Μαθηματική Μοντελοποίηση
Μαθηματικά Μοντέλα
Άμυνας και Ασφάλειας
των Επιχειρήσεων

Γ' Μαχίμων - Γ' Μηχανικών

2025 - 2026

Μαθηματικά Μοντέλα πεδίων μαχών

1. Frederick William Lanchester (1868-1946), Βρετανός → πρώτο μαθηματικό μοντέλο πεδίων μάχης Α' Παγκοσμίου Πολέμου

2. Wayne Hughes → Salvo Mathematical Model (1995) ⇒ σύγχρονα πολεμικά πλοία, τα οποία φέρουν συστήματα κατευθυνομένων βλημάτων

3. Lewis Fry Richardson (1881-1953), Βρετανός μετεωρολόγος → μοντέλο ανταγωνιστικών εξοπλισμών (1949)

Τα μαθηματικά μοντέλα 1, 3 είναι γραμμικά συστήματα 1ης τάξης διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές, δύο κατηγοριών
1. Ομογενή Συστήματα Δ. Ε.
2. Μη ομογενή Συστήματα Δ.Ε.,
όπου η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος.

Αποτελούν Δυναμικά Συστήματα Διαφορικών Εξισώσεων.

Το μοντέλο Hughes 2 είναι συμμετρικές αλγεβρικές Εξισώσεις

1. Ομογενή Συστήματα Διαφορικών Εξισώσεων

Έστω γραμμικό σύστημα δύο διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \dot{x} = ax + \beta y \\ \frac{dy}{dt} &= \dot{y} = \gamma x + \delta y \end{aligned} \qquad (1)$$

όπου x(t), y(t) είναι άγνωστες συναρτήσεις α, β, γ, δ γνωστοί πραγματικοί αριθμοί

Συνοδεύονται από περιορισμούς,

Αρχικές συνθήκες έστω x (0)=100, y(0)=150

1α. Επίλυση ομογενούς γραμμικού Σ.Δ.Ε.

Μέθοδος πινάκων-ιδιοτιμών- ιδιοδιανυσμάτων

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ ή } \vec{Y}' = A \cdot \vec{Y}, \text{ όπου}$$

$$\vec{Y}' = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}, \quad \vec{Y} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A - \lambda I = \begin{bmatrix} a-\lambda & \beta \\ \gamma & \delta-\lambda \end{bmatrix}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος

είναι $p(\lambda)=0$ ή $\det(A-\lambda I)=0 \Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & \beta \\ \gamma & \delta-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (a-\lambda)(\delta-\lambda)-\beta\gamma=0 \Rightarrow$$

$$\lambda^2-(a+\delta)\lambda+(a\delta-\beta\gamma)=0 \quad (2)$$

Η εξίσωση (2) είναι μια αλγεβρική εξίσωση ως προς λ, 2ου βαθμού.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις ως προς το είδος λύσεων της (2)

1. Η εξίσωση (2) έχει $\Delta>0$, οπότε δυό ρίζες πραγματικές και άνισες.

Αν $\Delta=(a+\delta)^2-4(a\delta-\beta\gamma)>0 \Leftrightarrow \lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}$ με $\lambda_1\neq\lambda_2$

Έστω στην ιδιοτιμή λ_1 αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα $\vec{v_1}=\begin{bmatrix} a_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$ στην δε λ_2 αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα $\vec{v_2}=\begin{bmatrix} a_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$, τα οποία βρίσκουμε από τις σχέσεις:

$$(A-\lambda_1 I)\vec{v_1}=\vec{0} \quad \text{και} \quad (A-\lambda_2 I)\vec{v_2}=\vec{0} \quad (3)$$

Αφού βρούμε τα ιδιονύσματα, βρίσκουμε τη γενική λύση του Συστήματος (1) και είναι

$$\boxed{\vec{Y}(t) = c_1 \vec{v_1} e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v_2} e^{\lambda_2 t} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}} \quad (4)$$

όταν έχουμε αρχικές συνθήκες υπολογίζουμε το c_1, c_2, οπότε από (4) έχουμε

$$\vec{Y}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} a_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t} + c_2 \begin{bmatrix} a_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} e^{\lambda_2 t}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{aligned} x(t) &= c_1 a_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 a_2 e^{\lambda_2 t} \\ y(t) &= c_1 \beta_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \beta_2 e^{\lambda_2 t} \end{aligned}}$$

