ΜΕΙΚΤΕΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ – Ισορροπία Nash

ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: Γ. ΓΑΛΑΝΗΣ, Δ. ΚΟΥΛΟΥΜΠΟΥ

Μεικτές Στρατηγικές

- Στα παραδείγματα που έχουμε αναφερθεί έως τώρα οι παίκτες αποφασίζουν στρατηγική με τρόπο ντετερμινιστικό.
- Θα επεκτείνουμε στην ενότητα αυτή την έννοια της στρατηγικής επιτρέποντας στους παίκτες να επιλέγουν στρατηγικές με στοχαστικό τρόπο.

Μεικτές Στρατηγικές

- Σε τέτοιες περιπτώσεις μια στρατηγική ενός παίκτη είναι μια κατανομή πιθανότητας με δειγματικό χώρο το σύνολο των δυνατών στρατηγικών του.
- Αυτού του είδους οι στρατηγικές ονομάζονται μεικτές στρατηγικές.

Μεικτές Στρατηγικές

- Έστω για παράδειγμα ο παίκτης 1 διαθέτει το σύνολο καθαρών στρατηγικών $X_1 = \{A_1, B_1\}$
- Αν ο παίκτης διαλέγει την στρατηγική A_1 με πιθανότητα p και τη στρατηγική B_1 με πιθανότητα $1-p$, τότε λέμε ότι το διάνυσμα $(p, 1-p)$ είναι η μεικτή στρατηγική του παίκτη 1 για τις στρατηγικές του A_1, B_1 αντίστοιχα.

Μεικτές Στρατηγικές

- Αν για παράδειγμα $p = \frac{1}{3}$ τότε η μικτή στρατηγική του παίκτη 1 είναι το διάνυσμα $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Μεικτές Στρατηγικές – Αποδόσεις Παικτών

Παράδειγμα 1

- Δύο παίκτες οι 1,2 ανακοινώνουν ταυτόχρονα μία από τις δύο λέξεις. **«Κόκκινο»** ή **«Μαύρο».**
- Αν οι ανακοινώσεις είναι ίδιες ο παίκτης 1 πληρώνει 1€ στον παίκτη 2.
- Αν οι ανακοινώσεις είναι διαφορετικές ο παίκτης 2 πληρώνει 1€ στον παίκτη 1.

Μεικτές Στρατηγικές – Αποδόσεις Παικτών

- Θεωρούμε τις εξής μεικτές στρατηγικές
- **Παίκτης 1**: $\left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\right)$.

Δηλαδή ο παίκτης 1 επιλέγει **«Κόκκινο»** με πιθανότητα $\frac{3}{4}$ και **«Μαύρο»** με πιθανότητα $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$.

Μεικτές Στρατηγικές – Αποδόσεις Παικτών

- Θεωρούμε τις εξής μεικτές στρατηγικές
- **Παίκτης** 2: $\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}, \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right)$.

Δηλαδή ο παίκτης 2 επιλέγει **«Κόκκινο»** με πιθανότητα $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$ και **«Μαύρο»** με πιθανότητα $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$.

Μεικτές Στρατηγικές – Αποδόσεις Παικτών

Παρακάτω βλέπουμε σε πίνακα την αναπαράσταση του παίγνιου με μεικτές στρατηγικές.

		Παίκτης 2	
		«Κόκκινο» $\left(\frac{1}{3}\right)$	«Μαύρο» $\left(\frac{2}{3}\right)$
Παίκτης 1	**«Κόκκινο»** $\left(\frac{3}{4}\right)$	$-1, 1$	$1, -1$
	Μαύρο $\left(\frac{1}{4}\right)$	$1, -1$	$-1,1$

Μεικτές Στρατηγικές – Αποδόσεις Παικτών

- Η πιθανότητα να επιλέξουν και οι δύο παίκτες «Κόκκινο» είναι:

$$P(\mathit{Κόκκινο}, \mathit{Κόκκινο}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}.$$

- Η πιθανότητα να επιλέξει ο πρώτος παίκτης «Κόκκινο» και ο δεύτερος «Μαύρο» είναι:

$$P(\mathit{Κόκκινο}, \text{Μάυρο}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}.$$

