ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: Γ. ΓΑΛΑΝΗΣ, Δ. ΚΟΥΛΟΥΜΠΟΥ

Τι είναι η Θεωρία Παιγνίων

- Η Θεωρία παιγνίων ασχολείται με αποφάσεις, υπό αβέβαιες συνήθως συνθήκες, όπου εμπλέκονται δύο ή και περισσότεροι νοήμονες «αντίπαλοι».
- Ο καθένας τους φιλοδοξεί να βελτιστοποιήσει την δική του απόφαση εις βάρος των άλλων ή σε συνεργασία με άλλους, διαμορφώνοντας ίσως συνασπισμούς.

Τι είναι η Θεωρία Παιγνίων

- Εφόσον συμμετέχουν τουλάχιστον δύο παίκτες με τουλάχιστον δύο στρατηγικές ο καθένας με αντίθετα συμφέροντα, το αποτέλεσμα για κάθε παίκτη καθορίζεται από τις συνδυασμένες επιλογές όλων των παικτών και δίνεται από τον πίνακα αποτελεσμάτων του παιγνίου.

Τι είναι η Θεωρία Παιγνίων

- Ονομάζουμε παίγνιο την κατάσταση σύγκρουσης ή ανταγωνισμού ή και συνεργασίας μεταξύ των αντιπάλων ή μεταξύ των ομάδων των αντιπάλων.

Ιστορική Αναδρομή

- Η αρχική ανάπτυξη της θεωρίας παιγνίων αποδίδεται στον **John von Neumann (1928),** ο οποίος μελετώντας το αντικείμενο αυτό ανακάλυψε και όρισε την σχέση της θεωρίας παιγνίων με τον γραμμικό προγραμματισμό.
- Αργότερα ο **George B. Dantzig** ανέπτυξε την θεωρία Simplex του γραμμικού προγραμματισμού και έτσι δόθηκε η δυνατότητα να επιλυθούν πολλά προβλήματα της θεωρίας παιγνίων.

Ιστορική Αναδρομή

- Στην συνέχεια με την πολύτιμη προσφορά του Αμερικάνου μαθηματικού **Nash** αναπτύχθηκε πιο πολύ η θεωρία παιγνίων.
- Για την εργασία του αυτή ο Αμερικάνος μαθηματικός τιμήθηκε με το βραβείο Nobel οικονομίας.

Ιστορική Αναδρομή

- Σε μια ειδική κατηγορία της θεωρίας παιγνίων, τα παίγνια με συνεργασία, πολύτιμη ήταν η προσφορά του **Shapley.**
- Τέλος ο **Lemke**, με την ανάπτυξη του ομώνυμου αλγόριθμου, έκανε το πρώτο βήμα στην ανακάλυψη αλγορίθμων που χρησιμοποιούνται για την επίλυση παιγνίων.

Στατικά Παίγνια με Πλήρη Πληροφόρηση

- Η πιο απλή αλλά και πιο θεμελιώδης κατηγορία παιγνίων είναι αυτή των στατικών παιγνίων με πλήρη πληροφόρηση.
- Στα παίγνια αυτά οι παίκτες επιλέγουν ενέργειες ταυτόχρονα ο ένας με τον άλλο.
- Βασικό στοιχείο αυτών των παιγνίων είναι ότι όλοι οι παίκτες έχουν πλήρης πληροφόρηση για όλα τα χαρακτηριστικά του παιγνίου.
- Η πληροφόρηση αυτή αποτελεί κοινή γνώση.

Στατικά Παίγνια με Πλήρη Πληροφόρηση - Παράδειγμα

- Παράδειγμα στατικού παίγνιου με πλήρη πληροφόρηση είναι μία αγορά στην οποία οι επιχειρήσεις ανταγωνίζονται μία φορά (**στατική ολιγοπωλιακή αγορά**).
- Στην αγορά αυτή κάθε επιχείρηση επιλέγει την τιμή στην οποία θα πουλήσει το προϊόν της.
- Οι επιλογές των τιμών γίνονται ταυτόχρονα από όλες τις επιχειρήσεις.

Στατικά Παίγνια με Πλήρη Πληροφόρηση - Παράδειγμα

- Στόχος κάθε επιχείρησης είναι η μεγιστοποίηση του ατομικού κέρδους της.
- Κάθε επιχείρηση γνωρίζει όλα τα χαρακτηριστικά της αγοράς (**πλήρης πληροφόρηση**). Π.χ. γνωρίζει συνθήκες ζήτησης και κόστους για όλες τις επιχειρήσεις.

