

Ισορροπία Nash - Συνάρτηση Βέλτιστης Αντίδρασης

ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: Γ. ΓΑΛΑΝΗΣ, Δ. ΚΟΥΛΟΥΜΠΟΥ

Ισορροπία Nash – Παραδείγματα

Θα μελετήσουμε στην συνέχεια τις ισορροπίες Nash για ορισμένα απλά παραδείγματα παιγνίων.

Παράδειγμα 1:

- Έστω το σύνολο των παικτών $N = \{1,2\}$.
- Το σύνολο των στρατηγικών του παίκτη 1 είναι $X_1 = \{A_1, B_1, \Gamma_1\}$ και του παίκτη 2 είναι $X_2 = \{A_2, B_2, \Gamma_2\}$.
- Οι αποδόσεις των δύο παικτών φαίνονται στον παρακάτω **πίνακα αποδόσεων**.

Ισορροπία Nash – Παραδείγματα

Παράδειγμα 1:

- Έστω το σύνολο των παικτών $N = \{1,2\}$.
- Το σύνολο των στρατηγικών του παίκτη 1 είναι $X_1 = \{A_1, B_1, \Gamma_1\}$ και του παίκτη 2 είναι $X_2 = \{A_2, B_2, \Gamma_2\}$.
- Οι αποδόσεις των δύο παικτών φαίνονται στον παρακάτω **πίνακα αποδόσεων**.

Ισορροπία Nash – Παράδειγμα 1

	A₂	B₂	Γ₂
A₁	0, 0	0, 1	1, 2
B₁	0, 2	1, 1	0, 0
Γ₁	1, 2	0, 1	0, 3

Ισορροπία Nash – Παράδειγμα 1

- Θα εξετάσουμε ποια ζεύγη στρατηγικών συνιστούν ισορροπία Nash.
- Ας δούμε πρώτα το ζεύγος (A_1, A_2) .
- Το σημείο αυτό δεν συνιστά σημείο ισορροπίας. Ένας τουλάχιστον παίκτης έχει λόγο να επιλέξει διαφορετική πιο συμφέρουσα στρατηγική.

Ισορροπία Nash – Παράδειγμα 1

- Δεδομένης της στρατηγικής A_2 του παίκτη 2, αν ο παίκτης 1 αλλάξει στρατηγική και από την A_1 επιλέξει την Γ_1 τότε έχει καλύτερη απόδοση, αφού

$$u_1(A_1, A_2) = 0 < u_1(\Gamma_1, A_2) = 1.$$

- Συνεπώς η στρατηγική (A_1, A_2) δεν συνιστά συνδυασμό αμοιβαία βέλτιστων στρατηγικών.

	A_2	B_2	Γ_2
A_1	0,0	0,1	1,2
B_1	0,2	1,1	0,0
Γ_1	1,2	0,1	0,3

Ισορροπία Nash – Παράδειγμα 1

- Ας δούμε τώρα το ζεύγος (B_1, A_2) .
- Επίσης το σημείο αυτό δεν συνιστά σημείο ισορροπίας.

Ισορροπία Nash – Παράδειγμα 1

- Δεδομένης της στρατηγικής A_2 του παίκτη 2, αν ο παίκτης 1 αλλάξει στρατηγική και από την B_1 επιλέξει την Γ_1 τότε έχει καλύτερη απόδοση, αφού

$$u_1(B_1, A_2) = 0 < u_1(\Gamma_1, A_2) = 1.$$

- Συνεπώς ούτε η στρατηγική (B_1, A_2) δεν συνιστά συνδυασμό αμοιβαία βέλτιστων στρατηγικών.

	A_2	B_2	Γ_2
A_1	0,0	0,1	1,2
B_1	0,2	1,1	0,0
Γ_1	1,2	0,1	0,3

Ισορροπία Nash – Παράδειγμα 1

- Ο συνδυασμός (A_1, B_2) δίνει κίνητρο μονομερούς απόκλισης τόσο στον παίκτη 1 όσο και στον παίκτη 2.
- Επίσης το σημείο αυτό δεν συνιστά σημείο ισορροπίας.