Μεικτές Στρατηγικές – Αποδόσεις Παικτών

- Η πιθανότητα να επιλέξει ο πρώτος παίκτης «Μαύρο» και ο δεύτερος «Κόκκινο» είναι:

$$P(\text{Μάυρο}, \text{Κόκκινο}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}.$$

- Η πιθανότητα να επιλέξουν και οι δύο παίκτες «Μαύρο» είναι:

$$P(\text{Μάυρο}, \text{Μάυρο}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}.$$

Μεικτές Στρατηγικές – Αποδόσεις Παικτών

- Η αναμενόμενη απόδοση του παίκτη 1, V_1 με βάση τις παραπάνω μεικτές στρατηγικές είναι:

$$V_1 = \frac{1}{4} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{12} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot (-1) = \frac{1}{6}.$$

- Η αναμενόμενη απόδοση του παίκτη 2, V_2 με βάση τις παραπάνω μεικτές στρατηγικές είναι:

$$V_2 = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{12} \cdot (-1) + \frac{1}{6} \cdot 1 = -\frac{1}{6}.$$

Μεικτές Στρατηγικές – Ισορροπία Nash

- Μεικτές στρατηγικές χρησιμοποιούμε σε παίγνια σταθερού αθροίσματος στα οποία δεν υπάρχουν αμιγείς στρατηγικές.

Μεικτές Στρατηγικές – Ισορροπία Nash

- Μεικτές στρατηγικές χρησιμοποιούμε επίσης όταν θέλουμε να βρούμε εκτός από τις ισορροπίες που προκύπτουν με καθαρές στρατηγικές και τις ισορροπίες που προκύπτουν με μεικτές στρατηγικές.

Μεικτές Στρατηγικές – Ισορροπία Nash

Παράδειγμα:

- Έστω το σύνολο των δύο παικτών $N = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$.
- Το σύνολο των στρατηγικών του παίκτη A είναι

$X_{\mathrm{A}} = \{A_1, A_2\}$ και του παίκτη B είναι $X_{\mathrm{B}} = \{\mathrm{B}_1, B_2\}$.

- Οι αποδόσεις των δύο παικτών φαίνονται στον παρακάτω **πίνακα αποδόσεων.**

Μεικτές Στρατηγικές – Ισορροπία Nash

	B_1	B_2
A_1	$2, 1$	$0, 0$
A_2	$0, 0$	$1, 2$

Μεικτές Στρατηγικές – Ισορροπία Nash

- Υποθέτουμε ότι ο παίκτης A επιλέγει την στρατηγική A_1 με πιθανότητα p και την στρατηγική A_2 με πιθανότητα $1-p$.
- Υποθέτουμε επίσης ότι ο παίκτης B επιλέγει την στρατηγική B_1 με πιθανότητα q και την στρατηγική B_2 με πιθανότητα $1-q$.

Μεικτές Στρατηγικές – Ισορροπία Nash

	$\mathbf{B_1}(\boldsymbol{q})$	$\mathbf{B_2}(\mathbf{1}-\boldsymbol{q})$
$\mathbf{A_1}(\boldsymbol{p})$	$\mathbf{2,1}$	$\mathbf{0,0}$
$\mathbf{A_2}(\mathbf{1}-\boldsymbol{p})$	$\mathbf{0,0}$	$\mathbf{1,2}$

Μεικτές Στρατηγικές – Ισορροπία Nash

- Σκοπός μας είναι στο παραπάνω παίγνιο να βρούμε όλες τις ισορροπίες (καθαρές και μεικτές).

Μεικτές Στρατηγικές – Ισορροπία Nash

Βήμα 1: Θα βρούμε τις βέλτιστες επιλογές για τον παίκτη 1.

