

Βαρύτητα και χωροχρονική γεωμετρία¹

Κώστας Παπαχρήστου

Σχολή Ναυτικών Δοκίμων

Συζητούνται βασικές ιδέες της θεωρίας βαρύτητας (κλασικής και σχετικιστικής) με τη μικρότερη δυνατή χρήση μαθηματικού φορμαλισμού. Ειδικά, εξηγείται η σχέση της βαρύτητας με τη γεωμετρία του χωροχρόνου.

1. Εισαγωγή

Σε ένα πρόσφατο βιβλίο με θέμα την Ειδική Σχετικότητα (Special Relativity, σύντομα: SR) [1] είδαμε ότι, στο πλαίσιο αυτής της θεωρίας, ο χωροχρόνος θεωρείται *επίπεδος* ψευδο-Ευκλείδειος (ή Λορεντζιανός) χώρος. Σύμφωνα, όμως, με την Γενική Σχετικότητα (General Relativity, σύντομα: GR) ο χωροχρόνος γίνεται *καμπύλος* με την παρουσία βαρύτητας. Αυτό σημαίνει ότι η βαρύτητα είναι στενά συνδεδεμένη με τα εγγενή γεωμετρικά χαρακτηριστικά του χωροχρόνου.

Ο συσχετισμός ανάμεσα στη βαρύτητα (μία φυσική έννοια) και τη γεωμετρία (μία έννοια μαθηματική) δεν είναι κάτι που μπορεί να εξηγηθεί εύκολα χωρίς τη χρήση προχωρημένων μαθηματικών. Σε αυτό το άρθρο θα επιχειρήσουμε να περιγράψουμε μερικές βασικές ιδέες της GR σε εννοιολογικό, κυρίως, επίπεδο. Για μία βαθύτερη μελέτη της θεωρίας ο αναγνώστης παραπέμπεται στα πολλά εξαιρετικά διδακτικά εγχειρίδια που διατίθενται στη βιβλιογραφία (για μία μερική λίστα δείτε, π.χ., τις αναφορές [2-9]).

Στην «καρδιά» της GR δεσπόζει η *αρχή της ισοδυναμίας* αδρανειακής και βαρυτικής μάζας, μέσω της οποίας αρχής η βαρύτητα βρίσκεται πως είναι *τοπικά* ισοδύναμη με την επιτάχυνση. Από την άλλη μεριά, η επιτάχυνση είναι στενά συνδεδεμένη με μη-αδρανειακά συστήματα αναφοράς, άρα με μη-Λορεντζιανά συστήματα χωροχρονικών συντεταγμένων που έχουν μη-σταθερή μετρική, άρα με εν δυνάμει καμπύλο χωροχρόνο. Σε γενικούς όρους, αυτή η γραμμή σκέψης εξηγεί τον συσχετισμό της βαρύτητας με τη γεωμετρία.

2. Ειδική έναντι Γενικής Σχετικότητας

Σύμφωνα τόσο με την SR, όσο και με την GR, είναι αδύνατο να ορίσουμε απόλυτη ταχύτητα. Στην SR, εν τούτοις, η επιτάχυνση εξακολουθεί να έχει απόλυτη σημασία, υπό την έννοια ότι η φυσική συνθήκη μηδενισμού (ή, ισοδύναμα, μη-μηδενισμού) της επιτάχυνσης είναι αμετάβλητη κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz (είναι *Λορεντζιανά αμετάβλητη*). Επί πλέον, στην SR δεχόμαστε την ύπαρξη ενός άπειρου συνόλου *αδρανειακών συστημάτων αναφοράς*, ισοδύναμων μεταξύ τους ως προς την μαθηματική διατύπωση των φυσικών νόμων. Εξ ορισμού, ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα ότι, ως προς αυτό, ένα *ελεύθερο* σωματίδιο (ένα σωματίδιο που δεν υπόκειται σε επιδράσεις από τον υπόλοιπο κόσμο) κινείται ομαλά (με σταθερή ταχύτητα, άρα χωρίς επιτάχυνση). Οι μετασχηματισμοί Lorentz, οι οποίοι συνδέουν αδρανειακά συστήματα μεταξύ τους, εξασφαλίζουν ότι μηδενική (μη-μηδενική) επιτάχυνση σε ένα σύστημα αναφοράς σημαίνει αυτόματα μηδενική (μη-μηδενική) επιτάχυνση σε οποιοδήποτε άλλο [1].

¹ Μετάφραση από το <https://arxiv.org/abs/2603.04574> (Παράρτημα 2).

Καμία τέτοια «προνομιακή» τάξη συστημάτων αναφοράς δεν υφίσταται στην GR, όπου λαμβάνεται υπόψη η βαρύτητα. Πράγματι, κανένας αδρανειακός παρατηρητής (θεωρούμενος ως ελεύθερο σώμα) δεν μπορεί να υπάρξει στο Σύμπαν, δοθέντος ότι κάθε πράγμα που έχει μάζα ή ενέργεια υπόκειται στην παγκόσμια βαρυτική έλξη.

Από γεωμετρική άποψη, ο χωροχρόνος της SR είναι επίπεδος χώρος. Αυτό επιτρέπει την ύπαρξη μίας τάξης «Λορεντζιανών» συστημάτων συντεταγμένων, τα οποία αντιστοιχούν στα αδρανειακά συστήματα αναφοράς και στα οποία ο μετρικός ταυοστής έχει τη μορφή σταθερού διαγώνιου πίνακα η με στοιχεία $\eta_{\mu\nu} = \pm \delta_{\mu\nu}$, δηλαδή, $\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Σε αυτά τα συστήματα συντεταγμένων οι *κοσμικές γραμμές* (worldlines) που παριστούν την κίνηση ελεύθερων σωματιδίων είναι ευθείες.

