

Μαθηματική Μοντελοποίηση
Μαθηματικά Μοντέλα
Άμυνας και Ασφάλειας
των Επιχειρήσεων

Γ' Μαχίμων - Γ' Μηχανικών
2023 - 2024

Μαθηματικά Μοντέλα πεδίων μαχών

1. Frederick William Lanchester (1868-1946), Βρετανός → πρώτο μαθηματικό μοντέλο πεδίων μάχης Α' Παγκοσμίου Πολέμου

2. Wayne Hughes → Salvo Mathematical Model (1995) ⇒ σύγχρονα πολεμικά πλοία, τα οποία φέρουν κατευθυνομένων βλημάτων

3. Lewis Fry Richardson (1881-1953), Βρετανός μετεωρολόγος → μοντέλο ανταγωνιστικών εξοπλισμών (1949)

Τα μαθηματικά μοντέλα 1, 3 είναι γραμμικά συστήματα 1ης τάξης διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές, δύο κατηγοριών

1. Ομογενή Συστήματα Δ. Ε.

2. Μη ομογενή Συστήματα Δ.Ε.,

όπου η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος, οπότε αποτελούν Δυναμικά Συστήματα Διαφορικών Εξισώσεων

Το μοντέλο Hughes είναι συμμετρικές αλγεβρικές Εξισώσεις.

1. Ομογενή Συστήματα Διαφορικών Εξισώσεων

Έστω γραμμικό σύστημα δύο διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} = \dot{x} &= \alpha x + \beta y \\ \frac{dy}{dt} = \dot{y} &= \gamma x + \delta y\end{aligned}\quad (1)$$

όπου $x(t)$, $y(t)$ είναι άγνωστες συναρτήσεις $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ γνωστοί πραγματικοί αριθμοί

Συνοδεύονται από περιορισμούς,

Αρχικές συνθήκες έστω $x(0)=100, y(0)=150$

1α. Επίλυση ομογενούς γραμμικού Σ.Δ.Ε.

Μέθοδος πινάκων-ιδιοτιμών- ιδιοδιανυσμάτων

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \vec{Y}' = A \cdot \vec{Y}, \quad \text{όπου}$$

$$\vec{Y}' = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}, \quad \vec{Y} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A - \lambda I = \begin{bmatrix} \alpha - \lambda & \beta \\ \gamma & \delta - \lambda \end{bmatrix}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος

είναι $p(\lambda) = 0$ ή $\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & \beta \\ \gamma & \delta-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (a-\lambda)(\delta-\lambda) - \beta\gamma = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^2 - (a+\delta)\lambda + (a\delta - \beta\gamma) = 0 \quad (2)$$

Η εξίσωση (2) είναι μια αλγεβρική εξίσωση ως προς λ , 2ου βαθμού.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις ως προς το είδος λύσεων της (2)

1. Η εξίσωση (2) έχει $\Delta > 0$, οπότε δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

$$\text{Αν } \Delta = (a+\delta)^2 - 4(a\delta - \beta\gamma) > 0 \Leftrightarrow \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \\ \text{με } \lambda_1 \neq \lambda_2$$

Έστω στην ιδιοτιμή λ_1 αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$ στην δε λ_2 αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$, τα οποία βρίσκουμε από τις σχέσεις:

$$(A - \lambda_1 I)\vec{v}_1 = \vec{0} \quad \text{και} \quad (A - \lambda_2 I)\vec{v}_2 = \vec{0} \quad (3)$$

Αφού βρούμε τα ιδιόνυσματα, βρίσκουμε τη γενική λύση του Συστήματος (1)

και είναι

$$\vec{Y}(t) = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad (4)$$

όταν έχουμε αρχικές συνθήκες υπολογίζουμε

το c_1, c_2 , οπότε από (4) έχουμε

$$\vec{Y}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} a_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t} + c_2 \begin{bmatrix} a_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} e^{\lambda_2 t}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = c_1 a_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 a_2 e^{\lambda_2 t} \\ y(t) = c_1 \beta_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \beta_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