Δεδομένου ότι ο παίκτης B επιλέγει την στρατηγική B_1 με πιθανότητα q και την στρατηγική B_2 με πιθανότητα $1-q$, έχουμε:

	$\mathbf{B_1(q)}$	$\mathbf{B_2(1-q)}$
$\mathbf{A_1(p)}$	$\mathbf{2,1}$	$\mathbf{0,0}$
$\mathbf{A_2(1-p)}$	$\mathbf{0,0}$	$\mathbf{1,2}$

Μεικτές Στρατηγικές – Ισορροπία Nash

- Η αναμενόμενη απόδοσή του παίκτη A αν επιλέξει την στρατηγική A_1 είναι:
$$V_A(A_1, q) = 2q.$$
- Η αναμενόμενη απόδοσή του παίκτη A αν επιλέξει την στρατηγική A_2 είναι:
$$V_A(A_2, q) = 1 - q.$$

	$\mathbf{B_1(q)}$	$\mathbf{B_2(1-q)}$
$\mathbf{A_1(p)}$	$\mathbf{2, 1}$	$\mathbf{0, 0}$
$\mathbf{A_2(1-p)}$	$\mathbf{0, 0}$	$\mathbf{1, 2}$

Μεικτές Στρατηγικές – Ισορροπία Nash

- Έχουμε ότι:

$$V_A(A_1, q) < V_A(A_2, q) \Leftrightarrow q < \frac{1}{3}$$

$$V_A(A_1, q) > V_A(A_2, q) \Leftrightarrow q > \frac{1}{3}$$

$$V_A(A_1, q) = V_A(A_2, q) \Leftrightarrow q = \frac{1}{3}$$

- Έχουμε ότι:

$$V_A(A_1, q) < V_A(A_2, q) \Leftrightarrow q < \frac{1}{3}$$

$$V_A(A_1, q) > V_A(A_2, q) \Leftrightarrow q > \frac{1}{3}$$

$$V_A(A_1, q) = V_A(A_2, q) \Leftrightarrow q = \frac{1}{3}$$

Μεικτές Στρατηγικές – Ισορροπία Nash

Επομένως:

- Αν $q < \frac{1}{3}$ τότε η βέλτιστη επιλογή για τον παίκτη A είναι να διαλέξει την στρατηγική με A_2 με πιθανότητα $1 - p = 1$, δηλαδή έχουμε $p = 0$.
- Αν $q > \frac{1}{3}$ τότε η βέλτιστη επιλογή για τον παίκτη A είναι να διαλέξει την στρατηγική με A_1 με πιθανότητα $p = 1$.

Μεικτές Στρατηγικές – Ισορροπία Nash

Επομένως:

- Αν $q = \frac{1}{3}$ τότε επιλογή για τον παίκτη A είναι αδιάφορη, δηλαδή μπορεί να επιλέξει οποιαδήποτε τιμή $p \in [0,1]$.

Μεικτές Στρατηγικές – Ισορροπία Nash

<u>Βήμα 2</u>: Θα βρούμε τις βέλτιστες επιλογές για τον παίκτη 2.

Δεδομένου ότι ο παίκτης A επιλέγει την στρατηγική A_1 με πιθανότητα p και την στρατηγική A_2 με πιθανότητα $1-p$, έχουμε:

	$\mathbf{B_1(q)}$	$\mathbf{B_2(1-q)}$
$\mathbf{A_1(p)}$	$\mathbf{2, 1}$	$\mathbf{0, 0}$
$\mathbf{A_2(1-p)}$	$\mathbf{0, 0}$	$\mathbf{1, 2}$

Μεικτές Στρατηγικές – Ισορροπία Nash

- Η αναμενόμενη απόδοσή του παίκτη Β αν επιλέξει την στρατηγική B_1 είναι:

$$V_B(B_1, p) = p.$$

- Η αναμενόμενη απόδοσή του παίκτη Β αν επιλέξει την στρατηγική B_2 είναι:

$$V_B(B_2, p) = 2(1-p) = 2 - 2p.$$

	$\mathbf{B_1(q)}$	$\mathbf{B_2(1-q)}$
$\mathbf{A_1(p)}$	$\mathbf{2,1}$	$\mathbf{0,0}$
$\mathbf{A_2(1-p)}$	$\mathbf{0,0}$	$\mathbf{1,2}$