Ισορροπία Nash – Παράδειγμα 1

- Δεδομένης της στρατηγικής B_2 του παίκτη 2, αν ο παίκτης 1 αλλάξει στρατηγική και από την A_1 επιλέξει την B_1 τότε έχει καλύτερη απόδοση, αφού

$$u_1(A_1, B_2) = 0 < u_1(B_1, A_2) = 1.$$

	A_2	B_2	Γ_2
A_1	0,0	0,1	1,2
B_1	0,2	1,1	0,0
Γ_1	1,2	0,1	0,3

Ισορροπία Nash – Παράδειγμα 1

- Δεδομένης της στρατηγικής A_1 του παίκτη 1, αν ο παίκτης 1 αλλάξει στρατηγική και από την B_2 επιλέξει την Γ_2 τότε έχει καλύτερη απόδοση, αφού

$$u_2(A_1, B_2) = 1 < u_2(A_1, \Gamma_2) = 2.$$

	A_2	B_2	Γ_2
A_1	0,0	0,1	1,2
B_1	0,2	1,1	0,0
Γ_1	1,2	0,1	0,3

Ισορροπία Nash – Παράδειγμα 1

- Ας δούμε τέλος τον συνδυασμό (A_1, Γ_2) . Για την περίπτωση αυτή δεν υπάρχει κίνητρο μονομερούς απόκλισης.
- Δεδομένης της στρατηγικής Γ_2 του παίκτη 2 η βέλτιστη στρατηγική του παίκτη 1 είναι η A_1 .
- Δεδομένης της στρατηγικής A_1 του παίκτη 1 η βέλτιστη στρατηγική του παίκτη 2 είναι η Γ_2 .

	A_2	B_2	Γ_2
A_1	0,0	0,1	1,2
B_1	0,2	1,1	0,0
Γ_1	1,2	0,1	0,3

Ισορροπία Nash – Παράδειγμα 1

- Ο συνδυασμός (A_1, Γ_2) είναι συνεπώς συνδυασμός αμοιβαία βέλτιστων στρατηγικών, είναι δηλαδή **ισορροπία κατά Nash**.

	A_2	B_2	Γ_2
A_1	0,0	0,1	1,2
B_1	0,2	1,1	0,0
Γ_1	1,2	0,1	0,3

Ισορροπία Nash – Συνάρτηση Βέλτιστης Αντίδρασης

- Η συνάρτηση βέλτιστης αντίδρασης ενός παίκτη δίνει τις στρατηγικές εκείνες που μεγιστοποιούν την απόδοση των δεδομένων των στρατηγικών των άλλων παικτών.
- Ας δούμε τις βέλτιστες στρατηγικές στο προηγούμενο παράδειγμα.

Ισορροπία Nash – Συνάρτηση Βέλτιστης Αντίδρασης

- Συμβολίζουμε με $b_1(x_2)$ τη βέλτιστη στρατηγική του παίκτη 1 δεδομένης της στρατηγικής x_2 του παίκτη 2. $x_2 \in \{A_2, B_2, \Gamma_2\}$
- Η συνάρτηση αυτή παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα.

x_2	$b_1(x_2)$
A_2	Γ_1
B_2	B_1
Γ_2	A_1

	A_2	B_2	Γ_2
A_1	0,0	0,1	1,2
B_1	0,2	1,1	0,0
Γ_1	1,2	0,1	0,3

Ισορροπία Nash – Συνάρτηση Βέλτιστης Αντίδρασης

- Συμβολίζουμε με $b_2(x_1)$ τη βέλτιστη στρατηγική του παίκτη 2 δεδομένης της στρατηγικής x_1 του παίκτη 1. $x_1 \in \{A_1, B_1, \Gamma_1\}$
- Η συνάρτηση αυτή παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα.

x_1	$b_2(x_1)$
A_1	Γ_2
B_1	A_2
Γ_1	Γ_2

	A_2	B_2	Γ_2
A_1	0,0	0,1	1,2
B_1	0,2	1,1	0,0
Γ_1	1,2	0,1	0,3

Ισορροπία Nash – Συνάρτηση Βέλτιστης Αντίδρασης

- Όπως έχουμε ήδη πει, η ισορροπία επιτυγχάνεται σε κάθε προφίλ αμοιβαία βέλτιστων στρατηγικών.

x_1	$b_2(x_1)$
A_1	Γ_2
B_1	A_2
Γ_1	Γ_2

x_2	$b_1(x_2)$
A_2	Γ_1
B_2	B_1
Γ_2	A_1

- Από τους πίνακες βλέπουμε ότι

$$b_1(\Gamma_2) = A_1 \text{ και } b_2(A_1) = \Gamma_2$$

Ισορροπία Nash – Συνάρτηση Βέλτιστης Αντίδρασης

- Δηλαδή οι στρατηγικές (A_1, Γ_2) είναι αμοιβαία βέλτιστες.

