Μοντέλα μάχης Lanchester

Γ' Μαχίμων
Γ' Μηχανικών
2023-2024

Σοφία Κυρίτση - Γιάλλουρου

Μοντέλα μάχης Lanchester

Θεωρούμε αντίπαλες δυνάμεις X και Y, οι οποίες διαθέτουν $x(t)$ και $y(t)$ στρατιώτες σε πεδίο μάχης. Η μάχη μεταξύ των δύο δυνάμεων μπορεί να περιγραφεί, σύμφωνα με τον F. W. Lanchester με 2 νόμους

1. **Τετραγωνικός Νόμος** ή Μοντέλο στοχευμένου πυρών (Square Lanchester Law - Aimed Fire Model)

$$\frac{dx}{dt} = -\beta y$$

$$\frac{dy}{dt} = -\alpha x$$

όπου α, β είναι οι συντελεστές επιχειρησιακής ικανότητας γενικά των δυνάμεων X και Y αντίστοιχα ή ο αριθμός των απωλειών ανά μονάδα χρόνου.

Είναι δε α, β πραγματικοί θετικοί αριθμοί.

2 Γραμμικός Νόμος – Νόμος πεδίου πυρών ή μη στοχευμένων πυρών (Linear Law – Unaimed Fire – area fire model)

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\beta y x \\ \frac{dy}{dt} &= -\alpha x y \end{aligned}}$$

Όπως προηγουμένως α, β > 0.

Στην πραγματικότητα έχουμε συνδυασμό των δύο μοντέλων, δηλαδή του γραμμικού και του τετραγωνικού Νόμου

Θα μας απασχολήσει ο Τετραγωνικός Νόμος και εφαρμογές του

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\beta y \\ \frac{dy}{dt} &= -ax \end{aligned} \quad (1)} \qquad x(0)=x_0, \quad y(0)=y_0$$

$$(1) \Rightarrow \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}} = \frac{\beta y}{ax} \quad , \quad \begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{\beta y}{ax}$$

διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών

$$\Rightarrow x\,dx = \frac{\beta}{a} y\,dy$$

$$\Rightarrow \int_0^t x\,dx = \frac{\beta}{a}\int_0^t y\,dy$$, ολοκληρώνουμε από 0 έως t

$$\Rightarrow \left.\frac{x^2}{2}\right]_0^t = \frac{\beta}{a}\left.\frac{y^2}{2}\right]_0^t$$

$$\Rightarrow x^2(t) - x^2(0) = \frac{\beta}{a}\left(y^2(t) - y^2(0)\right)$$

$x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$

$$\Rightarrow \boxed{x^2(t) - x_0^2 = \frac{\beta}{a}\left(y^2(t) - y_0^2\right)} \quad (2)$$

Για να επικρατήσει η δύναμη X, τη χρονική στιγμή $t = T$, πρέπει $x(T) > 0$ και

$y(T) = 0$

για $t = T$ στη (2)

$$x^2(T) - x_0^2 = -\frac{\beta}{a} y_0^2$$

$$\Rightarrow x^2(T) = x_0^2 - \frac{\beta}{a} y_0^2 \;\Big|\; \Rightarrow \boxed{\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^2 > \frac{\beta}{a}}$$

$$x^2(T) > 0$$

Συνθήκη επικράτησης δύναμης X

Αντίστοιχα για την επικράτηση της δύναμης Y,

Θα πρέπει να ισχύει για κάποια χρονική

$$\boxed{t=T, \quad Y(T)>0 \quad \text{και} \quad X(T)=0}$$

οπότε, όπως προηγουμένως η συνθήκη που προκύπτει είναι

Συνθήκη επικράτησης της δύναμης Y

$$\boxed{\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^2 < \frac{\beta}{a}}$$

;

Αριθμητικό Παράδειγμα

Μάχη μεταξύ δύο δυνάμεων X και Y ακολουθεί τον κάτωθι τετραγωνικό νόμο του Lanchester,

$$\frac{dx}{dt} = -2y \qquad x(0) = 100 \qquad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = -3x \qquad y(0) = 120$$

Να βρεθεί ποια δύναμη θα υπερισχύσει και πότε. Ως μονάδα χρόνου να ληφθεί ο μήνας.

