθοδος Euler

Πρόβλημα αρχικών τιμών $\frac{dy}{dx} = f(x, y); y(x_0) = y_0$

Θεώρημα Taylor: $y(x_0 + \Delta x) = y(x_0) + \Delta x \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_0} + \frac{\Delta x^2}{2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{x=x_0} + \dots$

Κρατώντας μόνο όρους πρώτης τάξης ($O(\Delta x^2)$):

$$y(x_0 + \Delta x) \cong y(x_0) + \Delta x \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_0} \Leftrightarrow$$

$$y(x_0 + \Delta x) \cong y(x_0) + \Delta x \cdot f(x_0, y_0)$$

Μέθοδος Euler

- Χρησιμοποιώντας τον τύπο αυτό και την αρχική τιμή $y(x_0) = y_0$ υπολογίζουμε τις τιμές της συνάρτησης σε σημεία που ισαπέχουν μεταξύ τους κατά h :
- $y_0 = y(x_0)$,
- $y(x_{i+1}) \cong y(x_i) + h \cdot f(x_i, y_i)$ [*Εξίσωση διαφορών*]

Μέθοδος Euler

- Ένας άλλος τρόπος να προσεγγίσουμε τον τύπο του Euler, είναι να προσεγγίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης y μέσω των διαφορών της.

Μέθοδος Euler

$$y'(x_i) = \frac{y(x_i + h) - y(x_i)}{h},$$

Δηλαδή,

$$f(x_i, y_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h}$$

Μέθοδος Euler

- Η οποία οδηγεί στη αναδρομική ακολουθία του τύπου του Euler.

$$y_0 = y(x_0),$$

$$y(x_{i+1}) \cong y(x_i) + h \cdot f(x_i, y_i) \text{ [Εξίσωση διαφορών]}$$

Μέθοδος Euler

x_0 Δοσμένο	y_0 Δοσμένο
$x_1 = x_0 + h$	$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$
$x_2 = x_1 + h$	$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1)$
.....
$x_n = x_{n-1} + h$	$y_n = y_{n-1} + h \cdot f(x_{n-1}, y_{n-1})$

Μέθοδος Euler

Παράδειγμα 1:

Να λυθεί στο διάστημα $[0,1]$ το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\frac{dy}{dx} = -y \quad ; \quad y(0) = 1$$

Μέθοδος Euler

Λύση:

Διακριτοποιούμε το διάστημα σε υποδιαστήματα μήκους $h=0.25$:

$$x_0 = 0, x_1 = 0.25, x_2 = 0.5, x_3 = 0.75, x_4 = 1$$

Μέθοδος Euler

- Χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις διαφορών που προκύπτουν από τον τύπο Euler:

$$y_0 = y(0) = 1,$$

$$y_1 = y(0.25) = y_0 + 0.25 \cdot f(x_0, y_0) = 0.7500 \text{ (πραγμ. τιμή: } -0.778801)$$

$$y_2 = y(0.5) = y_1 + 0.25 \cdot f(x_1, y_1) = 0.5625 \text{ (} 0.606531)$$

$$y_3 = y(0.75) = y_2 + 0.25 \cdot f(x_2, y_2) = 0.4219 \text{ (} 0.472367)$$

$$y_4 = y(1) = y_3 + 0.25 \cdot f(x_3, y_3) = 0.3164 \text{ (} 0.3677879)$$

Μέθοδος Euler Αλγόριθμος – Matlab – Octave

Η υλοποίηση της μεθόδου Euler με χρήση Octave ή Matlab επιτυγχάνεται με τον παρακάτω αλγόριθμο

```
a=0;
```

```
b=1;
```

```
h=0.25 %step's size
```

```
N=(b-a)/h % Number of steps
```

```
f=@(x,y)-y; %Define the function  $f$ 
```

```
x(1)=0; % The first value of  $x$ 
```

```
y(1)=1 %The first value of  $y$ 
```

Μέθοδος Euler Αλγόριθμος – Matlab – Octave

for n=1:N

z(n)=f(x(n),y(n));

x(n+1)=x(n)+h;

y(n+1)=y(n)+h*(z(n));