Στην GR ο επίπεδος χωροχρόνος της SR αντικαθίσταται από έναν τετραδιάστατο *καμπύλο* χώρο Riemann, στον οποίο δεν υφίστανται προνομιακά συστήματα συντεταγμένων. Ειδικότερα, δεν υπάρχουν *καθολικά* ή *οικουμενικά* (global) Λορεντζιανά συστήματα που επιδέχονται σταθερή μετρική. Εν τούτοις, η *τοπική επιπεδότητα* του χωροχρόνου μάς επιτρέπει να ορίσουμε Λορεντζιανές συντεταγμένες σε μία αρκετά μικρή γειτονιά οποιουδήποτε χωροχρονικού σημείου, καθώς και μία *τοπικά* σταθερή μετρική ίση με την μετρική $\eta_{\mu\nu}$ του επίπεδου χωροχρόνου. Η φυσική διάσταση αυτών των γεωμετρικών ιδεών γίνεται φανερή με βάση την *αρχή της ισοδυναμίας*.

3. Η αρχή της ισοδυναμίας

Η αρχή της ισοδυναμίας κατέχει κεντρική θέση στη βαρυτική θεωρία, τόσο την κλασική όσο και τη σχετικιστική. Σε αυτή την ενότητα θα συζητήσουμε την αρχή αυτή στο πλαίσιο της Νευτώνειας θεωρίας βαρύτητας. Τα συμπεράσματά μας, όμως, ισχύουν γενικότερα και στη σχετικιστική περιοχή των υψηλών ταχυτήτων.

Πρώτα, όμως, μερικοί αναγκαίοι ορισμοί:

Βαρυτική μάζα (m_G): το «φορτίο» της βαρυτικής αλληλεπίδρασης. Δηλαδή, η φυσική ποσότητα που αποτελεί την πηγή της αλληλεπίδρασης ενώ ταυτόχρονα υπόκειται και η ίδια στην αλληλεπίδραση αυτή.

Αδρανειακή μάζα (m_I): η φυσική ποσότητα που υπεισέρχεται στον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, $F = m_I a$.

Σώμα σε ελεύθερη πτώση: ένα σώμα που κινείται κάτω από την επίδραση και μόνο της βαρύτητας (χωρίς να επενεργούν πάνω του άλλου είδους δυνάμεις).

Αδρανειακός παρατηρητής (ή σύστημα αναφοράς) μέσα σε πεδίο βαρύτητας: ένας παρατηρητής (ή σύστημα) υποκείμενος σε μη-βαρυτικές δυνάμεις που αντισταθμίζουν ακριβώς τη δύναμη της βαρύτητας, εμποδίζοντας έτσι την ελεύθερη πτώση του παρατηρητή (ή συστήματος). Παράδειγμα: ένας ακίνητος παρατηρητής πάνω στην επιφάνεια της Γης (αν θεωρήσουμε τη Γη σαν «αδρανειακό» σύστημα αναφοράς).

Θεωρούμε τώρα ένα σωματίδιο μέσα σε βαρυτικό πεδίο $\vec{g}(\vec{r})$, όπου $\vec{r}$ είναι το διάνυσμα θέσης ως προς την αρχή ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς. Η βαρυτική δύναμη στο σωματίδιο σε δοσμένο σημείο είναι $\vec{F}_G(\vec{r}) = m_G \vec{g}(\vec{r})$, όπου m_G είναι η βαρυτική μάζα του σωματιδίου. Θεωρώντας ότι δεν ασκούνται άλλες, μη-βαρυτικές δυνάμεις στο σωματίδιο, από τον νόμο του Νεύτωνα έχουμε ότι $\vec{F}_G(\vec{r}) = m_I \vec{a}(\vec{r})$, όπου m_I είναι η αδρανειακή μάζα και $\vec{a}(\vec{r})$ η τοπική επιτάχυνση του σωματιδίου. Έτσι,

$$m_I \vec{a}(\vec{r}) = m_G \vec{g}(\vec{r}).$$

Αξιωνοντας ότι

$$m_I = m_G \quad (1)$$

(μία υπόθεση που υποστηρίζεται από μεγάλο αριθμό πειραμάτων [8]) έχουμε:

$$\vec{a}(\vec{r}) = \vec{g}(\vec{r}) \quad (2)$$

Αυτό μας οδηγεί σε ένα σημαντικό συμπέρασμα:

Όλα τα σώματα που διέρχονται με ελεύθερη πτώση από το ίδιο σημείο ενός βαρυτικού πεδίου έχουν την ίδια επιτάχυνση, ίση με την ένταση του πεδίου στο σημείο αυτό, ανεξάρτητα από τη μάζα τους ή την εσωτερική τους σύνθεση.

Η σχέση (1), η οποία ταυτίζει τη βαρυτική με την αδρανειακή μάζα, εκφράζει την αρχή της ισοδυναμίας και αποτελεί μία από τις σημαντικότερες αρχές της θεωρίας βαρύτητας. Η σχέση (2), τότε, δείχνει πως υπάρχει κάποια μορφή ισοδυναμίας ανάμεσα στη βαρύτητα και την επιτάχυνση. Ας δούμε τι σημαίνει αυτή η ισοδυναμία από φυσική άποψη.

Ένας αδρανειακός παρατηρητής του οποίου το τοπικό εργαστήριο βρίσκεται μέσα σε βαρυτικό πεδίο θα παρατηρήσει ότι όλα τα σώματα που δεν υπόκεινται σε άλλες δυνάμεις πλην της βαρύτητας (δηλαδή, όλα τα σώματα που βρίσκονται σε ελεύθερη πτώση) έχουν κοινή επιτάχυνση μέσα στο εργαστήριο. Από την άλλη μεριά, ένας επιταχυνόμενο παρατηρητής (ως προς αδρανειακό σύστημα αναφοράς) που βρίσκεται μακριά από οποιοδήποτε βαρυτικό πεδίο θα παρατηρήσει ότι, ως προς το σύστημα αναφοράς του, όλα τα ελεύθερα σωματίδια έχουν κοινή επιτάχυνση. Έτσι, δεχόμενοι την ισχύ της αρχής της ισοδυναμίας (1), καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ένας τοπικός παρατηρητής δεν μπορεί να αποφανθεί αν το σύστημα αναφοράς του είναι αδρανειακό σύστημα τοποθετημένο μέσα σε βαρυτικό πεδίο, ή επιταχυνόμενο σύστημα μακριά από οποιοδήποτε βαρυτικό πεδίο. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι «ανταλλάξαμε τη βαρύτητα με επιτάχυνση», όπως υπονοείται από τη σχέση (2).