Παράδειγμα

Να λυθεί το σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 4x - y \\ \frac{dy}{dt} &= -4x + 4y \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$x(0) = 3, \quad y(0) = 2$$

Επίλυση

- $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4-\lambda & -1 \\ -4 & 4-\lambda \end{bmatrix} \Longrightarrow$

$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ -4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (4-\lambda)^2 - 4 = 0$

$$\Rightarrow (\lambda-6)(\lambda-2)=0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = 6 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases} \quad \text{Ιδιοτιμές}$$

- Ιδιοδιανύσματα

$(A-\lambda_1 I)\vec{v_1} = \vec{O}$ και $(A-\lambda_2 I)\vec{v_2} = \vec{O}$

$$\lambda_1 = 6 \Rightarrow \begin{bmatrix} 4-6 & -1 \\ -4 & 4-6 \end{bmatrix} \cdot \vec{v_1} = \vec{O} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} -2a_1 - \beta_1 = 0 \\ -4a_1 - 2\beta_1 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \beta_1 = -2a_1 \\ \beta_1 = -2a_1 \end{matrix}$$

Άρα $\vec{v_1} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{v_1} = \begin{bmatrix} a_1 \\ -2a_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{v_1} = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε $a_1 = 1$

οπότε $\vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Για $\lambda_2 = 2$, αντιστοιχεί το $\vec{v_2}$:

$$(A-\lambda_2 I)\vec{v_2} = \vec{O} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4-2 & -1 \\ -4 & 4-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2a_2 - \beta_2 = 0 \\ -4a_2 + 2\beta_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \beta_2 = 2a_2 \\ \beta_2 = 2a_2 \end{matrix} \Rightarrow \vec{v_2} = \begin{bmatrix} a_2 \\ 2a_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{v_2} = a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{a_2 = 1} \vec{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

και επομένως το ιδιοδιάνυσμα $\vec{v_2}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$, το οποίο αντιστοιχεί όπως είπαμε στην ιδιοτιμή $\lambda_2=2$.

Άρα η γενική λύση του αρχικού συστήματος (1) είναι

$$\vec{Y}(t)=c_1\vec{v_1}e^{\lambda_1 t}+c_2\vec{v_2}e^{\lambda_2 t}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}e^{6t}+c_2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}e^{2t}$$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{l} x(t)=c_1e^{6t}+c_2e^{2t}\\ y(t)=-2c_1e^{6t}+2c_2e^{2t}\end{array}\right.$$ η γενική λύση του αρχικού συστήματος

Δίνονται όμως οι αρχικές τιμές, $x(0)=3$, $y(0)=2$

Αντικαθιστούμε και έχουμε

$$\left.\begin{array}{l}3=x(0)=c_1+c_2\\2=y(0)=-2c_1+2c_2\end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{r}c_1+c_2=3\\-2c_1+2c_2=2\end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l}c_2=2\\c_1=1\end{array}$$

Τελικά η λύση του προβλήματος είναι

$$x(t)=e^{6t}+2e^{2t}$$
$$y(t)=-2e^{6t}+4e^{2t}$$

2. $\boxed{\text{Αν } \Delta = 0 \Rightarrow \text{ Μία ρίζα διπλή, έστω } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}.}$

Τα αντίστοιχα είναι $\vec{v_1} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$ και $\vec{v_2} = \begin{bmatrix} a_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$

τα οποία προκύπτουν ως εξής:

το $\vec{v_1}$ από την εξίσωση $(A - \lambda I)\vec{v_1} = \vec{0}$ και

το $\vec{v_2}$, το οποίο ονομάζεται και γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα, από την εξίσωση $(A - \lambda I) \cdot \vec{v_2} = \vec{v_1}$

Η γενική λύση του αρχικού συστήματος (1) είναι:

$$\vec{Y}(t) = c_1 \vec{v_1} e^{\lambda t} + c_2 (t\vec{v_1} + \vec{v_2}) e^{\lambda t}, \text{ όπου}$$

$$\vec{Y}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \text{ με } \vec{v_1} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix}, \vec{v_2} = \begin{bmatrix} a_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

