

Μοντέλα μάχης
Lanchester

Γ' Μαχίμων
Γ' Μηχανικών
2025 - 2026

Σοφία Κυρίτση - Γιάλλουρου 

Μοντέλα μάχης Lanchester

Θεωρούμε αντίπαλες δυνάμεις X και Y , οι οποίες διαθέτουν $x(t)$ και $y(t)$ στρατιώτες σε πεδίο μάχης. Η μάχη μεταξύ των δύο δυνάμεων μπορεί να περιγραφεί, σύμφωνα με τον F. W. Lanchester με 2 νόμους

1. Τετραγωνικός Νόμος ή Μοντέλο στοχευμένων πυρών (Square Lanchester Law - Aimed Fire Model)

$$\frac{dx}{dt} = -\beta y$$

$$\frac{dy}{dt} = -\alpha x$$

όπου α, β είναι οι συντελεστές επιχειρησιακής ικανότητας γενικά των δυνάμεων X και Y αντίστοιχα ή ο αριθμός των απωλειών ανά μονάδα χρόνου.

Είναι δε a, β πραγματικοί θετικοί αριθμοί.

2 **Γραμμικός Νόμος** - Νόμος πεδίου πυρών ή μη στοχευμένων πυρών
(Linear Law - Unaimed Fire - area fire model)

$$\frac{dx}{dt} = -\beta y x$$

$$\frac{dy}{dt} = -\alpha x y$$

Όπως προηγουμένως $\alpha, \beta > 0$.

Στην πραγματικότητα έχουμε συνδυασμό των δύο μοντέλων, δηλαδή του γραμμικού και του τετραγωνικού Νόμου

Θα μας απασχολήσει ο Τετραγωνικός Νόμος
και εφαρμογές του

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\beta y \\ \frac{dy}{dt} &= -ax \end{aligned} \quad (1)$$

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0$$

$$(1) \Rightarrow \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}} = \frac{\beta y}{ax}, \quad \begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{\beta y}{ax}$$

Διαφορική εξίσωση
χωριζομένων μετα-
βλητών

$$\Rightarrow x dx = \frac{\beta}{a} y dy$$

$$\Rightarrow \int_0^t x dx = \frac{\beta}{a} \int_0^t y dy, \quad \text{ολοκληρώνουμε από } 0 \text{ έως } t$$

$$\Rightarrow \left. \frac{x^2}{2} \right]_0^t = \frac{\beta}{a} \left. \frac{y^2}{2} \right]_0^t$$

$$\Rightarrow x^2(t) - x^2(0) = \frac{b}{a} (y^2(t) - y^2(0))$$

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0$$

$$\Rightarrow x^2(t) - x_0^2 = \frac{b}{a} (y^2(t) - y_0^2) \quad (2)$$

Για να επικρατήσει η δύναμη X, τη χρονική στιγμή $t = T$, πρέπει $x(T) > 0$ και

$$y(T) = 0$$

για $t = T$ στη (2)

$$x^2(T) - x_0^2 = -\frac{b}{a} y_0^2$$

$$\Rightarrow x^2(T) = x_0^2 - \frac{b}{a} y_0^2 \quad \Rightarrow \left(\frac{x_0}{y_0}\right)^2 > \frac{b}{a}$$

$$x^2(T) > 0$$

Συνθήκη επικράτησης δύναμης X

Αντίστοιχα για την επικράτηση της δύναμης Y ,

θα πρέπει να ισχύει για κάποια χρονική

$$t = T, \quad Y(T) > 0 \quad \text{και} \quad X(T) = 0$$

οπότε, όπως προηγουμένως η συνθήκη που προκύπτει είναι

Συνθήκη επικράτησης της δύναμης Y

$$\left(\frac{x_0}{y_0} \right)^2 < \frac{b}{a}$$

;

Αριθμητικό Παράδειγμα

Μάχη μεταξύ δύο δυνάμεων X και Y ακολουθεί τον κάτωθι τετραγωνικό νόμο του Lanchester,

$$\frac{dx}{dt} = -2y$$

$$x(0) = 100 \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = -3x$$

$$y(0) = 120$$

Να βρεθεί ποια δύναμη θα υπερικύσει και πότε. Ως μονάδα χρόνου να ληφθεί ο μήνας.

