

ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: Γ. ΓΑΛΑΝΗΣ, Δ. ΚΟΥΛΟΥΜΠΟΥ

Εισαγωγή

- **Συνήθης Διαφορική Εξίσωση (ΣΔΕ)** είναι κάθε εξίσωση, που περικλείει (την άγνωστη) συνάρτηση μιας μεταβλητής και παραγωγούς αυτής πρώτης ή ανώτερης τάξης
- **Μερική Διαφορική Εξίσωση (ΜΔΕ)**, είναι κάθε εξίσωση, που περικλείει (την άγνωστη) συνάρτηση δύο ή περισσότερων μεταβλητών και μερικές παραγωγούς αυτής πρώτης ή ανώτερης τάξης.
- Οι ΜΔΕ μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να περιγράψουν μια ευρεία ποικιλία φαινομένων, όπως ήχο, θερμότητα, ηλεκτροστατική, ηλεκτροδυναμική, ροή του υγρού, ελαστικότητα κ.α.

Εισαγωγή

- Αυτά τα φαινομενικά διαφορετικά φυσικά φαινόμενα μπορεί να υλοποιούνται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο με τη ΜΔΕ, που δείχνει ότι αυτά διέπονται από τις ίδιες βασικές δυναμικές.
- Απλά όπως οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις συχνά απλοποιούν μονοδιάστατα δυναμικά συστήματα , έτσι και οι μερικές διαφορικές εξισώσεις συχνά απλοποιούν πολυδιάστατα συστήματα.
- Οι ΜΔΕ βρίσκουν τη γενίκευση τους στις στοχαστικές μερικές διαφορικές εξισώσεις.

Εισαγωγή

Η μελέτη των μερικών διαφορικών εξισώσεων ασχολείται κυρίως με:

- Την διερεύνηση της ύπαρξης και της μοναδικότητας των λύσεων τους
- Την ευστάθεια των λύσεων τους σε μικρές διαταραχές
- Μεθόδους κατασκευής λύσεων

Παρατηρήσεις

- Όταν γράφουμε τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης της συνάρτησης u θα υποθέτουμε ότι όλες οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης της u είναι συνεχείς. Όταν γράφουμε τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης της u , θα υποθέτουμε ότι όλες οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης της u είναι συνεχείς.

Παρατηρήσεις

- Είναι γνωστό από τον Απειροστικό Λογισμό πολλών μεταβλητών (**Θεώρημα Swartz**) ότι οι ισότητες των μεικτών παραγώγων

- $u_{xy} = u_{yx}$

- $u_{xz} = u_{zx}$,

- $u_{yz} = u_{zy}$

ισχύουν στην περίπτωση που αυτές είναι συνεχείς.

Παρατηρήσεις

- Ορίζονται και μερικές παράγωγοι τάξης ανώτερης του δύο και όποτε συναντάμε τέτοιες παραγώγους θα θεωρούμε ότι πρέπει να είναι συνεχείς
- Στις ΜΔΕ δεν αρκεί η γνώση αρχικών συνθηκών για την εύρεση της συνάρτησης , αλλά χρειάζεται να ξέρουμε τις συνοριακές συνθήκες της περιοχής για την οποία η άγνωστη συνάρτηση ορίζεται.

Ορισμοί – Συμβολισμοί

- **Τάξη μιας ΜΔΕ**, είναι η τάξη της μεγαλύτερης μερικής παραγωγού που παρουσιάζεται στην εξίσωση.
- **Βαθμός μιας ΜΔΕ**, είναι η δύναμη στην οποία είναι υψωμένη η μεγαλύτερη τάξης παράγωγος.

Ορισμοί – Συμβολισμοί

- **Γραμμική ΜΔΕ**, είναι εκείνη η εξίσωση της οποίας όλοι οι όροι είναι πρώτου βαθμού ως προς την άγνωστη συνάρτηση και τις παραγωγούς αυτής.
- **Ομογενής γραμμική ΜΔΕ**, είναι η εξίσωση της οποίας κάθε όρος περιέχει, είτε την άγνωστη συνάρτηση ή κάποια από τις μερικές παραγώγους αυτής.