Παράδειγμα

Να λυθεί το σύστημα:

$$\frac{dx}{dt} = 4x - y \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = -4x + 4y$$

$$x(0) = 3, \quad y(0) = 2$$

Επίλυση

$$\bullet A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4-\lambda & -1 \\ -4 & 4-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ -4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (4-\lambda)^2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda - 6)(\lambda - 2) = 0 \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = 6 \\ \lambda_2 = 2 \end{array} \quad \text{ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ}$$

• Ιδιοδιανύσματα

$$(A - \lambda_1 I) \vec{v}_1 = \vec{0} \quad \text{και} \quad (A - \lambda_2 I) \vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$\underline{\lambda_1 = 6} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4-6 & -1 \\ -4 & 4-6 \end{bmatrix} \cdot \vec{v}_1 = \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow -2\alpha_1 - \beta_1 = 0 \Rightarrow \beta_1 = -2\alpha_1$$

$$-4\alpha_1 - 2\beta_1 = 0 \Rightarrow \beta_1 = -2\alpha_1$$

$$\text{Άρα } \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ -2\alpha_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{v}_1 = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε $\alpha_1 = 1$

οπότε $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Για $\underline{\lambda_2 = 2}$, αντιστοιχεί το $\underline{\vec{v}_2}$:

$$(A - \lambda_2 I) \vec{v}_2 = \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4-2 & -1 \\ -4 & 4-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 2\alpha_2 - \beta_2 = 0 \\ -4\alpha_2 + 2\beta_2 = 0 \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} \beta_2 = 2\alpha_2 \\ \beta_2 = 2\alpha_2 \end{array} \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ 2\alpha_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{v}_2 = \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\alpha_2 = 1} \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

και επομένως το ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, το οποίο αντιστοιχεί όπως είπαμε στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2$.

Άρα η γενική λύση του αρχικού συστήματος α) είναι

$$\vec{Y}(t) = C_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t}$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{6t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = C_1 e^{6t} + C_2 e^{2t} \\ y(t) = -2C_1 e^{6t} + 2C_2 e^{2t} \end{cases} \text{ η γενική λύση του} \\ \text{αρχικού συστήματος}$$

Δίνονται όμως οι αρχικές τιμές, $x(0) = 3$, $y(0) = 2$

Αντικαθιστούμε και έχουμε

$$\begin{cases} 3 = x(0) = C_1 + C_2 \\ 2 = y(0) = -2C_1 + 2C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 3 \\ -2C_1 + 2C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 2 \\ C_1 = 1 \end{cases}$$

Τελικά η λύση του προβλήματος είναι

$$\begin{cases} x(t) = e^{6t} + 2e^{2t} \\ y(t) = -2e^{6t} + 4e^{2t} \end{cases}$$

2. Αν $\Delta = 0 \Rightarrow$ Μία ρίζα διπλή, έστω $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$.

Τα αντίστοιχα είναι $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$ και $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$

τα οποία προκύπτουν ως εξής:

το \vec{v}_1 από την εξίσωση $(A - \lambda I)\vec{v}_1 = \vec{0}$ και

το \vec{v}_2 , το οποίο ονομάζεται και γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα, από την εξίσωση $(A - \lambda I)\vec{v}_2 = \vec{v}_1$

Η γενική λύση του αρχικού συστήματος (1) είναι:

$$\vec{Y}(t) = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda t} + c_2 (t \vec{v}_1 + \vec{v}_2) e^{\lambda t}, \text{ όπου}$$

$$\vec{Y}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \text{ με } \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

άρα

$$x(t) = c_1 a_1 e^{\lambda t} + c_2 (t a_1 + a_2) e^{\lambda t}$$

$$y(t) = c_1 \beta_1 e^{\lambda t} + c_2 (t \beta_1 + \beta_2) e^{\lambda t}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

