

Το «παράδοξο των διδύμων» στη Σχετικότητα¹

Κώστας Παπαχρήστου

Σχολή Ναυτικών Δοκίμων

Αποδεικνύεται ότι, από όλες τις δυνατές κινήσεις στον χωροχρόνο, οι αδρανειακές κινήσεις είναι αυτές που χαρακτηρίζονται από μέγιστο ίδιο χρόνο. Με βάση αυτή την παρατήρηση μπορούμε να επιλύσουμε το λεγόμενο «παράδοξο των διδύμων» στη Σχετικότητα.

1. Εισαγωγή

Το «παράδοξο των διδύμων» αποτελεί τυπικό παράδειγμα σε πανεπιστημιακά συγγράμματα Ειδικής Σχετικότητας (σχετικότητας σε επίπεδο χωροχρόνο [1-4]). Είναι ίσως η πιο εντυπωσιακή περίπτωση ασυμμετρίας ανάμεσα στα αδρανειακά και τα μη-αδρανειακά συστήματα αναφοράς.

Η ιστορία είναι γνωστή: Ο αδελφός μένει σπίτι, ενώ η δίδυμη αδελφή του κάνει ένα ταξίδι μετ' επιστροφής με πολύ υψηλές ταχύτητες. Όταν η αδελφή επιστρέφει στο σπίτι, διαπιστώνει ότι ο αδελφός της έχει μεγαλώσει ηλικιακά περισσότερο από εκείνη. Ο αδελφός μπορεί να καταλάβει τον λόγο για τον οποίο συνέβη αυτό: όσο εκείνη βρισκόταν σε κίνηση ως προς αυτόν, το ρολόι της δούλευε πιο αργά σε σχέση με το δικό του. Όμως, από τη σκοπιά της αδελφής του, ήταν *εκείνος* που κινούνταν ως προς αυτήν. Δεν είναι, λοιπόν, εκείνη που θα έπρεπε να είχε μεγαλώσει περισσότερο;

Το κλειδί για να επιλύσουμε το παράδοξο είναι να λάβουμε υπόψη ότι η συμμετρία (αμοιβαιότητα) στο φαινόμενο της διαστολής του χρόνου ισχύει μόνο μεταξύ *αδρανειακών* παρατηρητών. Και, ενώ ο αδελφός *είναι* ένας τέτοιος παρατηρητής, η αδελφή του *δεν* είναι, αφού υπέστη διάφορες επιταχύνσεις προκειμένου να εκτελέσει ταξίδι μετ' επιστροφής. Έτσι, ο αδελφός είναι ο μόνος που είναι σε θέση να αναλύσει με σωστό τρόπο το φαινόμενο.

Η λύση του παραδόξου των διδύμων εμπλέκει την έννοια του *ιδίου χρόνου*, μιας φυσικής ποσότητας που μένει αμετάβλητη κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz (είναι *Λορεντζιανά αμετάβλητη*) και αντιπροσωπεύει τον χρόνο που μετρά ένα ρολόι κατά μήκος της ίδιας του της *κοσμικής γραμμής* (χωροχρονικής τροχιάς). Όπως θα δείξουμε, ανάμεσα σε όλες τις δυνατές τροχιές που συνδέουν δύο δοσμένα σημεία (γεγονότα) στον χωροχρόνο, οι αδρανειακές κινήσεις είναι εκείνες που έχουν μέγιστο ίδιο χρόνο. Είναι έτσι το ρολόι του *ακίνητου* αδελφού εκείνο που θα δείξει το μακρύτερο χρονικό διάστημα.

2. Ίδιος χρόνος και διαστολή του χρόνου

Θεωρούμε έναν τετραδιάστατο επίπεδο χωροχρόνο. Καλούμε $x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, x, y, z)$ τις χωροχρονικές συντεταγμένες στο σύστημα αναφοράς S ενός αδρανειακού παρατηρητή (όπου c η ταχύτητα του φωτός στο κενό), και έστω $x'^\mu \equiv (ct', x', y', z')$ οι συντεταγμένες στο σύστημα S' κάποιου άλλου αδρανειακού παρατηρητή (θυμίζουμε ότι η ταχύτητα του φωτός είναι ανεξάρτητη του συστήματος αναφοράς). Σύμφωνα με την Ειδική Σχετικότητα [5] τα δύο συστήματα χωροχρονικών συντεταγμένων συνδέονται μεταξύ τους με γραμμικό *μετασχηματισμό Lorentz*, της μορφής

¹ Μετάφραση από το <https://arxiv.org/abs/2603.04574> (Παράρτημα 1).