Για να είμαστε ακριβείς, η σχέση (2) ισχύει για συγκεκριμένο σημείο βαρυτικού πεδίου. Αν το πεδίο μεταβάλλεται σημαντικά από σημείο σε σημείο μέσα στο εργαστήριο του παρατηρητή, τότε όμοια δοκιμαστικά σωματίδια θα έχουν διαφορετικές επιταχύνσεις σε διαφορετικά σημεία, πράγμα που θα φανερώσει την παρουσία ενός μη-ομογενούς βαρυτικού πεδίου. Θα υποθέσουμε ότι το πεδίο μεταβάλλεται ελάχιστα (είναι σχεδόν ομογενές) μέσα στο εργαστήριο του παρατηρητή. Ισοδύναμα, οι διαστάσεις του εργαστηρίου είναι πολύ μικρές σε σύγκριση με την απόσταση στην οποία το πεδίο μεταβάλλεται αισθητά, έτσι ώστε «παλιρροϊκά φαινόμενα» (tidal effects) [8] να γίνονται αντιληπτά.

Υποθέτουμε τώρα ότι το εργαστήριο του παρατηρητή και όλα τα σωματίδια μέσα σε αυτό βρίσκονται σε ελεύθερη πτώση κάτω από την επίδραση της βαρύτητας και μόνο. Τότε, ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, το εργαστήριο και τα σωματίδια θα έχουν κοινή επιτάχυνση, ίση με την ένταση του πεδίου, πράγμα που σημαίνει ότι τα σωματίδια δεν θα επιταχύνονται ως προς τον παρατηρητή. Αυτός λοιπόν θα μπορούσε να υποθέσει ότι το εργαστήριό του είναι ένα «αδρανειακό» σύστημα αναφοράς έξω από το πεδίο βαρύτητας, και όλα τα σωματίδια μέσα στο εργαστήριο είναι «ελεύθερα» σωματίδια. Σε ένα σύστημα αναφοράς που βρίσκεται σε ελεύθερη πτώση, οι επιδράσεις της βαρύτητας εξαλείφονται! Και πάλι, οι διαστάσεις του εργαστηρίου πρέπει να είναι αρκετά μικρές σε σύγκριση με την απόσταση στην οποία το

πεδίο βαρύτητας μεταβάλλεται αισθητά. Πρακτικά, μέσα στο εργαστήριο το βαρυτικό πεδίο θεωρείται ομογενές.

Λέμε ότι ένα εργαστήριο σε ελεύθερη πτώση μοιάζει τοπικά με αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Βέβαια, δεν είναι δυνατό να ορίσουμε ένα καθολικό (οικουμενικό) «αδρανειακό» σύστημα αναφοράς με ένα και μοναδικό εργαστήριο σε ελεύθερη πτώση μέσα σε μη-ομογενές βαρυτικό πεδίο. (Η περίπτωση καθολικά ομογενούς πεδίου είναι καθαρά θεωρητική και δεν υφίσταται στην πραγματικότητα.)

4. Καμπύλος χωροχρόνος

Περνάμε τώρα από τη Νευτώνεια στη σχετικιστική θεώρηση. Σύμφωνα με την SR [1] ένα αδρανειακό (Λορεντζιανό) σύστημα αναφοράς περιγράφεται από ένα σύστημα χωροχρονικών συντεταγμένων

$$x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, x, y, z)$$

με μετρικό στοιχείο (απειροστό χωροχρονικό διάστημα)

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \\ &= c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \end{aligned} \quad (3)$$

όπου χρησιμοποιούμε τη γνωστή αθροιστική σύμβαση σύμφωνα με την οποία αθροίζουμε από 0 έως 3 εκφράσεις με επαναλαμβανόμενους πάνω και κάτω δείκτες, και όπου το $\eta_{\mu\nu}$ παριστά στοιχείο του παρακάτω σταθερού πίνακα (ο οποίος παίζει ρόλο μετρικού τανυστή σε χώρο Minkowski):

$$\eta \equiv [\eta_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \quad (4)$$

Η ύπαρξη ενός οικουμενικού (ψευδο-)Ευκλείδειου συστήματος συντεταγμένων και ενός καθολικά σταθερού μετρικού τανυστή $\eta_{\mu\nu}$ υποδεικνύει ότι ο χωροχρόνος της SR είναι επίπεδος.

Οι μετασχηματισμοί συντεταγμένων ($x^\mu \rightarrow x'^\mu$) ανάμεσα σε Λορεντζιανά συστήματα αναφοράς είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί της μορφής

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad (5)$$

και ορίζονται έτσι ώστε το μετρικό στοιχείο ds^2 να είναι αναλλοίωτο:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu \quad (6)$$

Έπεται τότε ότι ο πίνακας $\Lambda \equiv [\Lambda^\mu_\nu]$ ικανοποιεί τη σχέση

$$\Lambda^t \eta \Lambda = \eta \Leftrightarrow \Lambda^\mu_\lambda \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\rho = \eta_{\lambda\rho} \quad (7)$$

(όπου Λ^t ο ανάστροφος του πίνακα Λ). Οι μετασχηματισμοί συντεταγμένων που ορίζονται από τις σχέσεις (5)-(7) αποτελούν τους μετασχηματισμούς Lorentz της SR (βλ., π.χ., [1]).

Ο μετασχηματισμός από ένα αδρανειακό σε ένα επιταχυνόμενο (άρα μη-αδρανειακό) σύστημα αναφοράς ισοδυναμεί με μετασχηματισμό σε γενικές (καμπυλόγραμμες) συντεταγμένες $\bar{x}^\mu$ οι οποίες είναι συναρτήσεις των x^λ : $\bar{x}^\mu \equiv \bar{x}^\mu(x^\lambda)$, όπου με x^λ συμβολίζουμε συνολικά τις $(x^0, \dots, x^3)$. Στις νέες συντεταγμένες το χωροχρονικό διάστημα γράφεται

$$ds^2 \equiv \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu}(\bar{x}^\lambda) d\bar{x}^\mu d\bar{x}^\nu \quad (8)$$

Ένας μετασχηματισμός αυτού του είδους (καθώς και, γενικότερα, κάθε μετασχηματισμός που συνδέει μεταξύ τους μη-αδρανειακά συστήματα αναφοράς) είναι γενικά *μη-γραμμικός* (βλ. Παράρτημα). Στην περίπτωση του επίπεδου χωροχρόνου υπάρχει πάντα ένας κατάλληλος μετασχηματισμός συντεταγμένων που επαναφέρει έναν γενικό μετρικό τανυστή $g_{\mu\nu}(\bar{x}^\lambda)$ στην τυπική σταθερή μορφή $\eta_{\mu\nu}$ της SR.