Ισορροπία Nash – Παράδειγμα 2

Παράδειγμα 2:

- Έστω το σύνολο των δύο παικτών $N = \{1,2\}$.
- Το σύνολο των στρατηγικών του παίκτη 1 είναι $X_1 = \{A_1, B_1, \Gamma_1\}$ και του παίκτη 2 είναι $X_2 = \{A_2, B_2, \Gamma_2\}$.
- Οι αποδόσεις των δύο παικτών φαίνονται στον παρακάτω **πίνακα αποδόσεων**.

Ισορροπία Nash – Παράδειγμα 2

	A₂	B₂	Γ₂
A₁	0, 0	0, 1	1, 2
B₁	0, 2	1, 1	0, 0
Γ₁	1, 2	0, 1	0, 1

Ισορροπία Nash – Παράδειγμα 2

- Η συνάρτηση $b_1(x_2)$ της βέλτιστης στρατηγική του παίκτη 1 δεδομένης της στρατηγικής x_2 του παίκτη 2, $x_2 \in \{A_2, B_2, \Gamma_2\}$ παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα.

x_2	$b_1(x_2)$
A_2	Γ_1
B_2	B_1
Γ_2	A_1

	A_2	B_2	Γ_2
A_1	0,0	0,1	1,2
B_1	0,2	1,1	0,0
Γ_1	1,2	0,1	0,1

Ισορροπία Nash – Παράδειγμα 2

- Η συνάρτηση $b_2(x_1)$ της βέλτιστης στρατηγική του παίκτη 2 δεδομένης της στρατηγικής x_1 του παίκτη 1, $x_1 \in \{A_1, B_1, \Gamma_1\}$ παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα.

x_1	$b_2(x_1)$
A_1	Γ_2
B_1	A_2
Γ_1	A_2

Ισορροπία Nash – Παράδειγμα 2

x_2	$b_1(x_2)$
A_2	Γ_1
B_2	B_1
Γ_2	A_1

x_1	$b_2(x_1)$
A_1	Γ_2
B_1	A_2
Γ_1	A_2

- Από τους πίνακες βλέπουμε ότι
 - $b_1(\Gamma_2) = A_1$ και $b_2(A_1) = \Gamma_2$
 - $b_1(A_2) = \Gamma_1$ και $b_2(\Gamma_1) = A_2$

Ισορροπία Nash – Παράδειγμα 2

- Δηλαδή, στο παίγνιο αυτό υπάρχουν δύο προφίλ αμοιβαία βέλτιστων στρατηγικών.
- Οι στρατηγικές (A_1, Γ_2) και (Γ_1, A_2) είναι αμοιβαία βέλτιστες στρατηγικές.

Ισορροπία Nash – Παράδειγμα 3

Παράδειγμα 3:

Έστω το σύνολο των παικτών $N = \{1,2,3\}$. Το σύνολο των στρατηγικών του παίκτη 1 είναι $X_1 = \{A_1, B_1, \Gamma_1\}$, του παίκτη 2 είναι $X_2 = \{A_2, B_2, \Gamma_2\}$ και του παίκτη 3 είναι $X_3 = \{A_3, B_3\}$.

Οι αποδόσεις των δύο παικτών φαίνονται στους παρακάτω **πίνακες αποδόσεων**.

(Ο παίκτης 1, επιλέγει γραμμές, ο παίκτης 2, επιλέγει στήλες, ο παίκτης 3 επιλέγει πίνακα).

Ισορροπία Nash – Παράδειγμα 3

	A_2	B_2	Γ_2
A_1	2,0,0	0,1,0	1,2,1
B_1	0,0,2	-1,1,0	0,0,2
Γ_1	0,2,2	-1,3,1	-1,1,1

A_3

	A_2	B_2	Γ_2
A_1	2,3,1	0,4,1	0,3,2
B_1	3,1,1	2,2,1	0,0,1
Γ_1	3,1,0	1,2,0	1,1,0

B_3

Ισορροπία Nash – Παράδειγμα 3

- Η συνάρτηση $b_1(x_2, x_3)$ της βέλτιστης στρατηγική του παίκτη 1 δεδομένων των στρατηγικών x_2, x_3 των παικτών 2, 3, $x_2 \in \{A_2, B_2, \Gamma_2\}$, $x_3 \in \{A_3, B_3\}$ παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα.