3. Όταν $\Delta < 0$, τότε η εξίσωση η χαρακτηριστική έχει δύο ρίζες συζυγείς μιγαδικές,

$$\text{έστω } \lambda_1 = b + ic, \lambda_2 = b - ic, c \neq 0$$

Στην περίπτωση αυτή βρίσκουμε το ιδιο-

διάνυσμα μόνο που αντιστοιχεί στην $\lambda_1 = b + ic$

έστω \vec{v} , από $(A - \lambda_1 I) \vec{v} = 0$

και η γενική λύση είναι:

$$\vec{Y}_1(t) = e^{bt} [c_1 \operatorname{Re}(\vec{v}) \cos(ct) - c_2 \operatorname{Im}(\vec{v}) \sin(ct)]$$

$$\vec{Y}_2(t) = e^{bt} [c_1 \operatorname{Im}(\vec{v}) \cos(ct) + c_2 \operatorname{Re}(\vec{v}) \sin(ct)]$$

όπου $\operatorname{Re}(\vec{v})$ και $\operatorname{Im}(\vec{v})$ το πραγματικό και φανταστικό μέρος του ιδιοδιανύσματος \vec{v} .

Παράδειγμα: Έστω το διάνυσμα $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 - 3i \\ -1 - i \end{bmatrix}$

$$\text{Τότε } \vec{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} i \Rightarrow \operatorname{Re}(\vec{v}) = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \operatorname{Im}(\vec{v}) = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Παραδείγματα

1. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών (Π. Α. Τ)

$$\dot{x}(t) = 3x - y$$

$$\dot{y}(t) = 2x$$

$$x(0) = 2, y(0) = 1$$

Λύση

$x(t), y(t)$: άγνωστες συναρτήσεις

$$\bullet A = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow A - \lambda I = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix}, \text{ άρα}$$

Χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα A

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda(3-\lambda) + 2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow$$
$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

Επομένως οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$.

- Εύρεση ιδιοδιανυσμάτων, έστω $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$ το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$ και αντίστοιχα $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = [\alpha_2, \beta_2]^T$ στην $\lambda_2 = 2$.

$$(A - \lambda_1 I) \vec{v}_1 = \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3-1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l|l} 2\alpha_1 - \beta_1 = 0 & \beta_1 = 2\alpha_1 \\ 2\alpha_1 - \beta_1 = 0 & \beta_1 = 2\alpha_1 \end{array} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ 2\alpha_1 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ θέτοντας } \alpha_1 = 1.$$

Αντίστοιχα για $\lambda_2 = 2$ έχουμε: $(A - \lambda_2 I) \cdot \vec{v}_2 = \vec{0}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3-2 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l|l} \alpha_2 - \beta_2 = 0 & \alpha_2 = \beta_2 \\ 2\alpha_2 - 2\beta_2 = 0 & \alpha_2 = \beta_2 \end{array}$$

$$\text{άρα } \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ για } a_2 = 1$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} \\ y(t) = 2c_1 e^t + c_2 e^{2t} \end{cases}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \text{ Έχουμε όμως } x(0), y(0) = 1, \text{ άρα}$$

$$\bullet \quad \begin{aligned} t=0 &\Rightarrow 2 = c_1 + c_2 \\ &\Rightarrow 1 = 2c_1 + c_2 \end{aligned} \Bigg| \Rightarrow \begin{aligned} c_1 &= -1 \\ c_2 &= 3 \end{aligned}$$

Άρα η λύση του ΠΑΤ είναι:

$$x(t) = -e^t + 3e^{2t}$$

$$y(t) = -2e^t + 3e^{2t}$$

2. Να λυθεί το ΠΑΤ

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) &= -4x + y & x(0) = 1, y(0) = -1 \\ \frac{dy}{dt} = \dot{y}(t) &= -x - 2y \end{aligned} ,$$