Με την παρουσία πεδίου βαρύτητας, το μόνο που μπορούμε να ορίσουμε είναι ένα προσεγγιστικά αδρανειακό *τοπικό* σύστημα αναφοράς σε μία αρκετά μικρή γειτονιά οποιουδήποτε χωροχρονικού σημείου, θεωρώντας ένα σύστημα (π.χ. ένα εργαστήριο) σε ελεύθερη πτώση, όπως είδαμε στην Παρ. 3. Σε γεωμετρικούς όρους, ο επίπεδος χωροχρόνος της SR, όπου η βαρύτητα είναι απύσχα, είναι ανάλογος με τον Ευκλείδειο (εδώ, ψευδο-Ευκλείδειο) χώρο στον οποίο μπορούν να οριστούν ένα *καθολικό* Καρτεσιανό (εδώ, Λορεντζιανό) σύστημα συντεταγμένων και μία σχετιζόμενη σταθερή μετρική. Κανένα καθολικό αδρανειακό σύστημα αναφοράς με Λορεντζιανές συντεταγμένες, όμως, δεν μπορεί να οριστεί στον χωροχρόνο όταν η βαρύτητα είναι παρούσα. Συνεπώς, δεν υπάρχει οικουμενικός μετασχηματισμός από γενικές (καμπυλόγραμμες) σε Λορεντζιανές συντεταγμένες που θα μετασχηματίσει έναν μετρικό τανυστή $g_{\mu\nu}(\bar{x}^\lambda)$ (ο οποίος είναι συνάρτηση των συντεταγμένων) στη σταθερή μορφή $\eta_{\mu\nu}$ της SR, σε όλα τα χωροχρονικά σημεία. Η περίπτωση είναι ανάλογη με την απουσία καθολικού Καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων και καθολικά σταθερής μετρικής σε έναν *εγγενώς καμπύλο* χώρο [όπως, π.χ., η επιφάνεια μιας σφαίρας (αλλά όχι εκείνη ενός κυλίνδρου!)]. Καταλήγουμε έτσι στο συμπέρασμα ότι

με την παρουσία βαρύτητας, ο χωροχρόνος θα πρέπει να θεωρείται ως καμπύλος χώρος που είναι μόνο τοπικά επίπεδος.

(Κόψτε ένα πολύ μικρό κομμάτι από μία μεγάλη σφαιρική επιφάνεια. Θα το δείτε σίγουρα να μοιάζει σχεδόν επίπεδο!)

5. Γεωδαισιακές γραμμές σε καμπύλο χωροχρόνο

Όπως προκύπτει από την αρχή της ισοδυναμίας [σχέση (1)] η τροχιά ενός σωματιδίου που βρίσκεται σε ελεύθερη πτώση (υπόκειται, δηλαδή, μόνο στην επίδραση της βαρύτητας) είναι ανεξάρτητη από τη μάζα ή την εσωτερική σύνθεση του σωματιδίου και σχετίζεται με αυτό καθαυτό το βαρυτικό πεδίο. Το πεδίο αυτό εξαρτάται από την κατανομή της μάζας και της ενέργειας στον χώρο και τον χρόνο και, όπως έχουμε δει, προκαλεί μία *εγγενή καμπυλότητα* στον χωροχρόνο, καθορίζοντας έτσι τη *γεωμετρία*

του χωροχρόνου. Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι η κίνηση κάτω από την αποκλειστική επίδραση της βαρύτητας σχετίζεται με τις ιδιότητες του ίδιου του χωροχρόνου.

Κάθε σωματίδιο σε ελεύθερη πτώση ακολουθεί μία γεωδαισιακή γραμμή [8] του καμπύλου χωροχρόνου. Αυτή μπορεί να οριστεί ως «η πιο ευθεία δυνατή διαδρομή» στον χωροχρόνο, δηλαδή, ως μία καμπύλη που η διεύθυνσή της δεν αλλάζει καθώς κινούμαστε κατά μήκος της (σε γεωμετρικούς όρους, το εφαπτόμενο διάνυσμα στην καμπύλη μεταφέρεται παράλληλα προς τον εαυτό του κατά μήκος της καμπύλης). Ισοδύναμα, δοθέντων δύο χωροχρονικών σημείων A και B , η γεωδαισιακή που συνδέει τα A και B είναι διαδρομή ακραίας χωροχρονικής απόστασης² από το A ως το B .

Ειδικά, ακόμα και το φως ακολουθεί μία γεωδαισιακή του καμπύλου χωροχρόνου μέσα σε ένα βαρυτικό πεδίο. Πράγματι, δοθέντος ότι το φως φέρει ενέργεια (καθώς αποτελείται από φωτόνια) θα πρέπει επίσης να φέρει αδράνεια, σύμφωνα με την ισοδυναμία ανάμεσα στις δύο αυτές φυσικές ιδιότητες. Έτσι, λόγω της αρχής της ισοδυναμίας στη βαρύτητα, το φως θα πρέπει να φέρει και μία δυννητική «βαρυτική μάζα», πράγμα που σημαίνει ότι η πορεία του θα επηρεάζεται από την κατανομή της ύλης και της ενέργειας στον χώρο και τον χρόνο, άρα από τη γεωμετρία του χωροχρόνου. Το φως, λοιπόν, θα κινείται μέσα στο βαρυτικό πεδίο όπως κάθε σωματίδιο σε ελεύθερη πτώση.