άρα

$$x(t) = c_1 a_1 e^{\lambda t} + c_2 (t a_1 + a_2) e^{\lambda t}$$
$$y(t) = c_1 \beta_1 e^{\lambda t} + c_2 (t \beta_1 + \beta_2) e^{\lambda t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

3. $\boxed{\text{Όταν } \Delta < 0}$, τότε η εξίσωση η χαρακτηριστική έχει $\boxed{\text{δύο ρίζες συζυγείς μιγαδικές}}$,

έστω $\lambda_1 = b + ic$, $\lambda_2 = b - ic$, $c \neq 0$

Στην περίπτωση αυτή βρίσκουμε το ιδιοδιάνυσμα <u>μόνο</u> που αντιστοιχεί στην $\lambda_1 = b + ic$

έστω $\vec{v}$, από $(A-\lambda_1 I)\vec{v}=0$

και η γενική λύση είναι:

$$\vec{Y}_1(t)=e^{bt}\left[c_1 Re(\vec{v})\cos(ct)-c_2 Im(\vec{v})\sin(ct)\right]$$

$$\vec{Y}_2(t)=e^{bt}\left[c_1 Im(\vec{v})\cos(ct)+c_2 Re(\vec{v})\sin(ct)\right]$$

όπου $Re(\vec{v})$ και $Im(\vec{v})$ το πραγματικό και φανταστικό μέρος του ιδιοδιανύσματος $\vec{v}$.

Παράδειγμα: Έστω το διάνυσμα $\vec{v}=\begin{bmatrix}2-3i\\-1-i\end{bmatrix}$

Τότε $\vec{v}=\begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3\\-1\end{bmatrix}i \Rightarrow Re(\vec{v})=\begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix}$, $Im(\vec{v})=\begin{bmatrix}-3\\-1\end{bmatrix}$

Παραδείγματα

1. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών (Π. Α. Τ)

$\dot{x}(t)=3x-y$

$\dot{y}(t)=2x$

$x(0)=2,\ y(0)=1$

Λύση

x(t), y(t): άγνωστες συναρτήσεις

- $A=\begin{vmatrix}3 & -1\\2 & 0\end{vmatrix} \Rightarrow A-\lambda I=\begin{vmatrix}3-\lambda & -1\\2 & -\lambda\end{vmatrix}$, άρα

Χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα Α

$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow$

$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda(3-\lambda)+2=0 \Rightarrow \lambda^2-3\lambda+2=0 \Rightarrow$ $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$

Επομένως οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$.

- Εύρεση ιδιοδιανυσμάτων, έστω $\vec{v_1} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$ το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$ και αντίστοιχα $\vec{v_2} = \begin{bmatrix} a_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = [a_2, \beta_2]^T$ στην $\lambda_2 = 2$.

$(A-\lambda_1 I)\vec{v_1} = \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3-1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\left.\begin{matrix} 2a_1 - \beta_1 = 0 \\ 2a_1 - \beta_1 = 0 \end{matrix}\right| \Rightarrow \begin{matrix} \beta_1 = 2a_1 \\ \beta_1 = 2a_1 \end{matrix} \Rightarrow \vec{v_1} = \begin{bmatrix} a_1 \\ 2a_1 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, θέτοντας $a_1 = 1$.

Αντίστοιχα για $\lambda_2 = 2$ έχουμε: $(A-\lambda_2 I)\cdot\vec{v_2} = \vec{0}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3-2 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_2 - \beta_2 = 0 \\ 2a_2 - 2\beta_2 = 0 \end{matrix}\right| \Rightarrow \begin{matrix} a_2 = \beta_2 \\ a_2 = \beta_2 \end{matrix}$

άρα $\vec{v_2} = \begin{bmatrix} a_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{v_2} = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_2 \end{bmatrix} = a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\vec{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ για } q_2 = 1$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 \vec{v_1} e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v_2} e^{\lambda_2 t} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} x(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t} \\ y(t) = 2c_1 e^{t} + c_2 e^{2t} \end{array} \right., \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$ Έχουμε όμως $x(0), y(0) = 1$, άρα