Στατικά Παίγνια με Πλήρη Πληροφόρηση

Συνοψίζοντας, στα Στατιστικά παίγνια με πλήρη πληροφόρηση τα βασικά χαρακτηριστικά είναι τα εξής:

- Συμμετέχοντες στο παίγνιο: **Παίκτες.**
- Διαθέσιμες ενέργειες συμμετεχόντων: **Στρατηγικές παικτών.**
- Χρησιμότητες συμμετεχόντων: **Αποδόσεις παικτών.**

Στατικά Παίγνια με Πλήρη Πληροφόρηση

- Το βασικό πρόβλημα που θα μας απασχολήσει είναι **να προσδιορίσουμε ποια στρατηγική ή ποιες στρατηγικές θα επιλέξει κάθε παίκτης σε ένα στατικό παίγνιο με πλήρη πληροφόρηση**.
- Κάθε παίκτης επιλέγει την στρατηγική του ώστε να μεγιστοποιήσει την απόδοση του.
- Η επιλογή του θα πρέπει να είναι η βέλτιστη δεδομένου της πρόβλεψης για την επιλογή στρατηγικής των άλλων παικτών.

Βασικό Πλαίσιο

Για να ορίσουμε ένα παίγνιο πλήρους πληροφόρησης χρειαζόμαστε:

- Το σύνολο των παικτών $N = \{1,2, \dots, n\}, n \in \mathbb{N}^*$
- Το σύνολο των στρατηγικών του παίκτη i, X_i, για κάθε $i = 1,2, \dots, n$.
- Τη συνάρτηση απόδοσης του παίκτη i, $u_i\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$, όπου $\mathrm{X} = \mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2 \times \cdots \times \mathrm{X}_n$, για κάθε $i = 1,2, \dots, n$.

Βασικό Πλαίσιο

Σημείωση:

Η συνάρτηση απόδοσης u_i, δίνει την απόδοση του παίκτη i αν είναι γνωστές οι στρατηγικές όλων των παικτών.

Ορισμός

Ως **παίγνιο πλήρους πληροφόρησης σε στρατηγική μορφή** ορίζουμε το σύνολο

$$\Gamma = \{\mathrm{N}, (\mathrm{X}_\iota, u_i)_{i \in \mathbb{N}^*}\}.$$

Παράδειγμα 1 (Παίγνιο με δύο Παίχτες):

- Έστω το σύνολο των παικτών $N = \{1,2\}$.
- Το σύνολο των στρατηγικών του παίκτη 1 είναι $X_1 = \{A_1, B_1, \Gamma_1\}$ και του παίκτη 2 είναι $X_2 = \{A_2, B_2, \Gamma_2\}$.
- Για να περιγράψουμε τις αποδόσεις των δύο παικτών χρησιμοποιούμε τον παρακάτω πίνακα ο οποίος ονομάζεται **πίνακας αποδόσεων.**

Παράδειγμα 1 (Παίγνιο με δύο Παίχτες):

- **πίνακας αποδόσεων του παραδείγματος (παίγνιο με δύο παίχτες):**

	$\mathbf{A_2}$	$\mathbf{B_2}$	$\mathbf{\Gamma_2}$
$\mathbf{A_1}$	2,0	0,1	0,2
$\mathbf{B_1}$	0,0	1,1	1,1
$\mathbf{\Gamma_1}$	3,2	1,3	1,1

Παράδειγμα 1 (Παίγνιο με δύο Παίχτες):

- Στον παραπάνω πίνακα οι γραμμές αντιστοιχούν στις στρατηγικές του παίκτη 1, ενώ οι στήλες στις στρατηγικές του παίκτη 2.
- Οι αποδόσεις των παικτών που αντιστοιχούν στις διαφορές επιλογές στρατηγικών αναγράφονται στα κελιά του πίνακα.

Παράδειγμα 1 (Παίγνιο με δύο Παίχτες):

- Για παράδειγμα αν οι παίκτες 1 και 2 επιλέξουν τις στρατηγικές $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2$ αντίστοιχα, τότε η απόδοση του παίκτη 1 είναι $\mathbf{2}$, ενώ του παίκτη 2 η απόδοση είναι $\mathbf{0}$.
- Έχουμε δηλαδή $u_1(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2) = 2$ και $u_2(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2) = 0$.