Σε επίπεδο χωροχρόνο (δηλαδή, έξω από το πεδίο βαρύτητας) οι γεωδαισιακές είναι ευθείες γραμμές και αντιστοιχούν στις αδρανειακές κινήσεις ελεύθερων σωματιδίων και στη διάδοση φωτεινών ακτίνων.

6. Τοπικά αδρανειακά συστήματα αναφοράς

Στην Παρ. 3 είδαμε ότι, σαν συνέπεια της αρχής της ισοδυναμίας, είναι δυνατό να εξαλείψουμε τοπικά τα αποτελέσματα της βαρύτητας. Επί πλέον, ένα βαρυτικό πεδίο είναι τοπικά ισοδύναμο με ένα επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς. Ας ρίξουμε μία κοντινότερη ματιά σε αυτά τα ζητήματα, αρχικά μέσα στο πλαίσιο της κλασικής Νευτώνειας θεωρίας.

Θεωρούμε ένα σωματίδιο αδρανειακής μάζας m_I και βαρυτικής μάζας m_G , τοποθετημένο μέσα σε ένα ομογενές βαρυτικό πεδίο $\vec{g} = \text{σταθ}$. Η βαρυτική δύναμη στο σωματίδιο ισούται με $m_G \vec{g}$. Το σωματίδιο υπόκειται επίσης σε μία μη-βαρυτική δύναμη της μορφής $\vec{F}'(\vec{R})$, όπου $\vec{R}$ το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου ως προς τον φυσικό παράγοντα που ευθύνεται γι' αυτή τη δύναμη (π.χ., ένα ηλεκτρικό φορτίο που ασκεί δύναμη σε ένα ηλεκτρικά φορτισμένο σωματίδιο). Η κίνηση του σωματιδίου ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς καθορίζεται από τον νόμο του Νεύτωνα:

$$m_I \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m_G \vec{g} + \vec{F}'(\vec{R}) ,$$

όπου $\vec{r}$ το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου ως προς την αρχή των συντεταγμένων του αδρανειακού συστήματος. Αξιωνοντας την ισχύ της ισότητας $m_I = m_G \equiv m$ (αρχή της ισοδυναμίας) έχουμε ότι

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m \vec{g} + \vec{F}'(\vec{R}) \quad (9)$$

² Για την ακρίβεια: μέγιστου ίδιου χρόνου (proper time) [8].

Περνάμε τώρα σε ένα σύστημα αναφοράς που βρίσκεται σε *ελεύθερη πτώση* μέσα στο ομογενές βαρυτικό πεδίο $\vec{g}$. Σύμφωνα με τη σχέση (2), το σύστημα αυτό (όπως και κάθε αντικείμενο σε ελεύθερη πτώση) έχει επιτάχυνση ίση με την ένταση του πεδίου σε κάθε σημείο. Έτσι, το σύστημα έχει σταθερή επιτάχυνση $\vec{g}$ ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς, εκτελώντας ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Έστω $\vec{r}'$ το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου m ως προς την αρχή των συντεταγμένων του συστήματος αναφοράς που βρίσκεται σε ελεύθερη πτώση. Η επιτάχυνση του m ως προς το σύστημα αυτό ισούται με

$$\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} - \vec{g} ,$$

έτσι ώστε

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} + \vec{g} .$$

Συνδυάζοντας την εξίσωση αυτή με τη σχέση (9), και απαλείφοντας το $m\vec{g}$, έχουμε:

$$m \frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = \vec{F}'(\vec{R}) \quad (10)$$

Παρατηρούμε ότι

το βαρυτικό πεδίο «εξαλείφεται» μέσα σε σύστημα αναφοράς που βρίσκεται σε ελεύθερη πτώση.

Τώρα, ένα σωματίδιο m που δεν υπόκειται σε άλλες δυνάμεις πλην της βαρύτητας θα βρίσκεται κι αυτό σε ελεύθερη πτώση με επιτάχυνση $\vec{g}$ ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς, άρα δεν θα επιταχύνεται ως προς το σύστημα σε πτώση. Πράγματι, η σχέση (10) με $\vec{F}'(\vec{R}) = 0$ δίνει

$$\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = 0 ,$$

το οποίο σημαίνει ότι το σωματίδιο κινείται *ομαλά* διαγράφοντας ευθύγραμμη τροχιά ως προς το σύστημα σε πτώση. Συμπεραίνουμε ότι, για έναν παρατηρητή που βρίσκεται μέσα στο σύστημα αυτό, το σωματίδιο m είναι «ελεύθερο» σωματίδιο που κινείται με σταθερή ταχύτητα μέσα σε ένα φαινομενικά «αδρανειακό» σύστημα αναφοράς, *μακριά* από οποιοδήποτε πεδίο βαρύτητας.

Επί πλέον, μέσα σε σύστημα αναφοράς σε ελεύθερη πτώση ακόμα και το φως διαδίδεται ευθύγραμμα, όπως ακριβώς κάθε σωματίδιο με μάζα που βρίσκεται σε ελεύθερη πτώση. (Όπως σημειώσαμε νωρίτερα, οι συνέπειες της αρχής της ισοδυναμίας επηρεάζουν ακόμα και το φως, δοθέντος ότι αυτό φέρει ενέργεια, άρα αδράνεια, άρα δυναμική βαρυτική «μάζα».) Εν τούτοις, η πορεία του φωτός θα είναι *καμπυλόγραμμη* ως προς ένα *αδρανειακό* σύστημα αναφοράς τοποθετημένο μέσα σε βαρυτικό πεδίο. Με άλλα λόγια, ένας αδρανειακός παρατηρητής θα παρατηρήσει *καμπύλωση της πορείας του φωτός* λόγω του βαρυτικού πεδίου (βλ. Παράρτημα).

Όπως προκύπτει από την παραπάνω συζήτηση, όταν εκτελούμε μη-βαρυτικά πειράματα μέσα σε ένα εργαστήριο δεν είμαστε σε θέση να αποφανθούμε αν το εργα-

στήριό μας είναι αδρανειακό σύστημα αναφοράς μακριά από οποιοδήποτε βαρυτικό πεδίο, ή είναι σύστημα σε ελεύθερη πτώση μέσα σε ομογενές πεδίο βαρύτητας.