Μεικτές Στρατηγικές – Ισορροπία Nash

- Έχουμε ότι:

$$V_B(B_1, p) < V_B(B_2, p) \Leftrightarrow p < \frac{2}{3}$$

$$V_B(B_1, p) > V_B(B_2, p) \Leftrightarrow p > \frac{2}{3}$$

$$V_B(B_1, p) = V_B(B_2, p) \Leftrightarrow p = \frac{2}{3}$$

	$\mathbf{B_1(q)}$	$\mathbf{B_2(1-q)}$
$\mathbf{A_1(p)}$	$\mathbf{2, 1}$	$\mathbf{0, 0}$
$\mathbf{A_2(1-p)}$	$\mathbf{0, 0}$	$\mathbf{1, 2}$

Μεικτές Στρατηγικές – Ισορροπία Nash

Επομένως:

- Αν $p < \frac{2}{3}$ τότε η βέλτιστη επιλογή για τον παίκτη B είναι να διαλέξει την στρατηγική με B_2 με πιθανότητα $1 - q = 1$, δηλαδή έχουμε $q = 0$.
- Αν $p > \frac{2}{3}$ τότε η βέλτιστη επιλογή για τον παίκτη B είναι να διαλέξει την στρατηγική με B_1 με πιθανότητα $q = 1$.

Μεικτές Στρατηγικές – Ισορροπία Nash

- Αν $p = \frac{2}{3}$ τότε η επιλογή για τον παίκτη A είναι αδιάφορη, δηλαδή μπορεί να επιλέξει οποιαδήποτε τιμή $q \in [0,1]$.

Μεικτές Στρατηγικές – Ισορροπία Nash

Βήμα 3: Θα βρούμε όλες τις ισορροπίες Nash (Με καθαρές και μεικτές στρατηγικές).

Βέλτιστες Στρατηγικές Παίκτη 1:

- Αν $q < \frac{1}{3}$ τότε $p = 0$, (1_{A})
- Αν $q > \frac{1}{3}$ τότε $p = 1$, (2_{A})
- Αν $q = \frac{1}{3}$ τότε $p \in [0,1]$. (3_{A})

Βέλτιστες Στρατηγικές Παίκτη 2:

- Αν $p < \frac{2}{3}$ τότε $q = 0$, (1_{B})
- Αν $p > \frac{2}{3}$ τότε $q = 1$, (2_{B})
- Αν $p = \frac{2}{3}$ τότε $q \in [0,1]$. (3_{B})

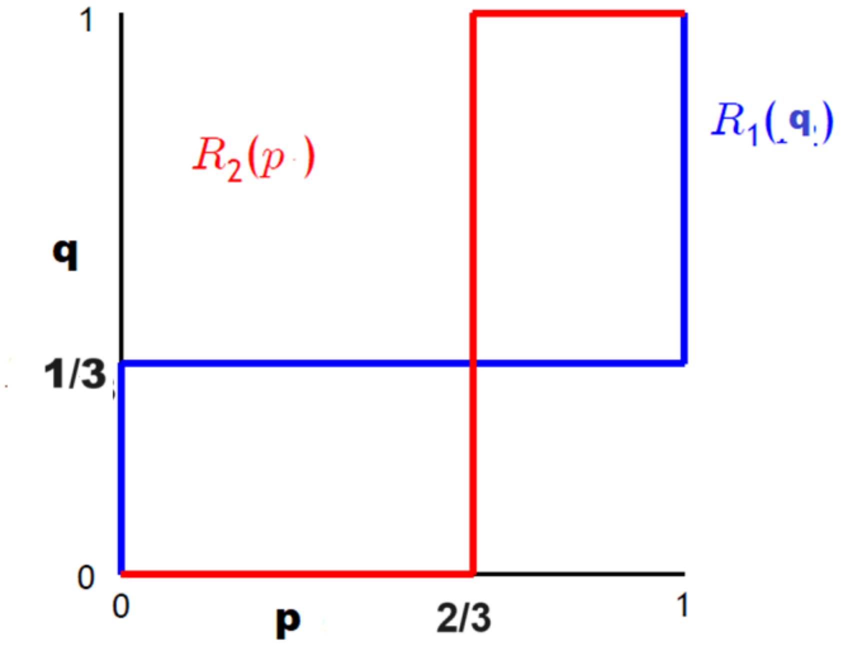
Μεικτές Στρατηγικές – Ισορροπία Nash

Επομένως οι αμοιβαία βέλτιστες στρατηγικές οι οποίες αποτελούν και σημεία ισορροπίας Nash είναι οι εξής:

- $p = 0, q = 0$ καθαρή στρατηγική (A_2, B_2) με πιθανότητα 1. (Από (1_A) και (1_B))
- $p = 1, q = 1$καθαρή στρατηγική (A_1, B_1) με πιθανότητα 1. (Από (2_A) και (2_B))
- $p = \frac{2}{3}, \;\; q = \frac{1}{3}$ Μεικτή στρατηγική (Από (3_A) και (3_B)).