	$\mathbf{A_2}$	$\mathbf{B_2}$	$\mathbf{\Gamma_2}$
$\mathbf{A_1}$	2,0	0,1	0,2
$\mathbf{B_1}$	0,0	1,1	1,1
$\mathbf{\Gamma_1}$	3,2	1,3	1,1

Παράδειγμα 1 (Παίγνιο με δύο Παίχτες):

- Αν οι παίκτες 1 και 2 επιλέξουν τις στρατηγικές $\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_2$ αντίστοιχα, τότε η απόδοση του παίκτη 1 είναι $\mathbf{0}$, ενώ του παίκτη 2 η απόδοση είναι $\mathbf{1}$.
- Έχουμε δηλαδή $u_1(\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_2) = 0$ και $u_2(\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_2) = 1$.

	$\mathbf{A_2}$	$\mathbf{B_2}$	$\mathbf{\Gamma_2}$
$\mathbf{A_1}$	2,0	0,1	0,2
$\mathbf{B_1}$	0,0	1,1	1,1
$\mathbf{\Gamma_1}$	3,2	1,3	1,1

Παράδειγμα 1 (Παίγνιο με δύο Παίχτες):

- Αν οι παίκτες 1 και 2 επιλέξουν τις στρατηγικές Γ_1, B_2 αντίστοιχα, τότε η απόδοση του παίκτη 1 είναι $\mathbf{1}$, ενώ του παίκτη 2 η απόδοση είναι $\mathbf{3}$.
- Έχουμε δηλαδή $u_1(\Gamma_1, \mathrm{B}_2) = 1$ και $u_2(\Gamma_1, \mathrm{B}_2) = 3$.

	$\mathbf{A_2}$	$\mathbf{B_2}$	$\mathbf{\Gamma_2}$
$\mathbf{A_1}$	2,0	0,1	0,2
$\mathbf{B_1}$	0,0	1,1	1,1
$\mathbf{\Gamma_1}$	3,2	1,3	1,1

Άσκηση

<u>Άσκηση:</u>

A. Βρείτε τις υπόλοιπες τιμές των συναρτήσεων αποδόσεων των δύο παικτών 1,2.
B. Ποιο το σύνολο τιμών της κάθε συνάρτησης;
C. Πότε ο παίκτης 1 μεγιστοποιεί το κέρδος του; Ποια η απόδοση στην περίπτωση αυτή του παίκτη 2;
D. Πότε ο παίκτης 2 μεγιστοποιεί το κέρδος του; Ποια η απόδοση στην περίπτωση αυτή του παίκτη 1;

Παράδειγμα 2 (Παίγνιο με Τρεις Παίχτες):

- Έστω το σύνολο των παικτών $N = \{1,2,3\}$.
- Το σύνολο των στρατηγικών του παίκτη 1 είναι $X_1 = \{A_1, B_1, \Gamma_1\}$, του παίκτη 2 είναι $X_2 = \{A_2, B_2, \Gamma_2\}$ και του παίκτη 3 είναι $X_3 = \{A_3, B_3\}$
- Για να περιγράψουμε τις αποδόσεις των δύο παικτών χρησιμοποιούμε εδώ δύο πίνακες οι οποίοι ονομάζονται **πίνακες αποδόσεων.**

Παράδειγμα 2 (Παίγνιο με Τρεις Παίχτες):

- **πίνακες αποδόσεων του παραδείγματος (παίγνιο με τρεις παίχτες):**

	$\mathbf{A_2}$	$\mathbf{B_2}$	$\mathbf{\Gamma_2}$
$\mathbf{A_1}$	2,0,1	0,1,3	0,2,1
$\mathbf{B_1}$	0,0,3	2,1,1	1,4,1
$\mathbf{\Gamma_1}$	3,2,0	1,3,0	1,1,1

$\mathbf{A_3}$

	$\mathbf{A_2}$	$\mathbf{B_2}$	$\mathbf{\Gamma_2}$
$\mathbf{A_1}$	2,1,3	1,2,4	0,1,1
$\mathbf{B_1}$	0,0,0	2,2,1	1,2,1
$\mathbf{\Gamma_1}$	3,3,3	1,3,1	0,2,2

$\mathbf{B_3}$

Παράδειγμα 2 (Παίγνιο με Τρεις Παίχτες):

- Ο πρώτος πίνακας αφορά την στρατηγική A_3 του παίκτη 3, οι γραμμές αντιστοιχούν στις στρατηγικές του παίκτη 1, ενώ οι στήλες στις στρατηγικές του παίκτη 2.
- Ο δεύτερος πίνακας αφορά την στρατηγική B_3 του παίκτη 3, οι γραμμές αντιστοιχούν στις στρατηγικές του παίκτη 1, ενώ οι στήλες στις στρατηγικές του παίκτη 2.