Γνωστές Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Μερικές από τις πιο γνωστές διαφορικές εξισώσεις είναι οι εξής:

- **Εξίσωση Ροής (Flow Equation):** $cu_x + u_t = 0$ (Ομογενής Γραμμική ΜΔΕ πρώτης τάξης)
- **Εξίσωση Θερμότητας (Heat Equation):** $c^2u_{xx} - u_t = 0$ (Ομογενής Γραμμική ΜΔΕ δεύτερης τάξης)
- **Εξίσωση Κύματος (Wave Equation):** $c^2u_{xx} - u_{tt} = 0$ (Ομογενής Γραμμική ΜΔΕ δεύτερης τάξης)

Γνωστές Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

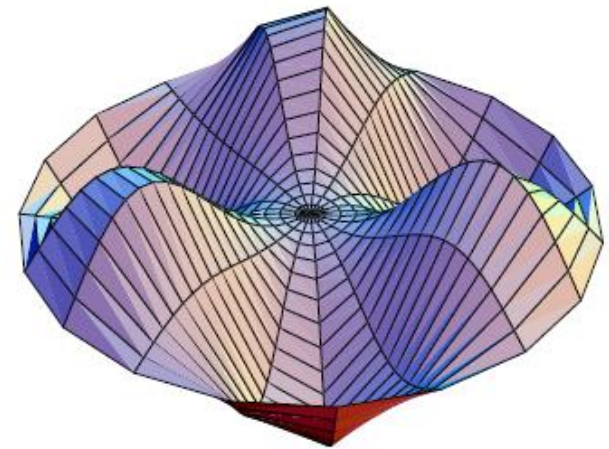
- **Εξίσωση Δυναμικού (Laplace Equation):** $u_{xx} + u_{yy} = 0$
(Ομογενής Γραμμική ΜΔΕ δεύτερης τάξης)
- **Εξίσωση Poisson (Poisson Equation):** $u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$
(Μη Ομογενής Γραμμική ΜΔΕ δεύτερης τάξης)

Γνωστές Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

- Μη Γραμμική Εξίσωση Θερμότητας (Non Linear Heat Equation):
 $c^2 u_{xx} - u \cdot u_t = 0$ (Μη Γραμμική Ομογενής ΜΔΕ δεύτερης τάξης)

Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε το γράφημα μιας ειδικής λύσης της εξίσωσης κύματος (**Wave Equation**)

$$c^2 u_{xx} + u_{tt} = 0$$



Παραδείγματα Επίλυσης ΜΔΕ Ειδικού Τύπου

Παράδειγμα 1

Έστω η ΜΔΕ $u_x = 0$ (1), όπου $u(x, y): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ η άγνωστη συνάρτηση.

Ολοκληρώνοντας την (1) ως προς x έχουμε $u(x, y) = f(y)$.

Αποδείξαμε επομένως ότι κάθε λύση της (1) έχει τύπο $u(x, y) = f(y)$, όπου η συνάρτηση f είναι συνάρτηση μιας μεταβλητής (συνεχώς παραγωγίσιμη).

Παραδείγματα Επίλυσης ΜΔΕ Ειδικού Τύπου

Παράδειγμα 1

Αντίστροφα , έστω η συνάρτηση με τύπο $u(x, y) = f(y)$, τότε προφανώς ισχύει ότι $u_x = 0$ αφού η συνάρτηση $f(y)$ είναι σταθερή ως προς y .

Επομένως οι λύσεις της (1) περιγράφονται πλήρως με τον τύπο $u(x, y) = f(y)$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Παραδείγματα Επίλυσης ΜΔΕ Ειδικού Τύπου

Παράδειγμα 2

Έστω η ΜΔΕ $u_{xx} = 0$ (1), όπου $u(x, y): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ η άγνωστη συνάρτηση.

Ολοκληρώνοντας την (1) ως προς x έχουμε $u_x = f(y)$ (2).

Ολοκληρώνοντας την (2) ως προς x έχουμε $u(x, y) = xf(y) + g(y)$ (3), όπου οι συναρτήσεις f, g είναι συναρτήσεις μιας μεταβλητής (συνεχώς παραγωγίσιμες) .