Μεικτές Στρατηγικές – Ισορροπία Nash

Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε την γραφική επίλυση του παίγνιου.



Μεικτές Στρατηγικές – Ισορροπία Nash

Παρατήρηση:

Στην περίπτωση της ισορροπίας με μεικτές στρατηγικές $(p,q) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ για τις αναμενόμενες αποδόσεις των δύο παικτών ισχύουν τα εξής:

	$\mathbf{B_1(q)}$	$\mathbf{B_2(1-q)}$
$\mathbf{A_1(p)}$	**2, 1**	**0, 0**
$\mathbf{A_2(1-p)}$	**0, 0**	**1, 2**

Μεικτές Στρατηγικές – Ισορροπία Nash

$$V_A = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$V_B = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

Δηλαδή $V_A = V_B$

	$\mathbf{B_1(q)}$	$\mathbf{B_2(1-q)}$
$\mathbf{A_1(p)}$	2,1	0,0
$\mathbf{A_2(1-p)}$	0,0	1,2

Ισορροπία Nash – Θεώρημα Ύπαρξης

- Αποδεικνύεται το παρακάτω πολύ βασικό Θεώρημα ύπαρξης Ισορροπίας Nash της Θεωρίας Παιγνίων.

Ισορροπία Nash – Θεώρημα Ύπαρξης

Θεώρημα Ύπαρξης Ισορροπίας Nash

Κάθε παίγνιο με πεπερασμένο αριθμό παικτών στο οποίο το πλήθος των στρατηγικών για τον κάθε παίκτη είναι πεπερασμένο έχει τουλάχιστον μία ισορροπία Nash με καθαρές ή μεικτές στρατηγικές.

Ισορροπία Nash – Θεώρημα Ύπαρξης

Παρατηρήσεις

- Το Θεώρημα ύπαρξης ισορροπίας Nash δεν μας δίνει καμία πληροφορία για τον τρόπο με τον οποίο οι παίκτες μπορούν να καταλήξουν σε ισορροπία Nash ή έναν εύκολο τρόπο να φτάσουν σε αυτήν.
- Σε σύνθετα παίγνια η εύρεση σημείου ισορροπίας Nash μπορεί να είναι μια υπολογιστικά εξαιρετικά δύσκολη διαδικασία.

Ισορροπία Nash – Θεώρημα Ύπαρξης

Παρατηρήσεις

- Η ισορροπία Nash σε ένα παίγνιο λειτουργεί καλύτερα όταν είναι μοναδική, αφού σε αυτήν την περίπτωση υπάρχει μία και μοναδική επιλογή για τους λογικούς παίκτες του παιγνίου.

Μεικτές Στρατηγικές – Αρχή Αδιαφορίας

- Για την εύρεση Ισορροπίας Nash σε μεικτές στρατηγικές μπορούμε να ακολουθήσουμε και την ακόλουθη μέθοδο η οποία είναι γνωστή ως **«Αρχή Αδιαφορίας»**.

Μεικτές Στρατηγικές – Αρχή Αδιαφορίας

Αρχή της Αδιαφορίας

Η στρατηγική ισορροπίας για τον κάθε παίκτη μπορεί να βρεθεί αν εξισώσουμε τις αναμενόμενες αποδόσεις του άλλου παίκτη από τις καθαρές στρατηγικές.

Άσκηση 1

Να βρείτε όλες τις ισορροπίες που υπάρχουν στο παίγνιο του πρώτου παραδείγματος.