Γενικότερα, μπορούμε να εξαλείψουμε *τοπικά* τα αποτελέσματα της βαρύτητας ακόμα και στην περίπτωση που το βαρυτικό πεδίο είναι μη-ομογενές, επιλέγοντας ένα σύστημα αναφοράς σε ελεύθερη πτώση, με την προϋπόθεση ότι οι διαστάσεις του συστήματος αυτού είναι πολύ μικρές σε σύγκριση με τη χαρακτηριστική απόσταση στην οποία το βαρυτικό πεδίο μεταβάλλεται αισθητά.

Γενικεύοντας στη σχετικότητα, μπορούμε να πούμε ότι, ακόμα και με την παρουσία βαρύτητας, είναι δύσκολο να διακρίνουμε *τοπικά* τον καμπύλο χωροχρόνο από τον επίπεδο χώρο Minkowski, ενώ η μαθηματική έκφραση των φυσικών νόμων είναι ίδια με εκείνη που ισχύει στο πλαίσιο της ειδικής σχετικότητας όπου απουσιάζει η βαρύτητα. Έτσι, σε κάθε σημείο του χωροχρόνου (ή, σε μία μικρή γειτονιά ενός τέτοιου σημείου) μπορούμε πάντα να ορίσουμε ένα σύστημα Λορεντζιανών συντεταγμένων που, από φυσική άποψη, αντιστοιχούν σε ένα σύστημα αναφοράς σε ελεύθερη πτώση. Αυτό το φαινομενικά αδρανειακό σύστημα ονομάζεται *τοπικό αδρανειακό σύστημα αναφοράς*. Βέβαια, είναι αδύνατο να ορίσουμε ένα *παγκόσμιο* αδρανειακό σύστημα αναφοράς με *καθολικό* σύστημα συντεταγμένων που να καλύπτει την ολότητα του χωροχρόνου, με εξαίρεση την (αφύσικη) περίπτωση ενός απόλυτα ομογενούς παγκόσμιου βαρυτικού πεδίου.

Ας ανακεφαλαιώσουμε: Με την παρουσία βαρύτητας μπορούμε να ορίσουμε ένα τοπικό αδρανειακό σύστημα αναφοράς σε μία αρκετά μικρή γειτονιά οποιουδήποτε χωροχρονικού σημείου, θεωρώντας ένα σύστημα (π.χ., ένα εργαστήριο) σε ελεύθερη πτώση. Μέσα σε ένα τέτοιο σύστημα αναφοράς οι μη-βαρυτικοί νόμοι της Φυσικής έχουν τη μορφή που ισχύει στην SR (ή στην κλασική Φυσική, στο μη-σχετικιστικό όριο). Αυτό αντανακλά το γεγονός ότι ο χωροχρόνος είναι *τοπικά επίπεδος*, παρόλο που σε μεγαλύτερη κλίμακα εμφανίζεται καμπύλος εξαιτίας της βαρύτητας, τα αποτελέσματα της οποίας μπορούν μόνο να εξαλειφθούν τοπικά (σε μία μικρή περιοχή του χωροχρόνου όπου το βαρυτικό πεδίο είναι δυνατό να θεωρηθεί σχεδόν σταθερό στον χώρο και τον χρόνο).

7. Τελικές παρατηρήσεις

Ένα (γενικά μη-ομογενές) βαρυτικό πεδίο προσθέτει μία γεωμετρική δομή στον επίπεδο χωροχρόνο της SR, προσδίδοντάς του *καμπυλότητα*. Ο χωροχρόνος της GR είναι έτσι ένας γνήσιος χώρος Riemann [8] του οποίου τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά εξαρτώνται από την κατανομή της μάζας και της ενέργειας στον χώρο και τον χρόνο.

Δοθέντος ότι *παγκόσμιες* Λορεντζιανές συντεταγμένες με καθολικά σταθερή μετρική $\eta_{\mu\nu}$ δεν είναι δυνατό να οριστούν σε καμπύλο χωροχρόνο, στην GR θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε γενικές χωροχρονικές συντεταγμένες $\bar{x}^\mu$ καθώς και μία αντίστοιχη μη-σταθερή μετρική $g_{\mu\nu}(\bar{x}^\lambda)$ που είναι αδύνατο να αναχθεί *παντού* στη μορφή $\eta_{\mu\nu}$ με οποιονδήποτε μετασχηματισμό συντεταγμένων, παρά μόνο σε συγκεκριμένο χωροχρονικό σημείο (ή, στην καλύτερη περίπτωση, σε μία μικρή γειτονιά ενός τέτοιου σημείου).

Επί πλέον, οι γραμμικοί μετασχηματισμοί Lorentz της SR, οι οποίοι συνδέουν μεταξύ τους διαφορετικά Λορεντζιανά συστήματα συντεταγμένων που αντιστοιχούν σε γνήσια αδρανειακά συστήματα αναφοράς, θα πρέπει να αντικατασταθούν με γενικούς, *μη-γραμμικούς* μετασχηματισμούς των $\bar{x}^\mu$. Κατά συνέπεια, το αναλλοίωτο Lorentz των φυσικών νόμων, το οποίο ισχύει στον απαλλαγμένο από βαρύτητα επίπεδο χωροχρόνο της SR, θα πρέπει να γενικευθεί σε *γενικό αναλλοίωτο* κάτω από τους

μη-γραμμικούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων της GR. Για να το επιτύχουμε αυτό, οι εξισώσεις που εκφράζουν φυσικούς νόμους θα πρέπει να ξαναγραφούν σε μορφές συμβατές με την απαίτηση για αυτό το γενικότερο αναλλοίωτο [8].

Η ύπαρξη *τοπικών αδρανειακών συστημάτων αναφοράς*, τα οποία αντιστοιχούν σε τοπικές Λορεντζιανές συντεταγμένες, είναι δείγμα της *τοπικής επιπεδότητας* του καμπύλου χωροχρόνου Riemann. Στην ειδική περίπτωση όπου υπάρχει ένας *καθολικός* μετασχηματισμός από γενικές χωροχρονικές συντεταγμένες με μη-σταθερή μετρική, σε Λορεντζιανές συντεταγμένες με μετρική $\eta_{\mu\nu}$, ο χωροχρόνος είναι επίπεδος και η βαρύτητα είναι απύσα. Οι γενικές συντεταγμένες τότε αντιστοιχούν απλά σε ένα σύστημα αναφοράς που *επιταχύνεται* ως προς τα αδρανειακά συστήματα της SR.