- $t=0 \Rightarrow 2 = c_1 + c_2$

$\Rightarrow 1 = 2c_1 + c_2$ $\Rightarrow$ $c_1 = -1$, $c_2 = 3$

Άρα η λύση του ΠΑΤ είναι:

$$x(t) = -e^{t} + 3e^{2t}$$

$$y(t) = -2e^{t} + 3e^{2t}$$

2. Να λυθεί το ΠΑΤ

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = -4x + y$$

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y}(t) = -x - 2y, \quad x(0) = 1, \; y(0) = -1$$

1. Εύρεση ιδιοτιμών

$$A=\begin{bmatrix}-4 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix} \Rightarrow A-\lambda I=\begin{bmatrix}-4-\lambda & 1\\ -1 & -2-\lambda\end{bmatrix}$$

Άρα $p(\lambda)=\det(A-\lambda I)=0 \Rightarrow$

$$(-4-\lambda)(-2-\lambda)+1=0 \Rightarrow (\lambda+3)^2=0 \Rightarrow$$

$\lambda_1=\lambda_2=\lambda=-3$, Διπλή ρίζα

2. Εύρεση ιδιοδιανυσμάτων

Θα βρούμε τα ιδιοδιανύσματα $\vec{v_1}$ και $\vec{v_2}$ ως εξής:

Άρα για $\lambda=-3 \Rightarrow (A-\lambda I)\vec{v_1}=\vec{0} \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\ \beta_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} -a_1+\beta_1=0\\ -a_1+\beta_1=0\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} a_1=\beta_1\\ a_1=\beta_1\end{array}\right. \rightarrow \vec{v_1}=a_1\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} \Rightarrow \vec{v_1}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix},\ a_1=1$$

Το δεύτερο ιδιοδιάνυσμα $\vec{v_2}$, επειδή $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$

βρίσκεται από τη σχέση $(A-\lambda I)\vec{v_2}=\vec{v_1}$

Κατά συνέπεια έχουμε:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -a_2+\beta_2=1 \\ -a_2+\beta_2=1 \end{array} \right| \Rightarrow$$

$$\beta_2 = 1+a_2 \Rightarrow \vec{v_2} = \begin{bmatrix} a_2 \\ 1+a_2 \end{bmatrix} \xRightarrow{a_2=0} \vec{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. Εύρεση Γενικής λύσης του αρχικού συστήματος

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} + c_2 \left(t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) e^{-3t}$$

$$\Rightarrow x(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 t e^{-3t} \Rightarrow x(t) = (c_1 + t c_2) e^{-3t}$$

$$y(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 (t+1) e^{-3t}$$

$$\Rightarrow y(t) = [c_1 + c_2 (t+1)] e^{-3t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

4. Επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών (ΠΑΤ)

Εφαρμογή αρχικών τιμών x(0)=1, y(0)= -1, για την εύρεση των c_1 και c_2

$$t=0 \Rightarrow 1 = c_1 \Rightarrow c_1 = 1$$

$$t=0 \Rightarrow -1 = [1 + c_2(0+1)] e^0 \Rightarrow c_2 = -2$$

Επομένως $x(t) = (1-2t)e^{-3t}$

$y(t) = [1-2(t+1)]e^{-3t} \Rightarrow$

$y(t) = (-2t-1)e^{-3t}.$

3. Να λυθεί το σύστημα

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = x + 2y$$

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y} = -3x + y$$

Λύση:

1. Εύρεση ιδιοτιμών

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -3 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A-\lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(1-\lambda)^2 + 6 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 7 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2+2i\sqrt{6}}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1 + i\sqrt{6}, \quad \lambda_2 = 1 - i\sqrt{6}$$

2. Εύρεση ιδιοδιανυσμάτων

Στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1 + i\sqrt{6}$ αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ \beta \end{bmatrix}$

$$\left[A - (1 + i\sqrt{6}) I \right] \cdot \begin{bmatrix} a \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1-1-i\sqrt{6} & 2 \\ -3 & 1-1-i\sqrt{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -i\sqrt{6} & 2 \\ -3 & -i\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} -i\sqrt{6}a + 2\beta &= 0 \\ -3a - i\sqrt{6}\beta &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \beta = \frac{i\sqrt{6}}{2} a$$

Άρα $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ \frac{i\sqrt{6}}{2} a \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{v} = a \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{i\sqrt{6}}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{a=1} \vec{v} = \begin{vmatrix} 1 \\ \frac{i\sqrt{6}}{2} \end{vmatrix}$

Οπότε $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{i\sqrt{6}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0i \\ 0+\dfrac{i\sqrt{6}}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{vmatrix} 0 \\ \dfrac{\sqrt{6}}{2} \end{vmatrix} \Rightarrow Re(\vec{v}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$ και

$Im(\vec{v}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{\sqrt{6}}{2} \end{bmatrix}$, κατά την έννοια που

ένας μιγαδικός αριθμός $x = a+ib$, έχει πραγματικό μέρος, $Re x = a$ και $Im x = b$.