Παίκτης 2

Παίκτης 1	«Κόκκινο» $(\boldsymbol{q})$	«Μαύρο» $(\mathbf{1}-\boldsymbol{q})$
«Κόκκινο» $(\boldsymbol{p})$	$-1, 1$	$1, -1$
Μαύρο $(\mathbf{1}-\boldsymbol{p})$	$1, -1$	$-1,1$

Άσκηση 1

<u>Λύση:</u>

Παρατηρούμε ότι το παίγνιο δεν έχει ισορροπία Nash με καθαρές στρατηγικές. Για μεικτές στρατηγικές θα εφαρμόσουμε την Αρχή Αδιαφορίας.

Άσκηση 1

- Η αναμενόμενη απόδοσή του παίκτη 1 αν επιλέξει την στρατηγική K_1 είναι:
$$V_1(K_1, q) = 1 - 2q.$$
- Η αναμενόμενη απόδοσή του παίκτη 1 αν επιλέξει την στρατηγική M_1 είναι:
$$V_1(M_1, q) = 2q - 1.$$

Παίκτης 2

Παίκτης 1	«Κόκκινο» (q)	«Μαύρο» $(1-q)$
«Κόκκινο» (p)	$-1, 1$	$1, -1$
Μαύρο $(1-p)$	$1, -1$	$-1, 1$

Άσκηση 1

- Σύμφωνα με την αρχή της αδιαφορίας η στρατηγική ισορροπίας για τον παίκτη 1 προκύπτει από την λύση της εξίσωσης:

$$V_1(K_1, q) = V_1(M_1, q)$$

Δηλαδή

$$1 - 2q = 2q - 1$$

Ή

$$q = \frac{1}{2}$$

Άσκηση 1

- Η αναμενόμενη απόδοσή του παίκτη 2 αν επιλέξει την στρατηγική K_2 είναι:

$$V_2(K_2, p) = 2p - 1.$$

- Η αναμενόμενη απόδοσή του παίκτη 2 αν επιλέξει την στρατηγική M_2 είναι:

$$V_2(M_2, p) = 1 - 2p$$

Παίκτης 2

Παίκτης 1	«Κόκκινο» (q)	«Μαύρο» $(1-q)$
«Κόκκινο» (p)	$-1, 1$	$1, -1$
Μαύρο $(1-p)$	$1, -1$	$-1,1$

Άσκηση 1

- Σύμφωνα με την αρχή της αδιαφορίας η στρατηγική ισορροπίας για τον παίκτη 2 προκύπτει από την λύση της εξίσωσης:

$$V_2(K_2, p) = V_2(M_2, p)$$

Δηλαδή

$$1 - 2p = 2p - 1$$

Ή

$$p = \frac{1}{2}$$

Άσκηση 1

Επομένως οι αμοιβαία βέλτιστες στρατηγικές οι οποίες αποτελούν και σημεία ισορροπίας Nash είναι οι εξής:

- $p = \frac{1}{2}, \quad q = \frac{1}{2}$ Μεικτή στρατηγική.

Άσκηση 2

Να βρείτε τυχόν ισορροπίες που υπάρχουν στο παρακάτω παίγνιο.

	$\mathbf{A_2}$	$\mathbf{B_2}$
$\mathbf{A_1}$	$\mathbf{2, 0}$	$\mathbf{1, 1}$
$\mathbf{B_1}$	$\mathbf{3, 4}$	$\mathbf{1, 2}$

Άσκηση 3

Να βρείτε τυχόν ισορροπίες που υπάρχουν στο παρακάτω παίγνιο.

	$\mathbf{A_2}$	$\mathbf{B_2}$
$\mathbf{A_1}$	$\mathbf{1, -1}$	$\mathbf{0, 0}$
$\mathbf{B_1}$	$\mathbf{0, 0}$	$\mathbf{0, 6}$

Βιβλιογραφία

Γ. Σταματόπουλος, Θεωρία Παιγνίων, Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα. www.kallipos.gr

Αλιπράντης, Χ., Chakrabarti, S. (2004). Παίγνια και λήψη αποφάσεων. Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.

Μαγείρου, Ε. (2012). Παίγνια και Αποφάσεις – Μια εισαγωγική προσέγγιση. Εκδόσεις Κριτική.

Μηλολιδάκης, Κ. (2009). Θεωρία Παιγνίων – Μαθηματικά Μοντέλα Σύγκρουσης και Συνεργασίας. Εκδόσεις «Σοφία».