x_2	x_3	$b_1(x_2, x_3)$
A_2	A_3	A_1
B_2	A_3	A_1
Γ_2	A_3	A_1
A_2	B_3	B_1, Γ_1
B_2	B_3	B_1
Γ_2	B_3	Γ_1

	A_2	B_2	Γ_2
A_1	2,0,0	0,1,0	1,2,1
B_1	0,0,2	-1,1,0	0,0,2
Γ_1	0,2,2	-1,3,1	-1,1,1

A_3

	A_2	B_2	Γ_2
A_1	2,3,1	0,4,1	0,3,2
B_1	3,1,1	2,2,1	0,0,1
Γ_1	3,1,0	1,2,0	1,1,0

B_3

Ισορροπία Nash – Παράδειγμα 3

- Η συνάρτηση $b_2(x_1, x_3)$ της βέλτιστης στρατηγική του παίκτη 2 δεδομένων των στρατηγικών x_1, x_3 των παικτών 1, 3, $x_1 \in \{A_1, B_1, \Gamma_1\}$, $x_3 \in \{A_3, B_3\}$ παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα.

x_1	x_3	$b_2(x_1, x_3)$
A_1	A_3	Γ_2
B_1	A_3	B_2
Γ_1	A_3	B_2
A_1	B_3	B_2
B_1	B_3	B_2
Γ_1	B_3	B_2

	A_2	B_2	Γ_2
A_1	2,0,0	0,1,0	1,2,1
B_1	0,0,2	-1,1,0	0,0,2
Γ_1	0,2,2	-1,3,1	-1,1,1

A_3

	A_2	B_2	Γ_2
A_1	2,3,1	0,4,1	0,3,2
B_1	3,1,1	2,2,1	0,0,1
Γ_1	3,1,0	1,2,0	1,1,0

B_3

Ισορροπία Nash – Παράδειγμα 3

x_2	x_3	$b_1(x_2, x_3)$
A_2	A_3	A_1
B_2	A_3	A_1
Γ_2	A_3	A_1
A_2	B_3	B_1, Γ_1
B_2	B_3	B_1
Γ_2	B_3	Γ_1

x_1	x_3	$b_2(x_1, x_3)$
A_1	A_3	Γ_2
B_1	A_3	B_2
Γ_1	A_3	B_2
A_1	B_3	B_2
B_1	B_3	B_2
Γ_1	B_3	B_2

■ Από τους δύο πίνακες βλέπουμε ότι

- $b_1(\Gamma_2, A_3) = A_1$ και $b_2(A_1, A_3) = \Gamma_2$
- $b_1(B_2, B_3) = B_1$ και $b_2(B_1, B_3) = B_2$

Ισορροπία Nash – Παράδειγμα 3

- Επομένως αρκεί να βρούμε τις τιμές της βέλτιστης συνάρτησης b_3 για τις πιθανές ισορροπίες Nash.
- Έχουμε: $b_3(A_1, \Gamma_2) = B_3 \neq A_3$
- Και $b_3(B_1, B_2) = B_3$

	A ₂	B ₂	Γ ₂
A ₁	2,0,0	0,1,0	1,2,1
B ₁	0,0,2	-1,1,0	0,0,2
Γ ₁	0,2,2	-1,3,1	-1,1,1

A₃

	A ₂	B ₂	Γ ₂
A ₁	2,3,1	0,4,1	0,3,2
B ₁	3,1,1	2,2,1	0,0,1
Γ ₁	3,1,0	1,2,0	1,1,0

B₃

Ισορροπία Nash – Παράδειγμα 3

- Δηλαδή, στο παίγνιο αυτό υπάρχει μία ισορροπία κατά Nash η στρατηγική (B_1, B_2, B_3) .

Βιβλιογραφία

- Γ. Σταματόπουλος, Θεωρία Παιγνίων, Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα. www.kallipos.gr
- - Αλιπράντης, Χ., Chakrabarti, S. (2004). Παίγνια και λήψη αποφάσεων. Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.
- Μαγείρου, Ε. (2012). Παίγνια και Αποφάσεις – Μια εισαγωγική προσέγγιση. Εκδόσεις Κριτική.
- Μηλολιδάκης, Κ. (2009). Θεωρία Παιγνίων – Μαθηματικά Μοντέλα Σύγκρουσης και Συνεργασίας. Εκδόσεις «Σοφία».