3. Γενική λύση του αρχικού συστήματος:

$$\vec{Y}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{at}\left[c_1 Re(\vec{v})\cos(bt) - c_2 Im(\vec{v})\sin(bt)\right]$$

όπου $\lambda_1 = a+ib$ η μία μιγαδική ιδιοτιμή που

στην περίπτωσή μας είναι: $\lambda_1 = 1 + i\sqrt{6}$, οπότε

$a = 1$, $b = \sqrt{6}$

Επομένως γενική λύση:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^t \left[c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos(\sqrt{6}t) - c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{2} \end{bmatrix} \sin(\sqrt{6}\,t) \right]$$

$$\Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x(t) = c_1 e^t \cos(\sqrt{6}t) \\ \\ y(t) = -\,c_2 e^t \sin(\sqrt{6}\,t) \end{array} \right.$$

με c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές που εξαρτώνται από τα δεδομένα του προβλήματος.

Παρατήρηση

Σε περίπτωση που ένα ομογενές σύστημα διαφορικών εξισώσεων προσομοιάζει ένα πεδίο μάχης, τότε αν μας δίνονται οι αρχικές δυνάμεις για $t=0$, μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα ως πρός την έκβαση της μάχης αυτής

Παράδειγμα

Έστω ότι το σύστημα του Παραδείγματος 2 παριστάνει τις μεταβολές δύο αντιπάλων δυνάμεων X, Y και συγκεκριμένα μεταβολή αριθμού στρατιωτών

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -4x + 2y \\ \dot{y} &= -x + 2y \end{aligned}\right| \quad (1)$$

όπου $x(t)$ και $y(t)$ είναι οι συναρτήσεις του αριθμού των στρατιωτών σε σχέση με τον χρόνο t.

Επιπλέον δίνεται $x(0) = x_0 = 100$ και $y(0) = y_0 = 50$

Να εξετασθεί ποια δύναμη θα επικρατήσει

Από την επίλυση του Παραδείγματος 2, γνωρίζουμε ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$ και η γενική λύση του συστήματος (1) είναι

$$x(t) = (c_1 + t c_2) e^{-3t}$$

$$y(t) = [c_1 + (t+1) c_2] e^{-3t}$$

Εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες $x(0) = 100$ και $y(0) = 50$, έχουμε

$$\left.\begin{aligned} 100 &= (c_1 + 0 \cdot c_2) e^{0} \\ 50 &= [c_1 + (0+1) c_2] e^{0} \end{aligned}\right| \Rightarrow \begin{aligned} c_1 &= 100 \\ c_2 &= -50 \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια οι λύσεις είναι

$$x(t) = (100 - 50t) e^{-3t}$$

$$y(t) = [100 - 50(t+1)] e^{-3t}$$

Για να βρούμε ποια από τις δυνάμεις επικρατεί, μηδενίζουμε τις $x(t)$ και $y(t)$. Έστω ότι οι $x(t)$, $y(t)$ μηδενίζονται σε χρόνο t_1, t_2 αντίστοιχα

$$x(t_1) = 0 \Rightarrow 100 - 50 t_1 = 0 \Rightarrow t_1 = 2$$

$$y(t_2) = 0 \Rightarrow 100 - 50(t_2 + 1) = 0 \Rightarrow t_2 = 1$$

Είναι όμως $t_2 < t_1$ που σημαίνει ότι η δύναμη Y εξαντλείται 1η, επομένως η επικρατούσα δύναμη είναι η X.

Υπολογίζουμε και τον αριθμό των επιζώντων της δύναμης X, θέτοντας $t = 1$ στην $x(t)$.

Άρα $x(1) = 50e^{-3} \simeq 2.5$ στρατιώτες, δηλαδή τελικά επιζούν 2 στρατιώτες.