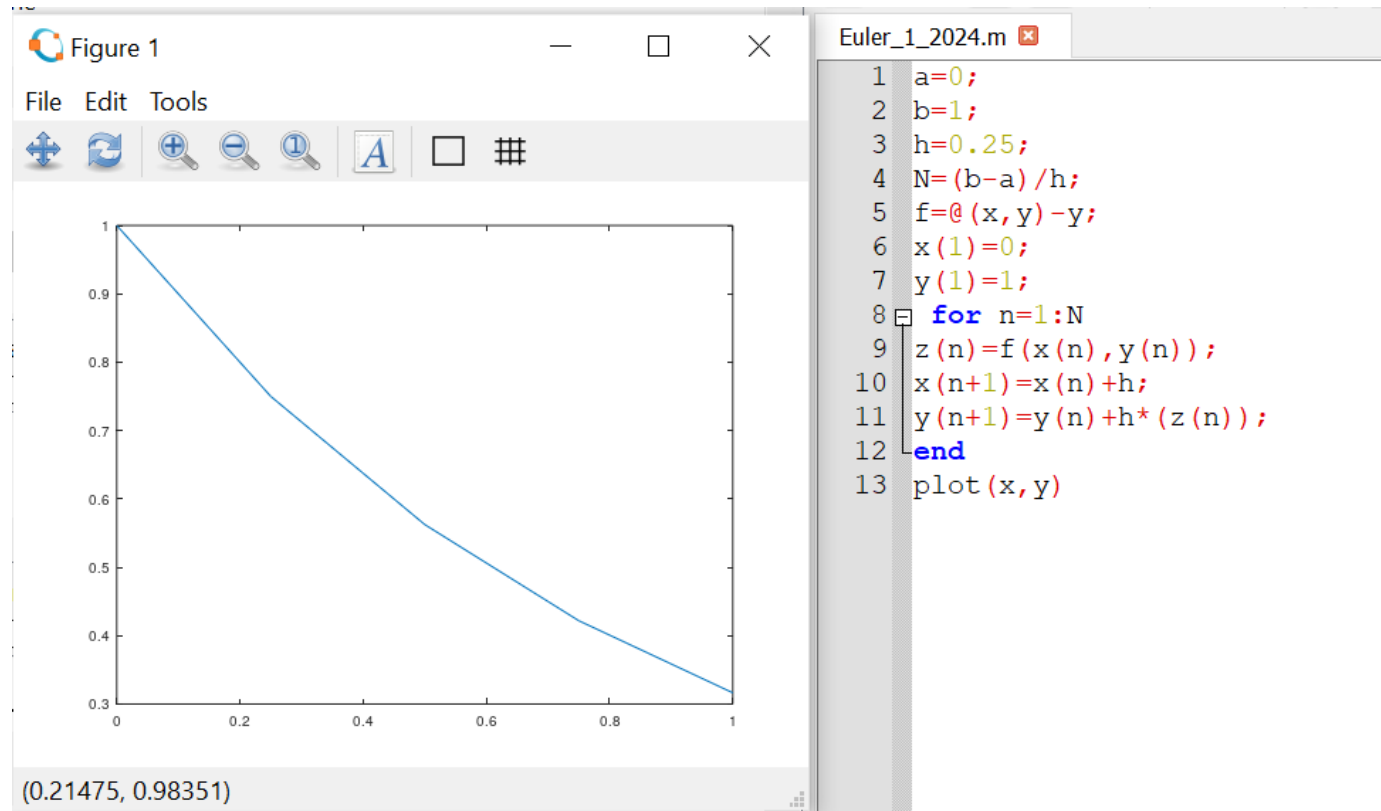
end

plot(x,y)

Παρατήρηση:

Για την εμφάνιση των τιμών της y και το γράφημα χρησιμοποιούμε την εντολή plot(x,y)

Μέθοδος Euler Αλγόριθμος – Matlab – Octave



Μέθοδος Euler Αλγόριθμος – Matlab – Octave

Παράδειγμα 2: Να λυθεί στο διάστημα $[0,4]$ το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\frac{dy}{dx} + 2y = e^{-4x} \quad ; \quad y(0) = 1$$

Μέθοδος Euler Αλγόριθμος – Matlab – Octave

Έχουμε,

$$\frac{dy}{dx} + 2y = e^{-4x} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = e^{-4x} - 2y = f(x, y)$$

Διακριτοποιούμε το διάστημα σε υποδιαστήματα μήκους $h=0.5$ και χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις διαφορών που προκύπτουν από τον τύπο Euler:

$$y_{i+1} = y_i + 0.5 \cdot f(x_i, y_i)$$

Μέθοδος Euler Αλγόριθμος – Matlab – Octave

x_i	y_i	x_i	y_i
0	1	2.5	2.27E-05
0.5	0.067668	3	3.07E-06
1	0.009158	3.5	4.16E-07
1.5	0.001239	4	5.63E-08
2	0.000168	2.5	2.27E-05

Μέθοδος Euler Αλγόριθμος – Matlab – Octave

Η υλοποίηση της μεθόδου Euler με χρήση Octave ή Matlab επιτυγχάνεται με τον παρακάτω αλγόριθμο

```
❖ >> a=0;
```

```
>> b=4;
```

```
>> h=0.5;
```

```
>> N=(b-a)/h;
```

```
>> y(1)=1;
```

```
>> x(1)=0;
```


Μέθοδος Euler Αλγόριθμος – Matlab – Octave

```
>> for n=1:N  
x(n+1)=a+n*h;  
y(n+1)=y(n)+h*(exp(-4*x(n))-2*y(n));  
end
```

Μέθοδος Euler Αλγόριθμος – Matlab – Octave

```
Command Window
>> a=0;
>> b=4;
>> h=0.5;
>> N=(b-a)/h;
>> y(1)=1;
>> x(1)=0;
>> for n=1:N
x(n+1)=a+n*h;
y(n+1)=y(n)+h*(exp(-4*x(n))-2*y(n));
end
>> x
x =

Columns 1 through 8:

    0    0.5000    1.0000    1.5000    2.0000    2.5000    3.0000    3.5000

Column 9:

    4.0000

>> y
y =

Columns 1 through 5:

    1.0000e+00    5.0000e-01    6.7668e-02    9.1578e-03    1.2394e-03

Columns 6 through 9:

    1.6773e-04    2.2700e-05    3.0721e-06    4.1576e-07
```

Μέθοδος Euler Αλγόριθμος – Matlab – Octave