1. Εύρεση ιδιοτιμών

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow A - \lambda I = \begin{bmatrix} -4-\lambda & 1 \\ -1 & -2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\text{Άρα } p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow$$

$$(-4-\lambda)(-2-\lambda) + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda+3)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -3, \text{ Διπλή ρίζα}$$

2. Εύρεση ιδιοδιανυσμάτων

Θα βρούμε τα ιδιοδιανύσματα \vec{v}_1 και \vec{v}_2 ως εξής:

$$\text{Άρα για } \lambda = -3 \Rightarrow (A - \lambda I) \vec{v}_1 = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -a_1 + \beta_1 = 0 \\ -a_1 + \beta_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = \beta_1 \\ a_1 = \beta_1 \end{cases} \rightarrow \vec{v}_1 = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, a_1 = 1$$

Το δεύτερο ιδιοδιάνυσμα \vec{v}_2 , επειδή $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

βρίσκεται από τη σχέση $(A - \lambda I) \vec{v}_2 = \vec{v}_1$

Κατά συνέπεια έχουμε :

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} -a_2 + \beta_2 = 1 \\ -a_2 + \beta_2 = 1 \end{array} \Bigg| \Rightarrow$$
$$\beta_2 = 1 + a_2 \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ 1 + a_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{a_2=0} \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. Εύρεση Γενικής λύσης του αρχικού συστήματος

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} + c_2 \left(t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) e^{-3t}$$

$$\Rightarrow x(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 t e^{-3t} \Rightarrow x(t) = (c_1 + t c_2) e^{-3t}$$

$$y(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 (t + 1) e^{-3t}$$

$$\Rightarrow y(t) = [c_1 + c_2 (t + 1)] e^{-3t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

4. Επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών (ΠΑΤ)

Εφαρμογή αρχικών τιμών $x(0)=1, y(0)=-1$, για την εύρεση των c_1 και c_2

$$t=0 \Rightarrow 1 = c_1 \Rightarrow c_1 = 1$$

$$t=0 \Rightarrow -1 = [1 + c_2 (0 + 1)] e^0 \Rightarrow c_2 = -2$$

Επομένως $x(t) = (1-2t)e^{-3t}$
 $y(t) = [1-2(t+1)]e^{-3t} \Rightarrow$

$$y(t) = (-2t-1)e^{-3t}.$$

3. Να λυθεί το σύστημα

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = x + 2y$$

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y} = -3x + y$$

Λύση:

1. Εύρεση ιδιοτιμών

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -3 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(1-\lambda)^2 + 6 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 7 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2+2i\sqrt{6}}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1 + i\sqrt{6}, \quad \lambda_2 = 1 - i\sqrt{6}$$

2. Εύρεση ιδιοδιανυσμάτων

Στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1 + i\sqrt{6}$ αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα $\vec{v} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$

$$\left[A - (1 + i\sqrt{6})I \right] \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 - 1 - i\sqrt{6} & 2 \\ -3 & 1 - 1 - i\sqrt{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -i\sqrt{6} & 2 \\ -3 & -i\sqrt{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} -i\sqrt{6}\alpha + 2\beta = 0 \\ -3\alpha - i\sqrt{6}\beta = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{i\sqrt{6}}{2}\alpha$$

$$\text{Άρα } \vec{v} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \frac{i\sqrt{6}}{2}\alpha \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{i\sqrt{6}}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\alpha=1} \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{i\sqrt{6}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{Οπότε } \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{i\sqrt{6}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 0i \\ 0 + \frac{i\sqrt{6}}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i \left| \frac{0}{\frac{\sqrt{6}}{2}} \right| \Rightarrow \text{Re}(\vec{v}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ και}$$

$$\text{Im}(\vec{v}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{2} \end{bmatrix}, \text{ κατά την έννοια που}$$

ένος μιγαδικού αριθμού $x = a + ib$, έχει πραγματικό μέρος, $\text{Re}x = a$ και $\text{Im}x = b$.