Τέλος, η καμπυλότητα, άρα η γεωμετρία, του χωροχρόνου προσδιορίζεται από την γενική μετρική $g_{\mu\nu}(\bar{x}^\lambda)$ και εξαρτάται από την κατανομή της μάζας και της ενέργειας στον χώρο και τον χρόνο. Η σχέση που συνδέει αυτή την κατανομή με την χωροχρονική γεωμετρία εκφράζεται μαθηματικά με τις *πεδιακές εξισώσεις του Einstein* (βλ., π.χ., [3,8]), οι οποίες αποτελούν σύστημα διαφορικών εξισώσεων για τις συνιστώσες του μετρικού τανυστή $g_{\mu\nu}(\bar{x}^\lambda)$.

Παράρτημα

Α. Γεωμετρία κοσμικών γραμμών

Χάριν απλότητας, θα μελετήσουμε το πρόβλημα στο πλαίσιο της κλασικής Νευτώνειας μηχανικής και της Γαλιλαϊκής σχετικότητας. Έτσι, ο «χωροχρόνος» θα είναι Νευτώνειος, όπου ο χρόνος είναι απόλυτος (ανεξάρτητος του συστήματος αναφοράς). Τα γενικά συμπεράσματά μας, όμως, θα ισχύουν και στην περίπτωση της SR (με αναγκαίες τροποποιήσεις σε ό,τι αφορά τη σχετικότητα του χρόνου).

Πρόταση: Η κοσμική γραμμή ενός ελεύθερου σωματιδίου σε ένα χωροχρονικό διάγραμμα, καθώς και η τροχιά του σωματιδίου στον τρισδιάστατο χώρο, είναι ευθείες γραμμές σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

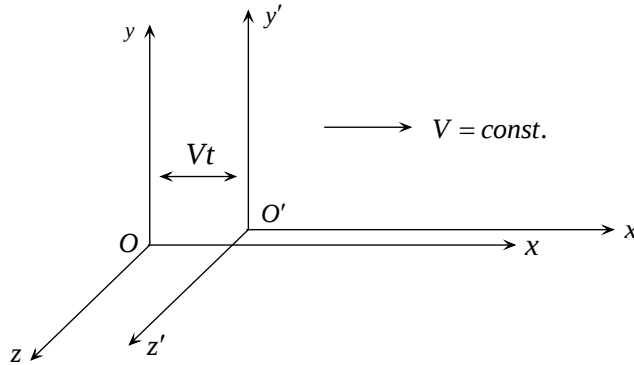
Απόδειξη: Θεωρούμε, χάριν απλότητας, ότι η κίνηση του ελεύθερου σωματιδίου περιορίζεται στο επίπεδο xy ($z=0$). Ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς το σωματίδιο κινείται με σταθερή ταχύτητα. Οι εξισώσεις κίνησης, έτσι, είναι γραμμικές ως προς τον χρόνο, της μορφής

$$x = at + \beta, \quad y = \gamma t + \delta \quad (\text{A.1})$$

με σταθερά a, β . Οι σχέσεις (A.1) περιγράφουν μία ευθεία κοσμική γραμμή σε ένα χωροχρονικό διάγραμμα. Για να βρούμε την εξίσωση της τροχιάς, απαλείφουμε το t μεταξύ των δύο εξισώσεων (A.1). Το αποτέλεσμα είναι

$$y = \kappa x + \lambda \quad \text{όπου} \quad \kappa = \gamma/a, \quad \lambda = \delta - \beta\gamma/a,$$

πράγμα το οποίο περιγράφει μία ευθύγραμμη διαδρομή στο επίπεδο xy .



Σχήμα 1

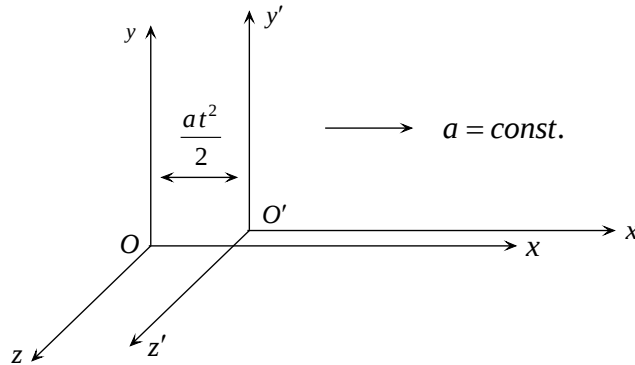
Έστω O η αρχή των συντεταγμένων του αδρανειακού συστήματος αναφοράς μέσα στο οποίο ισχύουν οι εξισώσεις κίνησης (A.1). Θεωρούμε και ένα δεύτερο αδρανειακό σύστημα με αρχή το O' , οι άξονες του οποίου συστήματος είναι παράλληλοι με εκείνους του συστήματος O (Σχήμα 1). Οι άξονες των δύο συστημάτων συμπίπτουν τη χρονική στιγμή $t=0$, ενώ για $t > 0$ το σύστημα O' κινείται με σταθερή ταχύτητα V ως προς το O κατά μήκος του κοινού άξονα x των δύο συστημάτων. Οι μετασχηματισμοί συντεταγμένων που συνδέουν τα δύο συστήματα είναι

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad t' = t \Leftrightarrow x = x' + Vt', \quad y = y', \quad t = t' \quad (\text{A.2})$$

Για να βρούμε τις εξισώσεις κίνησης του ελεύθερου σωματιδίου ως προς το σύστημα O' , αντικαθιστούμε τα x, y και t από τις σχέσεις (A.2) στις σχέσεις (A.1):

$$x' = (\alpha - V)t' + \beta, \quad y' = \gamma t' + \delta,$$

οι οποίες είναι γραμμικές εξισώσεις ως προς t' . Απαλείφοντας το t' μπορούμε να βρούμε την εξίσωση της τροχιάς στο επίπεδο $x'y'$, που είναι και πάλι της μορφής $y' = \kappa x' + \lambda$. Συμπεραίνουμε ότι μία ευθύγραμμη διαδρομή στο σύστημα O μετασχηματίζεται σε ευθύγραμμη διαδρομή στο σύστημα O' , όταν και τα δύο αυτά συστήματα είναι αδρανειακά.