Αποδείξαμε επομένως ότι κάθε λύση της (1) έχει τύπο $u(x, y) = xf(y) + g(y)$

Παραδείγματα Επίλυσης ΜΔΕ Ειδικού Τύπου

Παράδειγμα 2

Αντίστροφα , έστω η συνάρτηση με τύπο $u(x, y) = xf(y) + g(y)$ τότε προφανώς ισχύει ότι

$u_{xx} = 0$ Επομένως οι λύσεις της (1) περιγράφονται πλήρως με τον τύπο

$u(x, y) = xf(y) + g(y)$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Παραδείγματα Επίλυσης ΜΔΕ Ειδικού Τύπου

Παράδειγμα 3

Έστω η ΜΔΕ $u_{xy} = 0$ (1), όπου $u(x, y): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ η άγνωστη συνάρτηση.

Ολοκληρώνοντας την (1) ως προς x έχουμε $u_y = f(y)$ (2).

Ολοκληρώνοντας την (2) ως προς y έχουμε $u(x, y) = \int f(y) dy + g(x)$ (3), όπου οι συναρτήσεις f, g είναι συναρτήσεις μιας μεταβλητής.

Αποδείξαμε επομένως ότι κάθε λύση της (1) έχει τύπο

$$u(x, y) = \int f(y) dy + g(x).$$

Παραδείγματα Επίλυσης ΜΔΕ Ειδικού Τύπου

Παράδειγμα 3

Αντίστροφα , έστω η συνάρτηση με τύπο $u(x, y) = \int f(y) dy + g(x)$ τότε προφανώς ισχύει ότι

$u_{xy} = 0$ Επομένως οι λύσεις της (1) περιγράφονται πλήρως με τον τύπο

$u(x, y) = \int f(y) dy + g(x)$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Παραδείγματα Επίλυσης ΜΔΕ

Παράδειγμα 4

Έστω η ΜΔΕ $u_{xx} + u = 0$ (1), όπου $u(x, y): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ η άγνωστη συνάρτηση.

Θυμόμαστε από τις ΣΔΕ ότι η διαφορική εξίσωση

$$\varphi''(x) + \varphi(x) = 0 \text{ έχει γενική λύση}$$

$\varphi(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$, όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ αυθαίρετες σταθερές.

Παραδείγματα Επίλυσης ΜΔΕ

Παράδειγμα 4

Αντίστοιχα θεωρώντας το y προσωρινά σταθερό και υποθέτοντας ότι η $u(x, y)$ είναι λύση της (1), τότε βρίσκουμε ότι

$u(x, y) = c_1(y)\cos x + c_2(y)\sin x$ (όπου $c_1(y), c_2(y)$ συναρτήσεις μιας μεταβλητής, εφόσον οι c_1, c_2 είναι σταθερές ως προς x αλλά όχι και ως προς y)