Παράδειγμα 2 (Παίγνιο με Τρεις Παίχτες):

- Οι αποδόσεις των παικτών που αντιστοιχούν στις διαφορές επιλογές στρατηγικών αναγράφονται στα κελιά του πίνακα. Ο πρώτος αριθμός σε κάθε κελί είναι η απόδοση του παίκτη 1, ο δεύτερος η απόδοση του παίκτη 2 και ο τρίτος αριθμός η απόδοση του παίκτη 3.

Παράδειγμα 2 (Παίγνιο με Τρεις Παίχτες):

- Για παράδειγμα αν οι παίκτες 1,2,3 επιλέξουν τις στρατηγικές A_1, A_2, A_3 αντίστοιχα, τότε η απόδοση του παίκτη 1 είναι $\mathbf{2}$, του παίκτη 2 η απόδοση είναι $\mathbf{0}$ και η απόδοση του παίκτη 3 είναι $\mathbf{1}$.

	$\mathbf{A_2}$	$\mathbf{B_2}$	$\mathbf{\Gamma_2}$
$\mathbf{A_1}$	2,0,1	0,1,3	0,2,1
$\mathbf{B_1}$	0,0,3	2,1,1	1,4,1
$\mathbf{\Gamma_1}$	3,2,0	1,3,0	1,1,1

$\mathbf{A_3}$

Παράδειγμα 2 (Παίγνιο με Τρεις Παίχτες):

- Έχουμε δηλαδή $u_1(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3) = 2$, $u_2(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3) = 0$ και $u_3(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3) = 1$.

	$\mathbf{A_2}$	$\mathbf{B_2}$	$\mathbf{\Gamma_2}$
$\mathbf{A_1}$	2,0,1	0,1,3	0,2,1
$\mathbf{B_1}$	0,0,3	2,1,1	1,4,1
$\mathbf{\Gamma_1}$	3,2,0	1,3,0	1,1,1

$\mathbf{A_3}$

Παράδειγμα 2 (Παίγνιο με Τρεις Παίχτες):

- Αν οι παίκτες 1,2,3 επιλέξουν τις στρατηγικές $\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{A}_3$ αντίστοιχα, τότε η απόδοση του παίκτη 1 είναι $\mathbf{0}$, του παίκτη 2 είναι $\mathbf{1}$ και η απόδοση του παίκτη 3 είναι $\mathbf{3}$.
- Έχουμε δηλαδή $u_1(\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{A}_3) = 0$, $u_2(\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{A}_3) = 1$ και $u_3(\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{A}_3) = 3$.

	$\mathbf{A_2}$	$\mathbf{B_2}$	$\mathbf{\Gamma_2}$
$\mathbf{A_1}$	2,0,1	0,1,3	0,2,1
$\mathbf{B_1}$	0,0,3	2,1,1	1,4,1
$\mathbf{\Gamma_1}$	3,2,0	1,3,0	1,1,1

$\mathbf{A_3}$

Παράδειγμα 2 (Παίγνιο με Τρεις Παίχτες):

- Αν οι παίκτες 1,2,3 επιλέξουν τις στρατηγικές $\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{B}_3$ αντίστοιχα, τότε η απόδοση του παίκτη 1 είναι $\mathbf{1}$, του παίκτη 2 είναι $\mathbf{2}$ και η απόδοση του παίκτη 3 είναι $\mathbf{4}$.
- Έχουμε δηλαδή $u_1(\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{B}_3) = 1$, $u_2(\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{B}_3) = 2$ και $u_3(\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{B}_3) = 4$.

	$\mathbf{A_2}$	$\mathbf{B_2}$	$\mathbf{\Gamma_2}$
$\mathbf{A_1}$	2,1,3	1,2,4	0,1,1
$\mathbf{B_1}$	0,0,0	2,2,1	1,2,1
$\mathbf{\Gamma_1}$	3,3,3	1,3,1	0,2,2

$\mathbf{B_3}$

Βιβλιογραφία

- Γ. Σταματόπουλος, Θεωρία Παιγνίων, Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα. www.kallipos.gr