Λύση

1. Εξετάζουμε τα πηλίκα $\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^2$ και $\frac{\beta}{a}$, οπότε για $a=3$, $\beta=2$ και $x_0 = 100$, $y_0 = 120$, έχουμε

$$\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^2 = \left(\frac{100}{120}\right)^2 = \frac{25}{36}$$

$$\text{και} \quad \frac{\beta}{a} = \frac{2}{3} = \frac{24}{36} \Longrightarrow$$

$$\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^2 > \frac{\beta}{a} \Longrightarrow$$ θα επικρατήσει

η δύναμη X σε κάποια χρονική στιγμή

$t = T$.

2. Θα λύσουμε το σύστημα Δ.Ε. (1)

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -2y = 0 - 2y \\ \frac{dy}{dt} &= -3x = -3x + 0y \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} x(0) &= 100 \\ y(0) &= 120 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Οι άγνωστες συναρτήσεις είναι $x(t), y(t)$

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο λύσης των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & -2 \\ -3 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Η Χ.Ε του πίνακα Α είναι

$$\det(A-\lambda I)=0$$

$$\Rightarrow \lambda^2-6=0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1=\sqrt{6} \\ \lambda_2=-\sqrt{6} \end{cases}$$

Στη συνέχεια βρίσκουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

Για $\lambda_1=\sqrt{6}$, έστω $\vec{v}_1=\begin{pmatrix} a_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, οπότε

$$(A-\lambda_1 I)\vec{v}_1=\vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -\sqrt{6} & -2 \\ -3 & -\sqrt{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -\sqrt{6}a_1-2\beta_1=0 \\ -3a_1-\sqrt{6}\beta_1=0 \end{array}\right| \Rightarrow \beta_1=-\frac{\sqrt{6}}{2}a_1$$

άρα $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ -\frac{\sqrt{6}}{2} a_1 \end{pmatrix} \overset{a_1=1}{\Longrightarrow} \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix}$

Όμοια για $\lambda_2 = -\sqrt{6}$ και $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$

$(A-\lambda_2 I)\vec{v}_2 = \vec{0}$ και είναι $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix}$

$$\boxed{\vec{Y}(t) = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t}}$$

Άρα η γενική λύση του (1) είναι

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix} e^{\sqrt{6}t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix} e^{-\sqrt{6}t}$$

$$\Rightarrow \left| \begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{\sqrt{6}t} + c_2 e^{-\sqrt{6}t} \\ y(t) &= -\frac{\sqrt{6}}{2} c_1 e^{\sqrt{6}t} + \frac{\sqrt{6}}{2} c_2 e^{-\sqrt{6}t} \end{aligned} \right.$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ σταθερές ολοκλήρωσης

$x(0)=100, \quad y(0)=120$

$$\Rightarrow t=0 \;\Big|\; \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 100 \\ -\frac{\sqrt{6}}{2} c_1 + \frac{\sqrt{6}}{2} c_2 = 120 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{l} c_1 = 1 \\ c_2 = 99 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} x(t) = e^{\sqrt{6}\,t} + 99\, e^{-\sqrt{6}\,t} \\ y(t) = -\frac{\sqrt{6}}{2} e^{\sqrt{6}t} + \frac{\sqrt{6}}{2} 99\, e^{-\sqrt{6}\,t} \end{array} \right.$$

Επειδή γνωρίζουμε από τη συνθήκη επι-
κράτησης ότι επικρατεί η δύναμη X,
αυτό σημαίνει ότι για κάποιο $t=T$
οι δυνάμεις $y(T)=0$, άρα

για $t=T$, $y(T)=0$

$$0 = -\frac{\sqrt{6}}{2} e^{\sqrt{6}T} + 99\frac{\sqrt{6}}{2} e^{-\sqrt{6}T} = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{e^{\sqrt{6}T}}{e^{-\sqrt{6}T}} = 99 \Longrightarrow e^{2\sqrt{6}T} = 99$$

$$\Rightarrow T = \frac{\ln 99}{2\sqrt{6}} \Longrightarrow T = 0.94 \text{ μήνες}$$

$\Longrightarrow T \simeq 29$ μέρες, λαμβάνουμε ως μονάδα χρόνου την ημέρα.

$$\boxed{\text{Συμπέρασμα: Η μάχη ολοκληρώνεται σε 29 μέρες περίπου από την έναρξή της και νικητής είναι η δύναμη X.}}$$