Αποδείξαμε επομένως ότι κάθε λύση της (1) έχει τύπο

$$u(x, y) = c_1(y)\cos x + c_2(y)\sin x$$

Παραδείγματα Επίλυσης ΜΔΕ Ειδικού Τύπου

Παράδειγμα 4

Αντίστροφα , έστω η συνάρτηση με τύπο

$$u(x, y) = c_1(y)\cos x + c_2(y)\sin x$$

τότε προφανώς ισχύει ότι

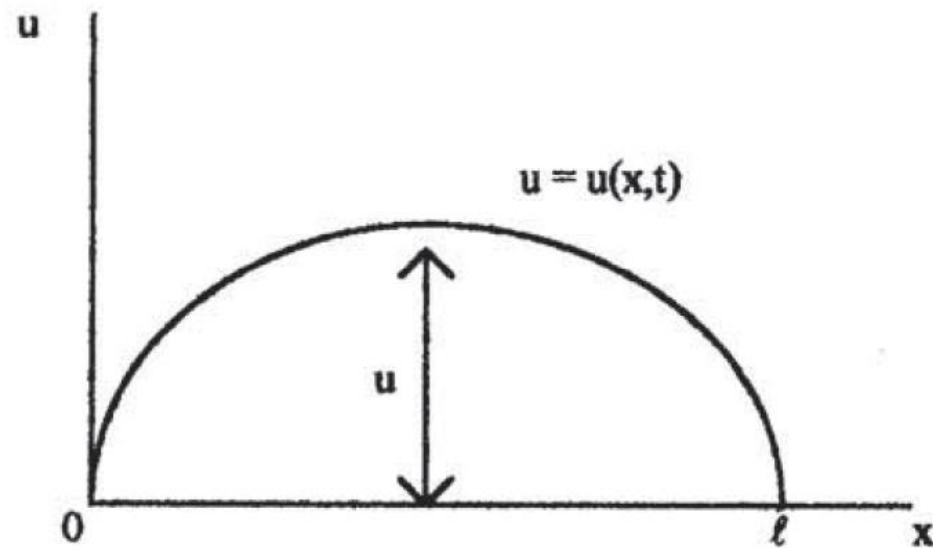
$$u_{xx} + u = 0$$

Επομένως οι λύσεις της (1) περιγράφονται πλήρως με τον τύπο

$$u(x, y) = c_1(y)\cos x + c_2(y)\sin x \text{ για κάθε } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Εξίσωση Κύματος Μιας Διάστασης

Θεωρούμε μια λεπτή ελαστική χορδή μήκους $0l$ μήκους l με σταθερά τα άκρα της, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Εξίσωση Κύματος Μιας Διάστασης

- Απομακρύνουμε την χορδή από την θέση ισορροπίας και την αφήνουμε ελεύθερη.
- Κάθε σημείο x της χορδής κινείται ευθύγραμμα στο επίπεδο Oxu και έχει την τυχούσα χρονική στιγμή t απομάκρυνση $u = u(x, t)$, η οποία αποδεικνύεται ότι πληρεί την ΜΔΕ

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad c > 0 \quad (1)$$

Εξίσωση Κύματος Μιας Διάστασης

- Η εξίσωση (1) ονομάζεται εξίσωση κύματος μιας διάστασης (Wave Equation)
- Αν τα άκρα της χορδής κρατούνται σταθερά στις θέσεις 0 και l , τότε η απομάκρυνση u των σημείων αυτών ικανοποιεί τις σχέσεις (συνοριακές συνθήκες)

$$u(0, t) = 0, u(l, t) = 0, \quad t > 0 \quad (2)$$

Εξίσωση Κύματος Μιας Διάστασης – Επίλυση

Θα λύσουμε το παρακάτω πρόβλημα της εξίσωσης κύματος μιας διάστασης με την μέθοδο χωρισμού μεταβλητών.

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad c > 0 \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, u(l, t) = 0, \quad t > 0 \quad (2)$$

Εξίσωση Κύματος Μιας Διάστασης – Επίλυση

Δηλαδή θα βρούμε συνάρτηση $u(x, t)$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις (1), (2).

Η επίλυση θα πραγματοποιηθεί σε δύο βήματα.

Εξίσωση Κύματος Μιας Διάστασης – Επίλυση

Πρώτο Βήμα: Λύνουμε την εξίσωση (1) με την μέθοδο των χωρισμού των μεταβλητών. Δηλαδή ζητάμε λύσεις $u(x, t)$ της (1)

Της μορφής

$$u(x, t) = F(x)G(t)$$

Έχουμε:

$$u_x = F'(x)G(t) \quad u_t = F(x)G'(t)$$

$$u_{xx} = F''(x)G(t) \quad u_{tt} = F(x)G''(t)$$

Εξίσωση Κύματος Μιας Διάστασης – Επίλυση

Άρα η εξίσωση (1) ανάγεται στην μορφή

$$F(x)G''(t) - c^2 F''(x)G(t) = 0$$

Ή

$$F(x)G''(t) = c^2 F''(x)G(t)$$

Ή ισοδύναμα

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(t)}{c^2 G(t)}$$

Εξίσωση Κύματος Μιας Διάστασης – Επίλυση

Επειδή στην τελευταία σχέση το πρώτο μέλος είναι συνάρτηση μόνο της μεταβλητής x και το δεύτερο μόνο της t , έπεται ότι η τελευταία σχέση είναι ισοδύναμη με την σχέση

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(t)}{c^2 G(t)} = k$$

Όπου k αυθαίρετη σταθερά

Εξίσωση Κύματος Μιας Διάστασης – Επίλυση

Οι εξισώσεις

$$F''(x) - kF(x) = 0 \text{ και } G''(t) - kc^2G(t) = 0$$

είναι Ομογενείς Γραμμικές Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις με Σταθερούς Συντελεστές. Επομένους με γνωστές μεθόδους βρίσκουμε τον τύπο των συναρτήσεων τους για τις διάφορες τιμές της σταθεράς $k \in \mathbb{R}$.

