Ειδικά Θέματα Παιγνίων

ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: Γ. ΓΑΛΑΝΗΣ, Δ. ΚΟΥΛΟΥΜΠΟΥ

Ειδικά Θέματα στην Θεωρία Παιγνίων

- Θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια παίγνια τα οποία είναι χαρακτηριστική παίγνια της Θεωρίας Παιγνίων
- Τα παίγνια αυτά επικεντρώνονται σε θέματα των μη συνεργατικών παιγνίων πλήρους πληροφόρησης, της ισορροπίας Nash και της βέλτιστης κατά Pareto Στρατηγικής.

1. Δίλημμα Φυλακισμένου

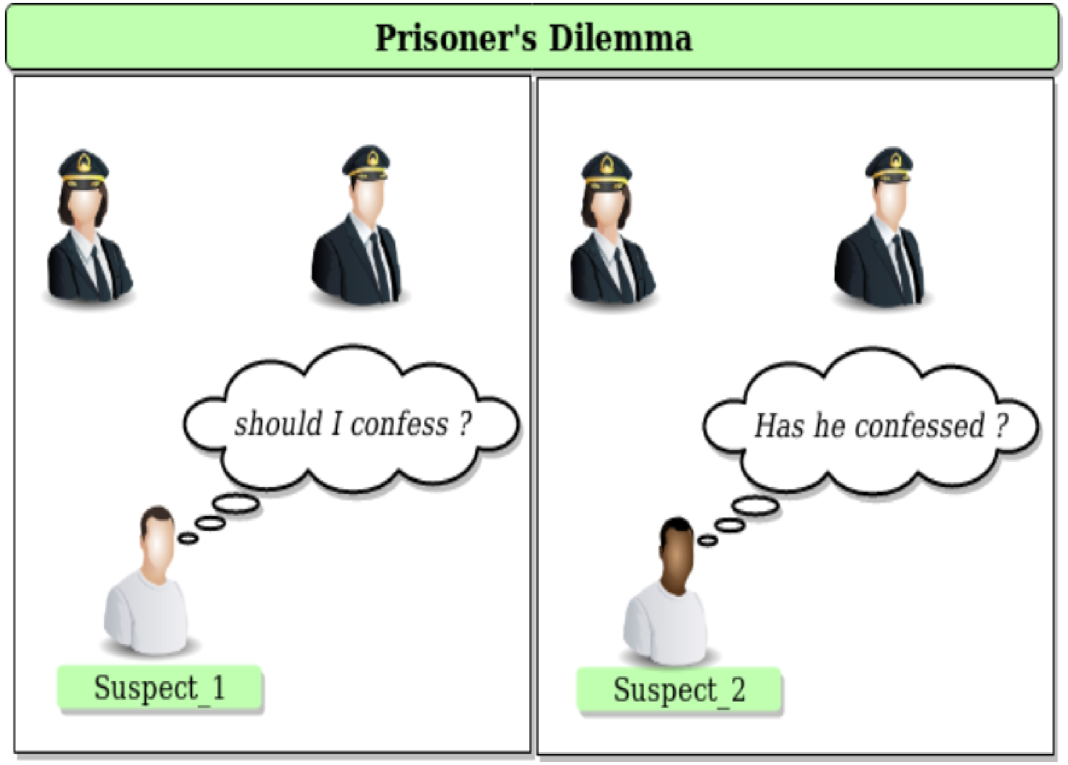
- Δύο άτομα συλλαμβάνονται ως ύποπτα για ένα παράπτωμα.
- Η αστυνομία δεν έχει επαρκή στοιχεία για να τα καταδικάσει, εκτός εάν τουλάχιστον ένα άτομο ομολογήσει.

1. Δίλημμα Φυλακισμένου

- Η αστυνομία κρατάει τους δύο ύποπτους σε χωριστά κελιά και τους ανακοινώνει τα εξής:
- Εάν και οι δύο καταθέσουν εναντίον του άλλου, τότε θα καταδικαστούν σε 6 χρόνια φυλάκισης ο κάθε ένας.
- Αν κανένας δεν ομολογήσει τότε θα καταδικαστούν από 1 χρόνο ο κάθε ένας.
- Τέλος αν μόνο ένας από τους δύο καταθέσει εναντίον του άλλου, τότε αυτός που ομολόγησε θα αφεθεί ελεύθερος και ο άλλος θα καταδικαστεί για 9 χρόνια φυλάκισης.

1. Δίλημμα Φυλακισμένου

- Οι στρατηγικές του κάθε ενός «παίκτη» είναι δύο: Να καταθέσει εναντίον του άλλου **(Κ)** ή να παραμείνει σιωπηλός **(Σ)**.
- Θεωρώντας ως ζημιά για τον κάθε παίχτη τα χρόνια της ποινής φυλάκισης, ο πίνακας αποδόσεων φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.



1. Δίλημμα Φυλακισμένου

	$\boldsymbol{\Sigma_2}$	$\boldsymbol{K_2}$
$\boldsymbol{\Sigma_1}$	$-1,-1$	$-9,0$
$\boldsymbol{K_1}$	$0,-9$	$-6,-6$

1. Δίλημμα Φυλακισμένου

- Το παίγνιο αυτό έχει μία ισορροπία Nash , την επιλογή στρατηγικής και οι δύο παίκτες να καταθέσουν ο ένας εναντίον του άλλου $(\mathbf{K_1}, \mathbf{K_2})$.
- Παρατηρείστε όμως ότι η στρατηγική $(\mathbf{\Sigma_1}, \mathbf{\Sigma_2})$ δίνει καλύτερες αποδόσεις και για τους δύο «παίκτες» από ότι η στρατηγική $(\mathbf{K_1}, \mathbf{K_2})$.

	$\mathbf{\Sigma_2}$	$\mathbf{K_2}$
$\mathbf{\Sigma_1}$	$-1, -1$	$-9,0$
$\mathbf{K_1}$	$0, -9$	$-6, -6$

1. Δίλημμα Φυλακισμένου

- Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι η $(\boldsymbol{\Sigma_1}, \boldsymbol{\Sigma_2})$ κυριαρχεί κατά Pareto από την στρατηγική $(\mathbf{K_1}, \mathbf{K_2})$.

- Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι αν οι «παίκτες» είχαν συνενννοηθεί ή συνεργαστεί η στρατηγική $(\boldsymbol{\Sigma_1}, \boldsymbol{\Sigma_2})$θα ήταν αυτή που θα τους ωφελούσε.

	$\boldsymbol{\Sigma_2}$	$\mathbf{K_2}$
$\boldsymbol{\Sigma_1}$	$-1,-1$	$-9{,}0$
$\mathbf{K_1}$	$0,-9$	$-6,-6$

1. Δίλημμα Φυλακισμένου

- Το ζεύγος όμως $(\mathbf{\Sigma_1}, \mathbf{\Sigma_2})$ δεν είναι ισορροπία Nash. (Αν ένας παίκτης σιωπήσει, η βέλτιστη αντίδραση του άλλου είναι να ομολογήσει).

	$\mathbf{\Sigma_2}$	$\mathbf{K_2}$
$\mathbf{\Sigma_1}$	$-1, -1$	$-9,0$
$\mathbf{K_1}$	$0, -9$	$-6, -6$

1. Δίλημμα Φυλακισμένου

- Τέτοιου είδους παίγνια των οποίων οι ισορροπίες Nash είναι μη αποτελεσματικές κατά Pareto συναντιόνται πολύ συχνά στην οικονομική ανάλυση, στην θεωρία του ολιγοπωλίου, σε παίγνια παροχής δημόσιων αγαθών κλπ.

Κυρίαρχη Στρατηγική Κατά Pareto

<u>Ορισμός</u>

Μια στρατηγική $s^{(1)}$ λέμε ότι **κυριαρχεί κατά Pareto** της $s^{(2)}$ αν και μόνο αν για κάθε παίκτη i

$$u_i\left(s^{(1)}\right) \geq u_i\left(s^{(2)}\right)$$

Δηλαδή για κάθε παίκτη η απόδοση που δίνει η στρατηγική $s^{(1)}$ είναι μεγαλύτερη ή ίση της απόδοσης που δίνει η στρατηγική $s^{(2)}$.

Βέλτιστη Στρατηγική Κατά Pareto

<u>Ορισμός</u>

Μια στρατηγική $s^{(*)}$ λέμε ότι είναι **Pareto βέλτιστη** αν και μόνο αν δεν υπάρχει στρατηγική s η οποία κυριαρχεί της $s^{(*)}$ κατά **Pareto.**

- **Δηλαδή ένα σημείο είναι Pareto βέλτιστο αν και μόνο αν κανείς παίκτης δεν μπορεί να βελτιώσει το κέρδος του χωρίς να ελαττώσει το κέρδος κάποιου άλλου παίκτη.**

Βέλτιστη Στρατηγική Κατά Pareto

- Στο προηγούμενο παράδειγμα, στο δίλημμα του φυλακισμένου η στρατηγική $(\mathbf{\Sigma_1}, \mathbf{\Sigma_2})$ κυριαρχεί κατά Pareto από την στρατηγική $(\mathbf{K_1}, \mathbf{K_2})$ αφού

$$u_1(\mathbf{\Sigma_1}, \mathbf{\Sigma_2}) = \mathbf{-1} > u_1(\mathbf{K_1}, \mathbf{K_2}) = \mathbf{-6}$$

$$u_2(\mathbf{\Sigma_1}, \mathbf{\Sigma_2}) = \mathbf{-1} > u_2(\mathbf{K_1}, \mathbf{K_2}) = \mathbf{-6}$$

	$\mathbf{\Sigma_2}$	$\mathbf{K_2}$
$\mathbf{\Sigma_1}$	$-1, -1$	$-9, 0$
$\mathbf{K_1}$	$0, -9$	$-6, -6$

Βέλτιστη Στρατηγική Κατά Pareto

- Επιπλέον η στρατηγική $(\boldsymbol{\Sigma_1}, \boldsymbol{\Sigma_2})$ είναι βέλτιστη κατά Pareto αφού δεν υπάρχει στρατηγική s η οποία κυριαρχεί της$(\boldsymbol{\Sigma_1}, \boldsymbol{\Sigma_2})$κατά **Pareto.**
- Άλλες στρατηγικές που είναι βέλτιστες κατά Pareto είναι οι στρατηγικές (Σ_1, K_2) και (K_1, Σ_2)

	$\boldsymbol{\Sigma_2}$	$\mathbf{K_2}$
$\boldsymbol{\Sigma_1}$	$-1, -1$	$-9,0$
$\mathbf{K_1}$	$0, -9$	$-6, -6$

Nash Equilibrium – Pareto Optimality

<u>Παρατηρήσεις</u>

- Ισορροπία Nash στο δίλημμα του φυλακισμένου αποτελεί η στρατηγική (K_1, K_2) η οποία δεν είναι βέλτιστη κατά Pareto στρατηγική
- Όλες οι άλλες στρατηγικές είναι βέλτιστες κατά Pareto , δεν είναι όμως σημεία Ισορροπίας Nash.
- Συνεπώς **μια βέλτιστη κατά Pareto στρατηγική δεν αποτελεί κατά ανάγκη και ισορροπία Nash και αντίστροφα**.

	$\boldsymbol{\Sigma_2}$	$\mathbf{K_2}$
$\boldsymbol{\Sigma_1}$	$-1, -1$	$-9,0$
$\mathbf{K_1}$	$0, -9$	$-6, -6$

2. Κυνήγι

- Δύο κυνηγοί, ο κυνηγός 1 και ο κυνηγός 2 έχουν την επιλογή είτε να κυνηγήσουν από κοινού ένα ελάφι είτε να κυνηγήσει ο καθένας μόνο του ένα πιο μικρό θήραμα όπως είναι ο λαγός.
- Η πρώτη επιλογή απαιτεί την συνεργασία των δύο κυνηγών, ενώ για την δεύτερη επιλογή δεν χρειάζεται συνεργασία.

2. Κυνήγι

- Η αξία του ελαφιού είναι σαφώς μεγαλύτερη από την αξία του λαγού.
- Παρακάτω βλέπουμε τον πίνακα αποδόσεων για το παραπάνω παίγνιο.

2. Κυνήγι

	$\mathbf{E_2}$	$\mathbf{\Lambda_2}$
$\mathbf{E_1}$	$\mathbf{7,7}$	$\mathbf{0,3}$
$\mathbf{\Lambda_1}$	$\mathbf{3,0}$	$\mathbf{3,3}$

2. Κυνήγι

- Το παίγνιο αυτό δεν έχει κυρίαρχες στρατηγικές.
- Το παίγνιο έχει βέλτιστη κατά Pareto στρατηγική την $(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2)$.
- Στο παίγνιο υπάρχουν δύο σημεία ισορροπίας Nash. Οι στρατηγικές $(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2)$ και (Λ_1, Λ_2)

	$\mathbf{E_2}$	$\mathbf{\Lambda_2}$
$\mathbf{E_1}$	$\mathbf{7,7}$	$\mathbf{0,3}$
$\mathbf{\Lambda_1}$	$\mathbf{3,0}$	$\mathbf{3,3}$

2. Κυνήγι

- Το κυνήγι αποτελεί μία περίπτωση παιγνίου καθαρού συντονισμού. Οι παίκτες προτιμούν να διαλέξουν όμοιες και όχι διαφορετικές στρατηγικές.
- Η στρατηγική $(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2)$ επιπλέον κυριαρχεί και κατά Pareto επί της (Λ_1, Λ_2).

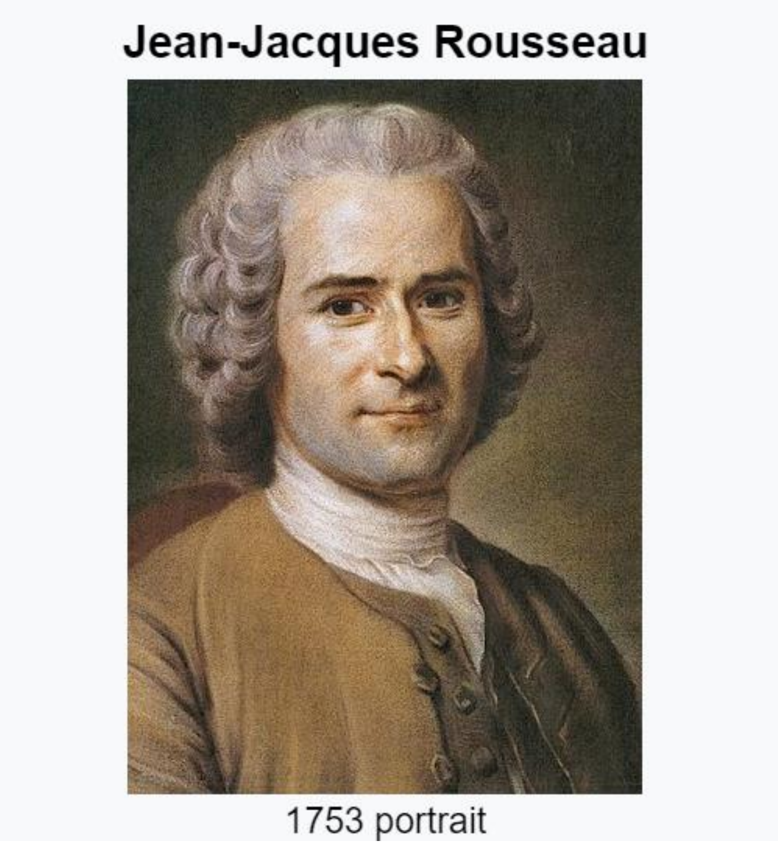
2. Κυνήγι

- Παρόλα αυτά η στρατηγική (Λ_1, Λ_2) εμπεριέχει χαμηλότερο ρίσκο. Μία ενδεχόμενη αποτυχία συντονισμού αφήνει την απόδοση του ενός από τους δύο παίκτες ανεπηρέαστη, σε αντίθεση με την στρατηγική $(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2)$ όπου σε πιθανή αποτυχία συντονισμού χάνουν και οι δύο παίκτες.

	$\mathbf{E_2}$	$\mathbf{\Lambda_2}$
$\mathbf{E_1}$	$\mathbf{7,7}$	$\mathbf{0,3}$
$\mathbf{\Lambda_1}$	$\mathbf{3,0}$	$\mathbf{3,3}$

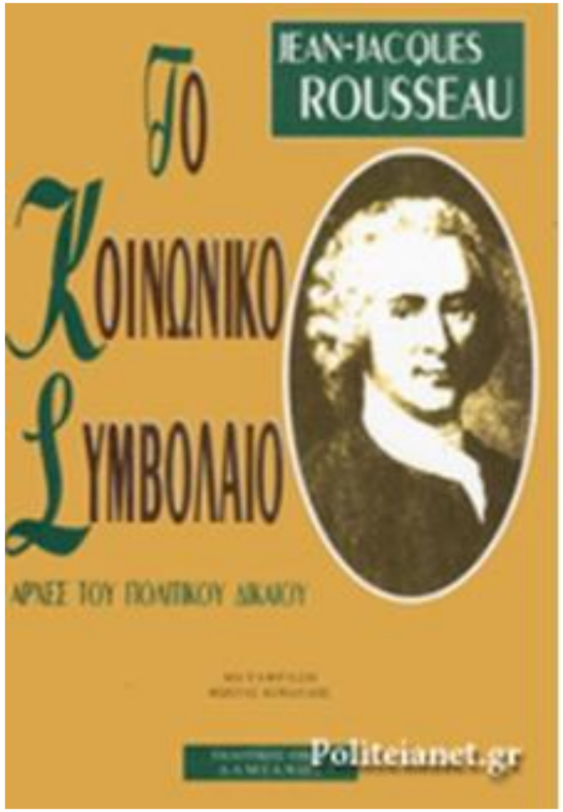
2. Κυνήγι

- Το παίγνιο των κυνηγών παρουσιάστηκε πρώτη φορά από τον φιλόσοφο Jean-Jacques-Rousseau (1712 – 1778) στο βιβλίο του «Το Κοινωνικό Συμβόλαιο» το 1762 χωρίς ο ίδιος να κάνει χρήση της θεωρίας παιγνίων.



2. Κυνήγι

- Το παίγνιο του κυνηγού αποτελεί ένα τυπικό παράδειγμα επιλογής μιας στρατηγικής χαμηλού ρίσκου (κυνήγι λαγού) και μιας πιο προσοδοφόρου στρατηγικής (κυνήγι ελαφιού),η οποία όμως απαιτεί την συνεργασία των παικτών.



3. Η Μάχη των δύο Φύλων

- Δύο άτομα ο Άρης (A) και η Βαλέρια (B) κανονίζουν την βραδινή τους έξοδο.
- Μπορούν να επιλέξουν μεταξύ μιας χορευτικής παράστασης Tango (T) και ενός αγώνα μπάσκετ (M).

3. Η Μάχη των δύο Φύλων

- Η Βαλέρια προτιμάει την χορευτική παράσταση και ο Άρης τον αγώνα μπάσκετ.
- Και οι δύο όμως προτιμούν να επιλέξουν από κοινού μία δραστηριότητα.

3. Η Μάχη των δύο Φύλων

- Προκειμένου να αποφασίσουν πώς θα περάσουν τελικά το βράδυ, οι δύο παίκτες θα καταγράψουν σε ένα χαρτί την επιλογή τους κρυφά ο ένας από τον άλλο.

3. Η Μάχη των δύο Φύλων

- Παρακάτω φαίνεται ο πίνακας αποδόσεων του παίγνιου

		Βαλέρια	
		Τ	Μ
Άρης	Τ	1, 2	0, 0
	Μ	0, 0	2, 1

3. Η Μάχη των δύο Φύλων

- Το παίγνιο αυτό δεν έχει κυρίαρχες στρατηγικές.
- Το παίγνιο έχει βέλτιστες κατά Pareto στρατηγικές τις $(\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2)$ και $(\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2)$.
- Στο παίγνιο υπάρχουν δύο σημεία ισορροπίας Nash. Είτε επιλέγουν και οι δύο παίκτες την παράσταση Tango, είτε τον αγώνα μπάσκετ.

		Βαλέρια	
		T	M
Άρης	T	1, 2	0, 0
	M	0, 0	2, 1

3. Η Μάχη των δύο Φύλων

- Δηλαδή οι βέλτιστες κατά Pareto στρατηγικές αποτελούν και σημεία ισορροπίας Nash.

		Βαλέρια	
		T	M
Άρης	T	1, 2	0, 0
	M	0, 0	2, 1

3. Η Μάχη των δύο Φύλων

- Το παίγνιο αυτό είναι ένα παράδειγμα παίγνιου συντονισμού, δηλαδή ενός παίγνιου στο οποίο οι παίκτες προτιμούν να επιλέξουν, να συντονιστούν σε όμοιες στρατηγικές.
- Παρόλα αυτά στο παίγνιο υπάρχουν δύο σημεία ισορροπίας. Είτε επιλέγουν και οι δύο παίκτες την παράσταση Tango, είτε τον αγώνα μπάσκετ.

		Βαλέρια	
		T	M
Άρης	T	1, 2	0, 0
	M	0, 0	2, 1

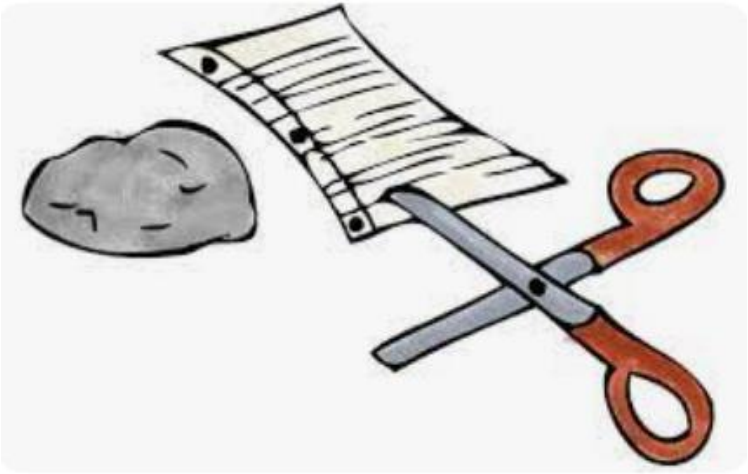
3. Η Μάχη των δύο Φύλων

- Το δυνητικό πρόβλημα είναι ότι οι παίκτες ενδέχεται να αποτύχουν στον μεταξύ τους συντονισμό, επιλέγοντας ανόμοιες στρατηγικές, το οποίο θα είναι και επιλογή με την μικρότερη απόδοση και για τους δύο.

		Βαλέρια	
		T	M
Άρης	T	1, 2	0, 0
	M	0, 0	2, 1

$\mathbf{4}$. Πέτρα – Ψαλίδι – Χαρτί

- Οι παίκτες A, B παίζουν το γνωστό παιγνίδι πέτρα (Π) – ψαλίδι (Ψ) – χαρτί (X). (Η πέτρα νικάει το ψαλίδι, το ψαλίδι νικάει το χαρτί, το χαρτί νικάει την πέτρα. Οι δύο παίκτες ανακοινώνουν ταυτόχρονα την επιλογή τους).



4. Πέτρα – Ψαλίδι – Χαρτί

- Οι αμοιβές των παικτών είναι: 1 σε περίπτωση νίκης, -1 σε περίπτωση ήττας και 0 σε περίπτωση ισοπαλίας.

4. Πέτρα – Ψαλίδι – Χαρτί

- Παρακάτω φαίνεται ο πίνακας αποδόσεων του παίγνιου.

	Π	**Ψ**	**Χ**
Π	$\mathbf{0,0}$	$\mathbf{1,-1}$	$\mathbf{-1,1}$
Ψ	$\mathbf{-1,1}$	$\mathbf{0,0}$	$\mathbf{1,-1}$
Χ	$\mathbf{1,-1}$	$\mathbf{-1,1}$	$\mathbf{0,0}$

$\mathbf{4}$. Πέτρα – Ψαλίδι – Χαρτί

- Το παίγνιο αυτό είναι παίγνιο μηδενικού αθροίσματος.
- Στο παίγνιο αυτό ισχύει

$$maximin \neq minimax$$

- Το παίγνιο αυτό δεν έχει αυστηρά κυρίαρχες στρατηγικές.

	Π	**Ψ**	**Χ**
Π	$0,0$	$1,-1$	$-1,1$
Ψ	$-1,1$	$0,0$	$1,-1$
Χ	$1,-1$	$-1,1$	$0,0$

4. Πέτρα – Ψαλίδι – Χαρτί

- Μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε ότι το παίγνιο αυτό δεν έχει ισορροπία. Για κάθε ζεύγος στρατηγικών υπάρχει κίνητρο σε τουλάχιστον ένα παίκτη να αλλάξει την επιλογή του.
- Το παίγνιο αυτό είναι παράδειγμα παίγνιου χωρίς ισορροπία Nash.
- Επιπλέον στο παίγνιο όλες οι στρατηγικές

είναι βέλτιστες κατά Pareto στρατηγικές.

	Π	**Ψ**	**Χ**
Π	$0,0$	$1,-1$	$-1,1$
Ψ	$-1,1$	$0,0$	$1,-1$
Χ	$1,-1$	$-1,1$	$0,0$

Προτεινόμενα Διδακτικά Βίντεο

- https://youtu.be/17o8CIeXV2Y?si=_g3pHun_-Y1kjGcG

- https://youtu.be/yb6SuLhQAy8?si=3T3uMZwE4e9WDlBQ

Βιβλιογραφία

- Γ. Σταματόπουλος, Θεωρία Παιγνίων, Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα. www.kallipos.gr
- \- Αλιπράντης, Χ., Chakrabarti, S. (2004). Παίγνια και λήψη αποφάσεων. Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.
- Μαγείρου, Ε. (2012). Παίγνια και Αποφάσεις – Μια εισαγωγική προσέγγιση. Εκδόσεις Κριτική.
- Μηλολιδάκης, Κ. (2009). Θεωρία Παιγνίων – Μαθηματικά Μοντέλα Σύγκρουσης και Συνεργασίας. Εκδόσεις «Σοφία».

Εικονογραφία

- Από το διαδίκτυο