3. Γενική λύση του αρχικού συστήματος :

$$\vec{Y}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{\sigma t} \left[c_1 \text{Re}(\vec{v}) \cos(bt) - c_2 \text{Im}(\vec{v}) \sin(bt) \right]$$

όπου $\lambda_1 = a + ib$ η μία μιγαδική ιδιοτιμή που στην περίπτωση μας είναι: $\lambda_1 = 1 + i\sqrt{6}$, οπότε $a = 1$, $b = \sqrt{6}$

Επομένως γενική λύση:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^t \left[c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos(\sqrt{6}t) - c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{2} \end{bmatrix} \sin(\sqrt{6}t) \right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = c_1 e^t \cos(\sqrt{6}t) \\ y(t) = -c_2 e^t \sin(\sqrt{6}t) \end{cases} \quad \text{με } c_1, c_2 \text{ αυθαίρετες}$$

σταθερές που εξαρτώνται από τα δεδομένα του προβλήματος.



Παρατήρηση

Σε περίπτωση που ένα ομογενές σύστημα διαφορικών εξισώσεων προσομοιάζει ένα πεδίο μάχης, τότε αν μας δίνονται οι αρχικές δυνάμεις για $t=0$, μπορούμε να εξαγάγουμε συμπεράσματα ως προς την έκβαση της μάχης αυτής

Παράδειγμα

Έστω ότι το σύστημα του Παραδείγματος 2 παριστάνει τις μεταβολές δύο αντιπάλων δυνάμεων X , Y και συγκεκριμένα μεταβολή αριθμού στρατιωτών

$$\begin{cases} \dot{x} = -4x + 2y \\ \dot{y} = -x + 2y \end{cases} \quad (1)$$

όπου $x(t)$ και $y(t)$ είναι οι συναρτήσεις του αριθμού των στρατιωτών σε σχέση με τον χρόνο t .

Επιπλέον δίνεται $x(0) = x_0 = 100$ και $y(0) = y_0 = 50$

Να εξετασθεί ποια δύναμη θα επικρατήσει
Από την επίλυση του Παραδείγματος 2, γνωρίζουμε ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$ και η γενική λύση του συστήματος (1) είναι

$$x(t) = (c_1 + t c_2) e^{-3t}$$

$$y(t) = [c_1 + (t+1)c_2] e^{-3t}$$

Εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες
 $x(0) = 100$ και $y(0) = 50$, έχουμε

$$\begin{cases} 100 = (c_1 + 0 \cdot c_2) e^0 \\ 50 = [c_1 + (0+1)c_2] e^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 100 \\ c_2 = -50 \end{cases}$$

Κατά συνέπεια οι λύσεις είναι

$$x(t) = (100 - 50t) e^{-3t}$$

$$y(t) = [100 - 50(t+1)] e^{-3t}$$

Για να βρούμε ποια από τις δυνάμεις επικρατεί, μηδενίζουμε τις $x(t)$ και $y(t)$. Έστω ότι οι $x(t)$, $y(t)$ μηδενίζονται σε χρόνο t_1 , t_2 αντίστοιχα

$$x(t_1) = 0 \Rightarrow 100 - 50t_1 = 0 \Rightarrow t_1 = 2$$

$$y(t_2) = 0 \Rightarrow 100 - 50(t_2+1) = 0 \Rightarrow t_2 = 1$$

Είναι όμως $t_2 < t_1$ που σημαίνει ότι η δύναμη Y εξαντλείται $1n$, επομένως η επικρατούσα δύναμη είναι η X .

Υπολογίζουμε και τον αριθμό των επιζώντων της δύναμης X , δείτοντας $t = 1$ στην $x(t)$.

Άρα $x(1) = 50e^{-3} \simeq 2.5$ στρατιώτες, δηλαδή τελικά επιζούν 2 στρατιώτες.