Λύση

Εξετάζουμε τα πηλικά $\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^2$ και

$\frac{\beta}{\alpha}$, οπότε για $\alpha=3$, $\beta=2$ και

$x_0 = 100$, $y_0 = 120$, έχουμε

$$\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^2 = \left(\frac{100}{120}\right)^2 = \frac{25}{36}$$

$$\text{και } \frac{\beta}{\alpha} = \frac{2}{3} = \frac{24}{36} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^2 > \frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow \text{θα επικρατήσει}$$

η δύναμη X σε κάποια χρονική στιγμή

$$t = T.$$

2. Θα λύσουμε το σύστημα Δ.Ε. (1)

$$\frac{dx}{dt} = -2y = 0 - 2y$$

$$\frac{dy}{dt} = -3x = -3x + 0y$$

$$\begin{aligned} x(0) &= 100 \\ y(0) &= 120 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Οι άγνωστες συναρτήσεις είναι $x(t), y(t)$

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο λύσης των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & -2 \\ -3 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Η χ.Ε του πίνακα A είναι

$$\det(A - \lambda I) = 0$$
$$\Rightarrow \lambda^2 - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \sqrt{6} \\ \lambda_2 = -\sqrt{6} \end{cases}$$

•

Στη συνέχεια βρίσκουμε τα αντίστοιχα
ιδιοδιανύσματα

Για $\lambda_1 = \sqrt{6}$, έστω $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$ το αντί-

στοιχο ιδιοδιάνυσμα, οπότε

$$(A - \lambda_1 I) \vec{v}_1 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -\sqrt{6} & -2 \\ -3 & -\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} -\sqrt{6}\alpha_1 - 2\beta_1 = 0 \\ -3\alpha_1 - \sqrt{6}\beta_1 = 0 \end{array} \Bigg| \Rightarrow \beta_1 = -\frac{\sqrt{6}}{2}\alpha_1$$

$$\text{δρα } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ -\frac{\sqrt{6}}{2} a_1 \end{pmatrix} \quad a_1 = 1 \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{'Όμοια για } \lambda_2 = -\sqrt{6} \text{ και } \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda_2 I) \vec{v}_2 = \vec{0} \text{ και είναι } \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{Y}(t) = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t}$$

'Αρα η γενική λύση του (1) είναι

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix} e^{\sqrt{6}t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix} e^{-\sqrt{6}t}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = c_1 e^{\sqrt{6}t} + c_2 e^{-\sqrt{6}t} \\ y(t) = -\frac{\sqrt{6}}{2} c_1 e^{\sqrt{6}t} + \frac{\sqrt{6}}{2} c_2 e^{-\sqrt{6}t} \end{cases}$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ σταθερές ολοκλήρωσης

$$x(0) = 100, \quad y(0) = 120$$

$$\Rightarrow t=0 \quad \left| \begin{array}{l} C_1 + C_2 = 100 \\ -\frac{\sqrt{6}}{2} C_1 + \frac{\sqrt{6}}{2} C_2 = 120 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow C_1 = 1$$

$$C_2 = 99$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} x(t) = e^{\sqrt{6}t} + 99e^{-\sqrt{6}t} \\ y(t) = -\frac{\sqrt{6}}{2} e^{\sqrt{6}t} + \frac{\sqrt{6}}{2} 99e^{-\sqrt{6}t} \end{array} \right.$$

Επειδή γνωρίζουμε από τη συνθήκη επικράτησης ότι επικρατεί η δύναμη X ,

αυτό σημαίνει ότι για κάποιο $t = T$

οι δυνάμεις $y(T) = 0$, άρα

για $t = T$, $y(T) = 0$

$$0 = -\frac{\sqrt{6}}{2} e^{\sqrt{6}T} + 99 \frac{\sqrt{6}}{2} e^{-\sqrt{6}T} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{e^{\sqrt{6}T}}{e^{-\sqrt{6}T}} = 99 \Rightarrow e^{2\sqrt{6}T} = 99$$

$$\Rightarrow T = \frac{\ln 99}{2\sqrt{6}} \Rightarrow T = 0.94 \text{ μήνες}$$

$\Rightarrow T \approx 29$ μέρες, λαμβάνουμε ως μονάδα χρόνου την ημέρα.

Συμπέρασμα: Η μάχη ολοκληρώνεται σε 29 μέρες περίπου από την έναρξή της και νικητής είναι η δύναμη X.