Σχήμα 2

Θεωρούμε τώρα την περίπτωση όπου το σύστημα O' επιταχύνεται στη διεύθυνση του άξονα x ως προς το αδρανειακό σύστημα O , με σταθερή επιτάχυνση a (Σχήμα 2). Υποθέτουμε ότι η αρχική ταχύτητα του O' ως προς το O , τη χρονική στιγμή $t=0$ στην οποία τα O και O' συμπίπτουν, είναι μηδέν. Οι μετασχηματισμοί συντεταγμένων ανάμεσα στα δύο συστήματα είναι

$$x' = x - at^2/2, \quad y' = y, \quad t' = t \Leftrightarrow x = x' + at'^2/2, \quad y = y', \quad t = t' \quad (\text{A.3})$$

Οι εξισώσεις κίνησης του ελεύθερου σωματιδίου ως προς το μη-αδρανειακό σύστημα αναφοράς O' βρίσκονται με αντικατάσταση των x, y και t από τις (A.3) στις (A.1):

$$x' = -at'^2/2 + \alpha t' + \beta, \quad y' = \gamma t' + \delta.$$

Απαλείφοντας το t' μπορούμε να βρούμε την εξίσωση της τροχιάς του ελεύθερου σωματιδίου στο επίπεδο $x'y'$, που είναι εξίσωση παραβολής:

$$x' = \kappa y'^2 + \lambda y' + \mu.$$

Συμπέρασμα: Μία διαδρομή ευθύγραμμη ως προς αδρανειακό σύστημα αναφοράς φαίνεται *καμπυλόγραμμη* σε μη-αδρανειακό σύστημα. Ισοδύναμα, μία ευθύγραμμη διαδρομή ως προς ένα μη-αδρανειακό σύστημα αναφοράς φαίνεται *καμπυλόγραμμη* σε ένα αδρανειακό σύστημα.

Οι παραπάνω παρατηρήσεις βοηθούν στην εξήγηση του φαινομένου της καμπύλωσης του φωτός λόγω της βαρύτητας.

B. Καμπύλωση του φωτός από τη βαρύτητα

Μπορούμε να ερμηνεύσουμε το φαινόμενο με δύο τρόπους.

1. Η εξήγηση των Ellis & Williams [6]:

Σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς μακριά από τη βαρύτητα το φως διαδίδεται ευθύγραμμα. Λόγω της αρχής της ισοδυναμίας, το ίδιο θα πρέπει να ισχύει σε ένα σύστημα αναφοράς που βρίσκεται σε ελεύθερη πτώση μέσα σε πεδίο βαρύτητας. Πράγματι, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, επειδή το φως φέρει ενέργεια θα φέρει και αδράνεια, άρα θα έχει μία δυννητική «βαρυτική μάζα». Το φως έτσι θα επηρεάζεται από τη βαρύτητα με τον ίδιο τρόπο που επηρεάζεται ένα οποιοδήποτε σωματίδιο με μάζα. Τώρα, όπως είδαμε στην Παρ. 6, κάθε φυσική ποσότητα (ακόμα και το ίδιο το φως) που υπόκειται μόνο στην επίδραση της βαρύτητας φαίνεται να ακολουθεί ευθύγραμμη πορεία μέσα σε εργαστήριο που βρίσκεται σε ελεύθερη πτώση.

Από την άλλη μεριά, μία διαδρομή που μοιάζει ευθύγραμμη στο εργαστήριο που είναι σε πτώση θα φαίνεται καμπυλόγραμμη σε έναν αδρανειακό παρατηρητή που βρίσκεται μέσα σε βαρυτικό πεδίο (δηλαδή, κάποιον που μένει ακίνητος αντί να είναι σε ελεύθερη πτώση). Έτσι, ο ακίνητος παρατηρητής (π.χ., κάποιος πάνω στην επιφάνεια της Γης) θα συμπεράνει ότι το πεδίο βαρύτητας προκαλεί καμπύλωση της πορείας του φωτός.

2. Η εξήγηση του Susskind [9]:

Όπως προαναφέραμε, το φως διαδίδεται ευθύγραμμα σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς μακριά από τη βαρύτητα. Όμως, η πορεία του φωτός θα φαίνεται καμπυλόγραμμη σε ένα επιταχυνόμενο σύστημα. Από την άλλη μεριά, ένα επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς έξω από τη βαρύτητα είναι τοπικά ισοδύναμο με αδρανειακό σύστημα τοποθετημένο μέσα σε βαρυτικό πεδίο (βλ. Παρ. 3). Συνεπώς, ο παρατηρητής στο αδρανειακό σύστημα θα συμπεράνει ότι το βαρυτικό πεδίο καμπυλώνει τη διαδρομή του φωτός.

Αναφορές

1. C. J. Papachristou, *Aspects of Relativity in Flat Spacetime* (Springer, 2026).³
2. E. Schrödinger, *Space-Time Structure* (Cambridge University Press, 1950).
3. A. Papapetrou, *Lectures on General Relativity* (D. Reidel, 1974).
4. R. d’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity* (Oxford University Press, 1992).
5. R. Hakim, *An Introduction to Relativistic Gravitation* (Cambridge, 1999).
6. G. F. R. Ellis, R. M. Williams, *Flat and Curved Space-Times*, 2nd Edition (Oxford, 2000).
7. W. Rindler, *Relativity: Special, General and Cosmological* (Oxford University Press, 2001).
8. H. C. Ohanian, R. Ruffini, *Gravitation and Spacetime*, 3rd Edition (Cambridge University Press, 2013).
9. L. Susskind, A. Cabannes, *General Relativity* (Penguin Books, 2024).

³ <https://arxiv.org/abs/2603.04574>