Εξίσωση Κύματος Μιας Διάστασης – Επίλυση

1^η Περίπτωση: Αν $k > 0$ τότε $F(x) = c_1 e^{\sqrt{k}x} + c_2 e^{-\sqrt{k}x}$

Και $G(t) = b_1 e^{c\sqrt{k}t} + b_2 e^{-c\sqrt{k}t}$

2^η Περίπτωση: Αν $k = 0$ τότε $F(x) = c_1 + c_2 x$

Και $G(t) = b_1 + b_2 t$

3^η Περίπτωση: Αν $k < 0$ τότε $F(x) = c_1 \sin(\sqrt{-k}x) + c_2 \cos(\sqrt{-k}x)$ και

$G(t) = b_1 \sin(c\sqrt{-k}t) + b_2 \cos(c\sqrt{-k}t)$

Όπου $b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ σταθερές.

Εξίσωση Κύματος Μιας Διάστασης – Επίλυση

Δεύτερο Βήμα:

Βρίσκουμε τις σταθερές $b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ώστε η

$u(x, t) = F(x)G(t)$ να πληρεί τις συνοριακές συνθήκες

$$u(0, t) = 0, u(l, t) = 0, \quad t > 0 \quad (2)$$

Εξίσωση Κύματος Μιας Διάστασης – Επίλυση

Για την 1^η περίπτωση:

$$u(0, t) = 0$$

άρα

$$F(0)G(t) = 0 \text{ και } F(l)G(t) = 0$$

Δηλαδή, $F(0) = 0$ και $F(l) = 0$

Άρα $c_2 = 0$ και $c_1 e^{\sqrt{k}l} + c_2 e^{-\sqrt{k}l} = 0$ δηλαδή $c_1 = c_2 = 0$

Επομένως $F = 0$ Αδύνατο! Επομένως η 1^η περίπτωση απορρίπτεται

Εξίσωση Κύματος Μιας Διάστασης – Επίλυση

Για την 2^η περίπτωση:

$u(0, t) = 0$ και $u(l, t) = 0$ άρα

$$F(0)G(t) = 0 \text{ και } F(l)G(t) = 0$$

Δηλαδή, $F(0) = 0$ και $F(l) = 0$

Άρα $c_1 = 0$ και $c_1 + c_2 l = 0$

δηλαδή $c_1 = c_2 = 0$

Επομένως $F = 0$ Αδύνατο! Επομένως η 2^η περίπτωση απορρίπτεται

Εξίσωση Κύματος Μιας Διάστασης – Επίλυση

Για την 3^η περίπτωση:

$u(0, t) = 0$ και $u(l, t) = 0$ άρα

$$F(0)G(t) = 0 \text{ και } F(l)G(t) = 0$$

Δηλαδή, $F(0) = 0$ και $F(l) = 0$

Άρα $c_2 = 0$ και $c_1 \sin(\sqrt{-kl}) + c_2 \cos(\sqrt{-kl}) = 0$

δηλαδή $c_2 = 0$ και $c_1 = 0$ ή $\sin(\sqrt{-kl}) = 0$

■ Αν $c_1 = c_2 = 0$, τότε $F = 0$ Αδύνατο!

Εξίσωση Κύματος Μιας Διάστασης – Επίλυση

- Αν $c_2 = 0$ και $\sin(\sqrt{-k}l) = 0$ τότε,
 $c_2 = 0$ και $\sqrt{-k} = \frac{n\pi}{l}, n = 1, 2, 3, \dots$

Επομένως $F(x) = c_1 \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$ με $c_1 \in \mathbb{R}$ σταθερά

Εξίσωση Κύματος Μιας Διάστασης – Επίλυση

Άρα

$$u(x, t) = c_1 \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \left(b_1 \sin\left(\frac{cn\pi}{l} t\right) + b_2 \cos\left(\frac{cn\pi}{l} t\right) \right)$$

Με $b_1, b_2, c_1 \in \mathbb{R}$ σταθερές και $n = 1, 2, 3, \dots$ η λύση του προβλήματος.

Βιβλιογραφία

- Finney, R.L & Giordano, F.R. (2004). Απειροστικός Λογισμός Τόμος Ι, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης
- Σημειώσεις για το Μάθημα Μαθηματικά Μοντέλα στις Φυσικές Επιστήμες, Χρήστος Νικολόπουλος
- Μ. Παπαδημητράκης, Σημειώσεις Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων