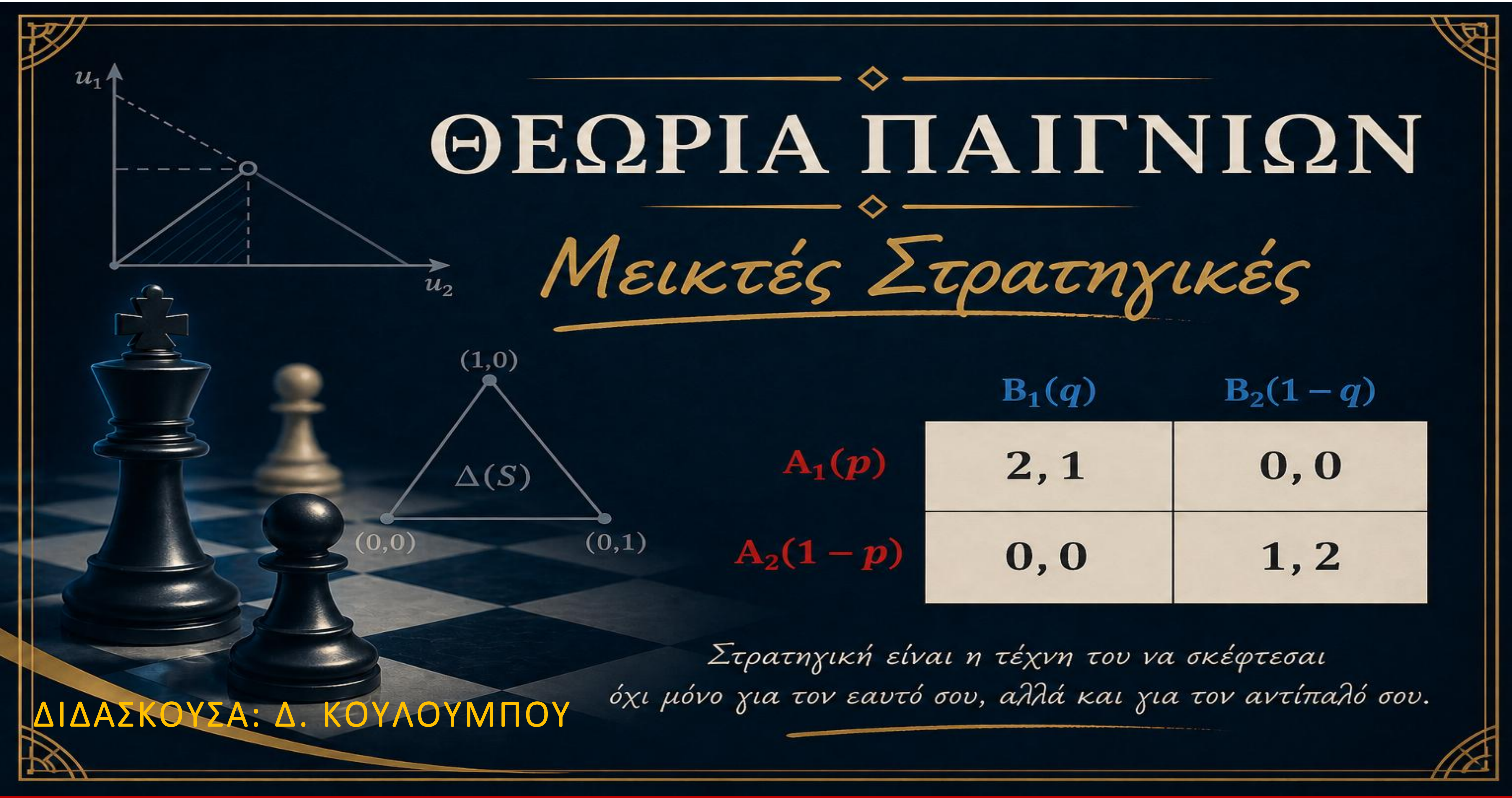


ΔΙΔΑΣΚΟΥΣΑ: Δ. ΚΟΥΛΟΥΜΠΟΥ

Μεικτές Στρατηγικές

- Στα παραδείγματα που έχουμε αναφερθεί έως τώρα οι παίκτες αποφασίζουν στρατηγική με τρόπο ντετερμινιστικό.
- Θα επεκτείνουμε στην ενότητα αυτή την έννοια της στρατηγικής επιτρέποντας στους παίκτες να επιλέγουν στρατηγικές με στοχαστικό τρόπο.

Μεικτές Στρατηγικές

- Σε τέτοιες περιπτώσεις μια στρατηγική ενός παίκτη είναι μια κατανομή πιθανότητας με δειγματικό χώρο το σύνολο των δυνατών στρατηγικών του.
- Αυτού του είδους οι στρατηγικές ονομάζονται **μεικτές στρατηγικές.**

Μεικτές Στρατηγικές

- Έστω για παράδειγμα ο παίκτης 1 διαθέτει το σύνολο καθαρών στρατηγικών $X_1 = \{A_1, B_1\}$
- Αν ο παίκτης διαλέγει την στρατηγική A_1 με πιθανότητα p και τη στρατηγική B_1 με πιθανότητα $1-p$, τότε λέμε ότι **το διάνυσμα $(\boldsymbol{p}, \mathbf{1}-\boldsymbol{p})$ είναι η μεικτή στρατηγική** του παίκτη 1 **για τις στρατηγικές του $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{B}_1$ αντίστοιχα**.

Μεικτές Στρατηγικές

- Αν για παράδειγμα $p = \frac{1}{3}$ τότε η μικτή στρατηγική του παίκτη 1 είναι το διάνυσμα $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Παράδειγμα 1

- Δύο παίκτες οι 1,2 ανακοινώνουν ταυτόχρονα μία από τις δύο λέξεις. **«Κόκκινο»** ή **«Μαύρο».**
- Αν οι ανακοινώσεις είναι ίδιες ο παίκτης 1 πληρώνει 1€ στον παίκτη 2.
- Αν οι ανακοινώσεις είναι διαφορετικές ο παίκτης 2 πληρώνει 1€ στον παίκτη 1.

Παράδειγμα 1

- Θεωρούμε τις εξής μεικτές στρατηγικές:

➢ **Παίκτης 1**: $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

Δηλαδή ο παίκτης 1 επιλέγει **«Κόκκινο»** με πιθανότητα $\frac{3}{4}$ και **«Μαύρο»** με πιθανότητα $\frac{1}{4}$.

Παράδειγμα $\mathbf{1}$

- **Παίκτης 2:** $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Δηλαδή ο παίκτης 2 επιλέγει **«Κόκκινο»** με πιθανότητα $\frac{1}{3}$ και **«Μαύρο»** με πιθανότητα $\frac{2}{3}$.

Παράδειγμα 1

Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε σε πίνακα την αναπαράσταση του παίγνιου με μεικτές στρατηγικές.

Παράδειγμα 1

Παίκτης 2

Παίκτης 1		«Κόκκινο» $\left(\frac{1}{3}\right)$	«Μαύρο» $\left(\frac{2}{3}\right)$
	«Κόκκινο» $\left(\frac{3}{4}\right)$	$-1, 1$	$1, -1$
	Μαύρο $\left(\frac{1}{4}\right)$	$1, -1$	$-1, 1$

Παράδειγμα 1

- Η πιθανότητα να επιλέξουν και οι δύο παίκτες «Κόκκινο» είναι:

$$P(\textcolor{red}{Κόκκινο}, \textcolor{red}{Κόκκινο}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}.$$

- Η πιθανότητα να επιλέξει ο πρώτος παίκτης «Κόκκινο» και ο δεύτερος «Μαύρο» είναι:

$$P(\textcolor{red}{Κόκκινο}, \text{Μάυρο}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}.$$

		Παίκτης 2	
		«Κόκκινο» $\left(\frac{1}{3}\right)$	«Μαύρο» $\left(\frac{2}{3}\right)$
Παίκτης 1	«Κόκκινο» $\left(\frac{3}{4}\right)$	$-1, 1$	$1, -1$
	Μαύρο $\left(\frac{1}{4}\right)$	$1, -1$	$-1, 1$

Παράδειγμα 1

- Η πιθανότητα να επιλέξει ο πρώτος παίκτης «Μαύρο» και ο δεύτερος «Κόκκινο» είναι:

$$P(\text{Μάυρο}, \textit{Κόκκινο}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}.$$

- Η πιθανότητα να επιλέξουν και οι δύο παίκτες «Μαύρο» είναι:

$$P(\text{Μάυρο}, \text{Μάυρο}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}.$$

		Παίκτης 2	
		«Κόκκινο» $\left(\frac{1}{3}\right)$	«Μαύρο» $\left(\frac{2}{3}\right)$
Παίκτης 1	«Κόκκινο» $\left(\frac{3}{4}\right)$	$-1, 1$	$1, -1$
	Μαύρο $\left(\frac{1}{4}\right)$	$1, -1$	$-1, 1$

Παράδειγμα 1

- Η αναμενόμενη απόδοση του παίκτη 1, V_1 με βάση τις παραπάνω μεικτές στρατηγικές είναι:

$$V_1 = \frac{1}{4}\cdot(-1) + \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{12}\cdot 1 + \frac{1}{6}\cdot(-1) = \frac{1}{6}.$$

		Παίκτης 2	
		«Κόκκινο» $\left(\frac{1}{3}\right)$	«Μαύρο» $\left(\frac{2}{3}\right)$
Παίκτης 1	«Κόκκινο» $\left(\frac{3}{4}\right)$	$-1, 1$	$1, -1$
	Μαύρο $\left(\frac{1}{4}\right)$	$1, -1$	$-1, 1$

Παράδειγμα 1

- Η αναμενόμενη απόδοση του παίκτη 2, V_2 με βάση τις παραπάνω μεικτές στρατηγικές είναι:

$$V_2 = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{12} \cdot (-1) + \frac{1}{6} \cdot 1 = -\frac{1}{6}.$$

		Παίκτης 2	
		«Κόκκινο» $\left(\frac{1}{3}\right)$	«Μαύρο» $\left(\frac{2}{3}\right)$
Παίκτης 1	«Κόκκινο» $\left(\frac{3}{4}\right)$	$-1, 1$	$1, -1$
	Μαύρο $\left(\frac{1}{4}\right)$	$1, -1$	$-1, 1$

Μεικτές Στρατηγικές – Ισορροπία Nash

- Μεικτές στρατηγικές χρησιμοποιούμε σε παίγνια σταθερού αθροίσματος στα οποία δεν υπάρχουν ισορροπίες Nash με αμιγείς στρατηγικές.

Μεικτές Στρατηγικές – Ισορροπία Nash

- Μεικτές στρατηγικές χρησιμοποιούμε επίσης όταν θέλουμε να βρούμε εκτός από τις ισορροπίες που προκύπτουν με καθαρές στρατηγικές και τις ισορροπίες που προκύπτουν με μεικτές στρατηγικές.

Παράδειγμα 2 (**Εύρεση Ισορροπίας Nash με Αμιγείς και Καθαρές Στρατηγικές)**

- Έστω το σύνολο των δύο παικτών $N = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$.
- Το σύνολο των στρατηγικών του παίκτη A είναι

$X_{\mathrm{A}} = \{A_1, A_2\}$ και του παίκτη B είναι $X_{\mathrm{B}} = \{\mathrm{B}_1, B_2\}$.

- Οι αποδόσεις των δύο παικτών φαίνονται στον παρακάτω **πίνακα αποδόσεων.**

Παράδειγμα 2

	$\mathbf{B_1}$	$\mathbf{B_2}$
$\mathbf{A_1}$	$\mathbf{2, 1}$	$\mathbf{0, 0}$
$\mathbf{A_2}$	$\mathbf{0, 0}$	$\mathbf{1, 2}$

Παράδειγμα 2

- Υποθέτουμε ότι ο παίκτης Α επιλέγει την στρατηγική A_1 με πιθανότητα p και την στρατηγική A_2 με πιθανότητα $1-p$.
- Υποθέτουμε επίσης ότι ο παίκτης Β επιλέγει την στρατηγική B_1 με πιθανότητα q και την στρατηγική B_2 με πιθανότητα $1-q$.

Παράδειγμα 2

	$\mathbf{B_1}(\boldsymbol{q})$	$\mathbf{B_2}(\mathbf{1}-\boldsymbol{q})$
$\mathbf{A_1}(\boldsymbol{p})$	$\mathbf{2,1}$	$\mathbf{0,0}$
$\mathbf{A_2}(\mathbf{1}-\boldsymbol{p})$	$\mathbf{0,0}$	$\mathbf{1,2}$

Παράδειγμα 2

- Σκοπός μας είναι στο παραπάνω παίγνιο να βρούμε όλες τις ισορροπίες (καθαρές και μεικτές).

Παράδειγμα 2

<u>Βήμα 1:</u>

Θα βρούμε τις βέλτιστες επιλογές για τον παίκτη 1.

Δεδομένου ότι ο παίκτης Β επιλέγει την στρατηγική B_1 με πιθανότητα q και την στρατηγική B_2 με πιθανότητα $1-q$, έχουμε:

	$\mathbf{B_1(q)}$	$\mathbf{B_2(1-q)}$
$\mathbf{A_1(p)}$	$\mathbf{2, 1}$	$\mathbf{0, 0}$
$\mathbf{A_2(1-p)}$	$\mathbf{0, 0}$	$\mathbf{1, 2}$

Παράδειγμα 2

- Η αναμενόμενη απόδοσή του παίκτη Α αν επιλέξει την στρατηγική A_1 είναι:

$$V_A(A_1, q) = 2q + 0(1-q) = 2q$$

- Η αναμενόμενη απόδοσή του παίκτη Α αν επιλέξει την στρατηγική A_2 είναι:

$$V_A(A_2, q) = 0q + 1(1-q) = 1-q.$$

Παράδειγμα 2

- Έχουμε ότι:

$$\boldsymbol{V_A(A_1, q) < V_A(A_2, q) \Leftrightarrow q < \frac{1}{3}}$$

$$\boldsymbol{V_A(A_1, q) > V_A(A_2, q) \Leftrightarrow q > \frac{1}{3}}$$

$$\boldsymbol{V_A(A_1, q) = V_A(A_2, q) \Leftrightarrow q = \frac{1}{3}}$$

Παράδειγμα 2

Επομένως:

- Αν $q < \frac{1}{3}$ τότε η βέλτιστη επιλογή για τον παίκτη A είναι να διαλέξει την στρατηγική με A_2 με πιθανότητα $1 - p = 1$, δηλαδή έχουμε $p = 0$.
- Αν $q > \frac{1}{3}$ τότε η βέλτιστη επιλογή για τον παίκτη A είναι να διαλέξει την στρατηγική με A_1 με πιθανότητα $p = 1$.

Παράδειγμα 2

- Αν $q = \frac{1}{3}$ τότε επιλογή για τον παίκτη A είναι αδιάφορη, δηλαδή μπορεί να επιλέξει οποιαδήποτε τιμή $p \in [0,1]$.

Παράδειγμα 2

<u>Βήμα 2</u>:

Θα βρούμε τις βέλτιστες επιλογές για τον παίκτη 2.

Δεδομένου ότι ο παίκτης A επιλέγει την στρατηγική A_1 με πιθανότητα p και την στρατηγική A_2 με πιθανότητα

$1-p$, έχουμε:

	$\mathbf{B_1(q)}$	$\mathbf{B_2(1-q)}$
$\mathbf{A_1(p)}$	$\mathbf{2, 1}$	$\mathbf{0, 0}$
$\mathbf{A_2(1-p)}$	$\mathbf{0, 0}$	$\mathbf{1, 2}$

Παράδειγμα 2

- Η αναμενόμενη απόδοσή του παίκτη Β αν επιλέξει την στρατηγική B_1 είναι:

$$V_B(B_1, p) = 1p + 0(1-p) = p.$$

- Η αναμενόμενη απόδοσή του παίκτη Β αν επιλέξει την στρατηγική B_2 είναι:

$$V_B(B_2, p) = 0p + 2(1-p) = 2 - 2p.$$

	$\mathbf{B_1(q)}$	$\mathbf{B_2(1-q)}$
$\mathbf{A_1(p)}$	$\mathbf{2, 1}$	$\mathbf{0, 0}$
$\mathbf{A_2(1-p)}$	$\mathbf{0, 0}$	$\mathbf{1, 2}$

Παράδειγμα 2

- Έχουμε ότι:

$$\boldsymbol{V_B(B_1,p) < V_B(B_2,p) \Leftrightarrow p < \frac{2}{3}}$$

$$\boldsymbol{V_B(B_1,p) > V_B(B_2,p) \Leftrightarrow p > \frac{2}{3}}$$

$$\boldsymbol{V_B(B_1,p) = V_B(B_2,p) \Leftrightarrow p = \frac{2}{3}}$$

Παράδειγμα 2

Επομένως:

- Αν $p < \frac{2}{3}$ τότε η βέλτιστη επιλογή για τον παίκτη Β είναι να διαλέξει την στρατηγική με B_2 με πιθανότητα

$1 - q = 1$, δηλαδή έχουμε $q = 0$.

- Αν $p > \frac{2}{3}$ τότε η βέλτιστη επιλογή για τον παίκτη Β είναι να διαλέξει την στρατηγική με B_1 με πιθανότητα $q = 1$.

Παράδειγμα 2

- Αν $p = \frac{2}{3}$ τότε η επιλογή για τον παίκτη A είναι αδιάφορη, δηλαδή μπορεί να επιλέξει οποιαδήποτε τιμή $q \in [0,1]$.

Βήμα 3:

Στη συνέχεια βρούμε όλες τις ισορροπίες Nash Με καθαρές και μεικτές στρατηγικές).

Παράδειγμα 2

<u>Βέλτιστες Στρατηγικές Παίκτη 1:</u>

- **Αν** $q < \frac{1}{3}$ **τότε** $p = 0, (1_{A})$
- **Αν** $q > \frac{1}{3}$ **τότε** $p = 1, (2_{A})$
- **Αν** $q = \frac{1}{3}$ **τότε** $p \in [0, 1], (3_{A})$

<u>Βέλτιστες Στρατηγικές Παίκτη 2:</u>

- **Αν** $p < \frac{2}{3}$ **τότε** $q = 0, (1_{B})$
- **Αν** $p > \frac{2}{3}$ **τότε** $q = 1, (2_{B})$
- **Αν** $p = \frac{2}{3}$ **τότε** $q \in [0, 1], (3_{B})$

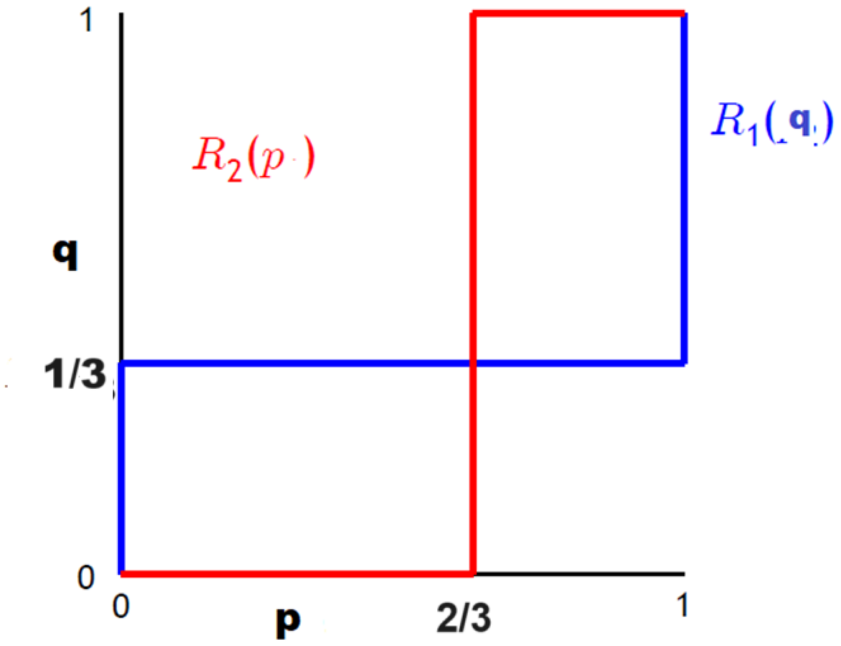
Παράδειγμα 2

Επομένως οι αμοιβαία βέλτιστες στρατηγικές οι οποίες αποτελούν και σημεία ισορροπίας Nash είναι οι εξής:

- $p = 0, q = 0$ καθαρή στρατηγική (A_2, B_2) με πιθανότητα 1. (Από (1_A) και (1_B))
- $p = 1, q = 1$καθαρή στρατηγική (A_1, B_1) με πιθανότητα 1. (Από (2_A) και (2_B))
- $p = \frac{2}{3},\ \ q = \frac{1}{3}$ Μεικτή στρατηγική (Από (3_A) και (3_B)).

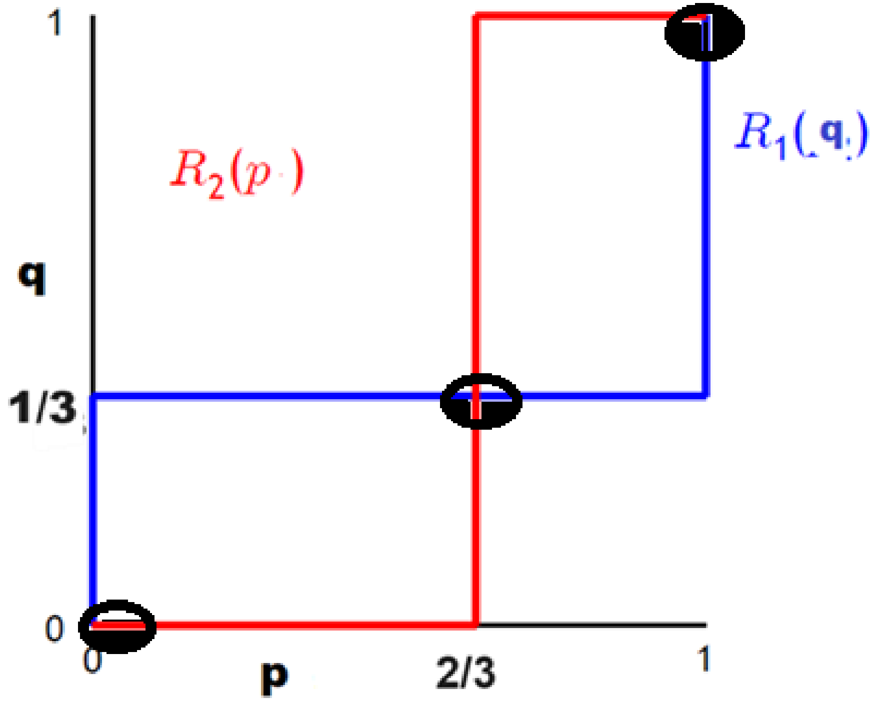
Παράδειγμα 2

Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε την γραφική επίλυση του παίγνιου.



Παράδειγμα 2

Τα σημεία τομής των γραμμών των βέλτιστων αντιδράσεων των δύο παικτών καταδεικνύουν τα σημεία ισορροπίας Nash με καθαρές ή μεικτές στρατηγικές.



Παράδειγμα 2

<u>Παρατήρηση:</u>

Στην περίπτωση της ισορροπίας με μεικτές στρατηγικές $(p, q) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ για τις αναμενόμενες αποδόσεις των δύο παικτών ισχύουν τα εξής:

	$\mathbf{B_1(q)}$	$\mathbf{B_2(1-q)}$
$\mathbf{A_1(p)}$	**2, 1**	**0, 0**
$\mathbf{A_2(1-p)}$	**0, 0**	**1, 2**

Μεικτές Στρατηγικές – Ισορροπία Nash

$$V_A = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$V_B = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

Δηλαδή:

$$\boldsymbol{V_A = V_B}$$

	$\mathbf{B_1}(\boldsymbol{q})$	$\mathbf{B_2}(\mathbf{1}-\boldsymbol{q})$
$\mathbf{A_1}(\boldsymbol{p})$	2,1	0,0
$\mathbf{A_2}(\mathbf{1}-\boldsymbol{p})$	0,0	1,2

Ισορροπία Nash – Θεώρημα Ύπαρξης

- Αποδεικνύεται το παρακάτω πολύ βασικό Θεώρημα ύπαρξης Ισορροπίας Nash της Θεωρίας Παιγνίων.

Ισορροπία Nash – Θεώρημα Ύπαρξης

<u>Θεώρημα Ύπαρξης Ισορροπίας Nash</u>

Κάθε παίγνιο με πεπερασμένο αριθμό παικτών στο οποίο το πλήθος των στρατηγικών για τον κάθε παίκτη είναι πεπερασμένο έχει τουλάχιστον μία ισορροπία Nash με καθαρές ή μεικτές στρατηγικές.

Ισορροπία Nash – Θεώρημα Ύπαρξης

<u>Παρατηρήσεις</u>

- Το Θεώρημα ύπαρξης ισορροπίας Nash δεν μας δίνει καμία πληροφορία για τον τρόπο με τον οποίο οι παίκτες μπορούν να καταλήξουν σε ισορροπία Nash ή έναν εύκολο τρόπο να φτάσουν σε αυτήν.
- Σε σύνθετα παίγνια η εύρεση σημείου ισορροπίας Nash μπορεί να είναι μια υπολογιστικά εξαιρετικά δύσκολη διαδικασία.

Ισορροπία Nash – Θεώρημα Ύπαρξης

Παρατηρήσεις

- Η ισορροπία Nash σε ένα παίγνιο λειτουργεί καλύτερα όταν είναι μοναδική, αφού σε αυτήν την περίπτωση υπάρχει μία και μοναδική επιλογή για τους λογικούς παίκτες του παιγνίου.

Μεικτές Στρατηγικές – Αρχή Αδιαφορίας

- Για την εύρεση Ισορροπίας Nash σε μεικτές στρατηγικές μπορούμε να ακολουθήσουμε και την ακόλουθη μέθοδο η οποία είναι γνωστή ως **«Αρχή Αδιαφορίας».**

Μεικτές Στρατηγικές – Αρχή Αδιαφορίας

Αρχή της Αδιαφορίας

Η στρατηγική ισορροπίας με μικτές στρατηγικές για τον κάθε παίκτη μπορεί να βρεθεί αν εξισώσουμε τις αναμενόμενες αποδόσεις του άλλου παίκτη από τις καθαρές στρατηγικές.

Άσκηση 1

Να βρείτε όλες τις ισορροπίες που υπάρχουν στο παίγνιο του πρώτου παραδείγματος. Να παραστήσετε γραφικά την λύση.

Παίκτης 2

Παίκτης 1

	«Κόκκινο» $(\boldsymbol{q})$	«Μαύρο» $(\mathbf{1}-\boldsymbol{q})$
«Κόκκινο» $(\boldsymbol{p})$	$-1, 1$	$1, -1$
Μαύρο $(\mathbf{1}-\boldsymbol{p})$	$1, -1$	$-1,1$

Άσκηση 1 – Λύση

Παρατηρούμε ότι το παίγνιο δεν έχει ισορροπία Nash με καθαρές στρατηγικές.
Για μεικτές στρατηγικές θα εφαρμόσουμε την Αρχή Αδιαφορίας.

Παίκτης 1	Παίκτης 2: «Κόκκινο» (q)	Παίκτης 2: «Μαύρο» $(1-q)$
«Κόκκινο» (p)	$-1, 1$	$1, -1$
Μαύρο $(1-p)$	$1, -1$	$-1, 1$

Άσκηση 1 – Λύση

- Η αναμενόμενη απόδοσή του παίκτη 1 αν επιλέξει την στρατηγική K_1 είναι:
$$V_1(K_1, q) = 1 - 2q.$$
- Η αναμενόμενη απόδοσή του παίκτη 1 αν επιλέξει την στρατηγική M_1 είναι:
$$V_1(M_1, q) = 2q - 1.$$

Παίκτης 2

Παίκτης 1

	«Κόκκινο» (q)	«Μαύρο» $(1-q)$
«Κόκκινο» (p)	$-1, 1$	$1, -1$
Μαύρο $(1-p)$	$1, -1$	$-1,1$

Άσκηση 1 – Λύση

Σύμφωνα με την αρχή της αδιαφορίας η στρατηγική ισορροπίας για τον παίκτη 1 προκύπτει από την λύση της εξίσωσης:

$$V_1(K_1, q) = V_1(M_1, q)$$

Δηλαδή

$$1 - 2q = 2q - 1$$

Ή

$$q = \frac{1}{2}$$

Άσκηση $\mathbf{1}$ – Λύση

- Η αναμενόμενη απόδοσή του παίκτη 2 αν επιλέξει την στρατηγική K_2 είναι:
$$V_2(K_2, p) = 2p - 1.$$
- Η αναμενόμενη απόδοσή του παίκτη 2 αν επιλέξει την στρατηγική M_2 είναι:
$$V_2(M_2, p) = 1 - 2p$$

Άσκηση 1 – Λύση

Σύμφωνα με την αρχή της αδιαφορίας η στρατηγική ισορροπίας για τον παίκτη 2 προκύπτει από την λύση της εξίσωσης:

$$V_2(K_2, p) = V_2(M_2, p)$$

Δηλαδή

$$1 - 2p = 2p - 1$$

Ή

$$p = \frac{1}{2}$$

Άσκηση 1 – Λύση

Επομένως οι αμοιβαία βέλτιστες στρατηγικές οι οποίες αποτελούν και σημεία ισορροπίας Nash είναι οι εξής:

- $p = \frac{1}{2}, \;\; q = \frac{1}{2}$ Μεικτή στρατηγική.

Άσκηση 2

Να βρείτε τυχόν ισορροπίες με καθαρές ή μεικτές στρατηγικές που υπάρχουν στο παρακάτω παίγνιο.

	$\mathbf{A_2}$	$\mathbf{B_2}$
$\mathbf{A_1}$	$\mathbf{2, 0}$	$\mathbf{1, 1}$
$\mathbf{B_1}$	$\mathbf{3, 4}$	$\mathbf{1, 2}$

Άσκηση 2 – **Λύση**

- Παρατηρούμε έχει ισορροπία Nash με καθαρές στρατηγικές, τις (A_1, B_2) και (B_1, A_2).
- Για μεικτές στρατηγικές θα εφαρμόσουμε την Αρχή Αδιαφορίας.

	$\mathbf{A_2}$	$\mathbf{B_2}$
$\mathbf{A_1}$	$\mathbf{2, 0}$	$\mathbf{1, 1}$
$\mathbf{B_1}$	$\mathbf{3, 4}$	$\mathbf{1, 2}$

Άσκηση 2 – **Λύση**

- Έστω ο παίκτης 1 επιλέγει την στρατηγική A_1 με πιθανότητα p και ο παίκτης 2 την στρατηγική A_2 με πιθανότητα q, όπως φαίνεται στον διπλανό πίνακα αποδόσεων.

	$\mathbf{A_2(q)}$	$\mathbf{B_2(1-q)}$
$\mathbf{A_1(p)}$	**2, 0**	**1, 1**
$\mathbf{B_1(1-p)}$	**3, 4**	**1, 2**

Άσκηση 2 – Λύση

- Η αναμενόμενη απόδοσή του παίκτη 1 αν επιλέξει την στρατηγική A_1 είναι:
  $V_1(\mathrm{A}_1, q) = 2q + 1 - q = q + 1.$
- Η αναμενόμενη απόδοσή του παίκτη 1 αν επιλέξει την στρατηγική B_1 είναι:
  $V_1(B_1, q) = 3q + 1 - q = 2q + 1.$

	$\mathbf{A_2}(\boldsymbol{q})$	$\mathbf{B_2}(\mathbf{1}-\boldsymbol{q})$
$\mathbf{A_1}(\boldsymbol{p})$	$\mathbf{2},\mathbf{0}$	$\mathbf{1},\mathbf{1}$
$\mathbf{B_1}(\mathbf{1}-\boldsymbol{p})$	$\mathbf{3},\mathbf{4}$	$\mathbf{1},\mathbf{2}$

Άσκηση 2 – Λύση

Σύμφωνα με την αρχή της αδιαφορίας η στρατηγική ισορροπίας για τον παίκτη 1 προκύπτει από την λύση της εξίσωσης:

$$V_1(A_1, q) = V_1(B_1, q)$$

Δηλαδή

$$q + 1 = 2q + 1$$

Ή

$$q = 0$$

	$\mathbf{A_2}(\boldsymbol{q})$	$\mathbf{B_2}(\mathbf{1}-\boldsymbol{q})$
$\mathbf{A_1}(\boldsymbol{p})$	**2, 0**	**1, 1**
$\mathbf{B_1}(\mathbf{1}-\boldsymbol{p})$	**3, 4**	**1, 2**

Άσκηση 2 – Λύση

- Η αναμενόμενη απόδοσή του παίκτη 2 αν επιλέξει την στρατηγική A_2 είναι:
  $V_2(A_2, p) = 4(1-p) = 4 - 4p$
- Η αναμενόμενη απόδοσή του παίκτη 2 αν επιλέξει την στρατηγική B_2 είναι:
  $V_2(B_2, p) = p + 2(1-p) = 2 - \mathrm{p}$

	$\mathbf{A_2(q)}$	$\mathbf{B_2(1-q)}$
$\mathbf{A_1(p)}$	$\mathbf{2, 0}$	$\mathbf{1, 1}$
$\mathbf{B_1(1-p)}$	$\mathbf{3, 4}$	$\mathbf{1, 2}$

Άσκηση 2 – Λύση

Σύμφωνα με την αρχή της αδιαφορίας η στρατηγική ισορροπίας για τον παίκτη 2 προκύπτει από την λύση της εξίσωσης:

$$V_2(A_2, p) = V_2(B_2, p)$$

Δηλαδή

$$4 - 4p = 2 - \mathrm{p}$$

Ή

$$p = \frac{2}{3}$$

Άσκηση 2 – Λύση

Επομένως οι αμοιβαία βέλτιστες στρατηγικές οι οποίες αποτελούν και σημεία ισορροπίας Nash είναι οι εξής:

- $p = \frac{2}{3}, \quad q = 0$ Μεικτή στρατηγική.
- $p = 1, \quad q = 0$ Καθαρή στρατηγική.
- $p = 0, \quad q = 1$ Καθαρή στρατηγική.

	$\mathbf{A_2(q)}$	$\mathbf{B_2(1-q)}$
$\mathbf{A_1(p)}$	$\mathbf{2, 0}$	$\mathbf{1, 1}$
$\mathbf{B_1(1-p)}$	$\mathbf{3, 4}$	$\mathbf{1, 2}$

Άσκηση 3

Να βρείτε τυχόν ισορροπίες με καθαρές ή μεικτές στρατηγικές που υπάρχουν στο παρακάτω παίγνιο.

	$\mathbf{A_2}$	$\mathbf{B_2}$
$\mathbf{A_1}$	$\mathbf{1, -1}$	$\mathbf{0, 0}$
$\mathbf{B_1}$	$\mathbf{0, 0}$	$\mathbf{0, 6}$

Άσκηση 3 – **Λύση**

- Παρατηρούμε έχει ισορροπία Nash με καθαρές στρατηγικές, τις (A_1, B_2) και (B_1, B_2).
- Για μεικτές στρατηγικές θα εφαρμόσουμε την Αρχή Αδιαφορίας.

	$\mathbf{A_2}$	$\mathbf{B_2}$
$\mathbf{A_1}$	$\mathbf{1, -1}$	$\mathbf{0, 0}$
$\mathbf{B_1}$	$\mathbf{0, 0}$	$\mathbf{0, 6}$

Άσκηση 3 – **Λύση**

- Έστω ο παίκτης 1 επιλέγει την στρατηγική A_1 με πιθανότητα p και ο παίκτης 2 την στρατηγική A_2 με πιθανότητα q, όπως φαίνεται στον διπλανό πίνακα αποδόσεων.

	$\mathbf{A_2(q)}$	$\mathbf{B_2(1-q)}$
$\mathbf{A_1(p)}$	$\mathbf{1, -1}$	$\mathbf{0, 0}$
$\mathbf{B_1(1-p)}$	$\mathbf{0, 0}$	$\mathbf{0, 6}$

Άσκηση 3 – Λύση

- Η αναμενόμενη απόδοσή του παίκτη 1 αν επιλέξει την στρατηγική A_1 είναι:

$$V_1(\mathrm{A}_1, q) = q.$$

- Η αναμενόμενη απόδοσή του παίκτη 1 αν επιλέξει την στρατηγική B_1 είναι:

$$V_1(B_1, q) = 0.$$

	$\mathbf{A_2(q)}$	$\mathbf{B_2(1-q)}$
$\mathbf{A_1(p)}$	$\mathbf{1, -1}$	$\mathbf{0, 0}$
$\mathbf{B_1(1-p)}$	$\mathbf{0, 0}$	$\mathbf{0, 6}$

Άσκηση 3 – Λύση

Σύμφωνα με την αρχή της αδιαφορίας η στρατηγική ισορροπίας για τον παίκτη 1 προκύπτει από την λύση της εξίσωσης:

$$V_1(A_1, q) = V_1(B_1, q)$$

Δηλαδή

$$q = 0.$$

	$\mathbf{A_2(q)}$	$\mathbf{B_2(1-q)}$
$\mathbf{A_1(p)}$	$1, -1$	$0, 0$
$\mathbf{B_1(1-p)}$	$0, 0$	$0, 6$

Άσκηση 3 – Λύση

- Η αναμενόμενη απόδοσή του παίκτη 2 αν επιλέξει την στρατηγική A_2 είναι:

$$V_2(A_2, p) = -p$$

Η αναμενόμενη απόδοσή του παίκτη 2 αν επιλέξει την στρατηγική B_2 είναι:

$$V_2(B_2, p) = 6(1-p) = 6 - 6\text{p}$$

	$\mathbf{A_2(q)}$	$\mathbf{B_2(1-q)}$
$\mathbf{A_1(p)}$	$\mathbf{1, -1}$	$\mathbf{0, 0}$
$\mathbf{B_1(1-p)}$	$\mathbf{0, 0}$	$\mathbf{0, 6}$

Άσκηση 3 – Λύση

Σύμφωνα με την αρχή της αδιαφορίας η στρατηγική ισορροπίας για τον παίκτη 2 προκύπτει από την λύση της εξίσωσης:

$$V_2(A_2, p) = V_2(B_2, p)$$

Δηλαδή

$$-p = 6 - 6\mathrm{p}$$

Ή

$$p = \frac{6}{5} > 1$$

Που είναι αδύνατο!

Άρα δεν υπάρχουν μικτές στρατηγικές.

Άσκηση 3 – Λύση

Επομένως οι αμοιβαία βέλτιστες στρατηγικές οι οποίες αποτελούν και σημεία ισορροπίας Nash είναι οι εξής:

- $p = 1, \quad q = 0$ Καθαρή στρατηγική.
- $p = 0, \quad q = 0$ Καθαρή στρατηγική.

	$\mathbf{A_2}(q)$	$\mathbf{B_2}(1-q)$
$\mathbf{A_1}(p)$	$\mathbf{1, -1}$	$\mathbf{0, 0}$
$\mathbf{B_1}(1-p)$	$\mathbf{0, 0}$	$\mathbf{0, 6}$

Άσκηση 4

A. Να βρείτε τυχόν ισορροπίες με καθαρές ή μεικτές στρατηγικές που υπάρχουν στο παρακάτω παίγνιο.

	A_2	B_2
A_1	$4, 3$	$0, 0$
B_1	$0, 0$	$1, 2$

Άσκηση 4

B. Να αναπαραστήσετε γραφικά την λύση
C. Στα σημεία ισορροπίας Nash να βρείτε τις αναμενόμενες αποδόσεις του κάθε παίκτη.
D. Να βρείτε όλες τις βέλτιστες κατά Pareto στρατηγικές

	A_2	B_2
A_1	$4, 3$	$0, 0$
B_1	$0, 0$	$1, 2$

Βιβλιογραφία

Γ. Σταματόπουλος, Θεωρία Παιγνίων, Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα.

Αλιπράντης, Χ., Chakrabarti, S. (2004). Παίγνια και λήψη αποφάσεων. Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.

Μαγείρου, Ε. (2012). Παίγνια και Αποφάσεις – Μια εισαγωγική προσέγγιση. Εκδόσεις Κριτική.

Μηλολιδάκης, Κ. (2009). Θεωρία Παιγνίων – Μαθηματικά Μοντέλα Σύγκρουσης και Συνεργασίας. Εκδόσεις «Σοφία».