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad (1)$$

(χρησιμοποιούμε τη γνωστή αθροιστική σύμβαση για επαναλαμβανόμενους πάνω και κάτω δείκτες) όπου ο σταθερός (4×4) πίνακας $\Lambda \equiv [\Lambda^{\mu}_{\nu}]$ ($\mu, \nu=0,1,2,3$) ικανοποιεί την εξίσωση

$$\Lambda^t g \Lambda = g \Leftrightarrow \Lambda^{\mu}_{\lambda} g_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}_{\rho} = g_{\lambda\rho} \quad (2)$$

για

$$g \equiv [g_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \quad (3)$$

Επί πλέον, ο πίνακας Λ υπόκειται στους περιορισμούς

$$\det \Lambda = +1, \quad \Lambda^0_0 \geq 1 \quad (4)$$

Σε όρους θεωρίας ομάδων, ο Λ ανήκει στην *περιορισμένη ομάδα Lorentz* $SO(3,1)^{\uparrow}$.

Διαφορίζοντας την (1) παίρνουμε τον απειροστό μετασχηματισμό Lorentz

$$dx^{\mu'} = \Lambda^{\mu}_{\nu} dx^{\nu} \quad (5)$$

(για σταθερά Λ^{μ}_{ν}). Ορίζουμε το *απειροστό χωροχρονικό διάστημα*

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \\ &= c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \end{aligned} \quad (6)$$

Όπως αποδεικνύεται, το ds^2 είναι Λορεντζιανά αμετάβλητο, δηλαδή, είναι ποσότητα αμετάβλητη κάτω από τον μετασχηματισμό (1). Αυτό σημαίνει ότι

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = g_{\mu\nu} dx^{\mu'} dx^{\nu'} \quad (7)$$

και, αναλυτικά,

$$c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 (dt')^2 - (dx')^2 - (dy')^2 - (dz')^2.$$

Προσέξτε ότι το ds^2 μπορεί να είναι θετικό, αρνητικό ή μηδέν. Ειδικά, η Λορεντζιανή αμεταβλητότητα της σχέσης $ds^2 = 0$, για μία στοιχειώδη μετατόπιση κατά μήκος της κοσμικής γραμμής (χωροχρονικής τροχιάς) μιας φωτεινής ακτίνας, ισοδυναμεί με την αμεταβλητότητα της ταχύτητας c του φωτός όταν περνάμε από ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς σε ένα άλλο.

Αν $ds^2 > 0$ (*χρονοειδές χωροχρονικό διάστημα*) τότε το $ds = (ds^2)^{1/2}$ μπορεί να παριστά στοιχείο χωροχρονικής απόστασης κατά μήκος της κοσμικής γραμμής ενός σωματιδίου με μάζα, σύμφωνα με έναν αδρανειακό παρατηρητή που χρησιμοποιεί σύστημα αναφοράς S με συντεταγμένες x^{μ} ή (x, y, z, t) . Η κοσμική γραμμή δεν είναι απαραίτητο να είναι ευθεία, πράγμα που σημαίνει ότι το σωματίδιο είναι δυνατό να

εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση ως προς το σύστημα S . Ορίζουμε την Λορεντζιανά αμετάβλητη ποσότητα $d\tau$ [ίδιος χρόνος (proper-time interval)] με τη σχέση

$$d\tau = ds/c \Leftrightarrow ds = c d\tau \quad (8)$$

Ο ίδιος χρόνος παριστά τον χρόνο που μετρά ένα ρολόι που κινείται μαζί με το σωματίδιο (άρα κινείται κατά μήκος της κοσμικής γραμμής του σωματιδίου, ενώ είναι ακίνητο ως προς το σωματίδιο). Ας το εξηγήσουμε:

Σύμφωνα με το σύστημα S , η κοινή ταχύτητα του σωματιδίου και του ρολογιού που κινείται μαζί με αυτό είναι, κατά μέτρο,

$$u = dl/dt = (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{1/2}/dt$$

όπου dl το μήκος μίας στοιχειώδους μετατόπισης κατά μήκος της χωρικής τροχιάς του σωματιδίου. Από τη σχέση (6) έχουμε ότι $ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2$. Λαμβάνοντας υπόψη ότι $dl = u dt$, γράφουμε:

$$ds^2 = (c^2 - u^2) dt^2 \Rightarrow ds = (c^2 - u^2)^{1/2} dt.$$

Από την (8) τότε έχουμε:

$$d\tau = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2} dt \Leftrightarrow dt = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} d\tau \equiv \gamma(u) d\tau \quad (9)$$

όπου $\gamma(u) = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$.

Η σχέση (9) ισχύει για ένα σύστημα αναφοράς S ως προς το οποίο το σωματίδιο και το σχετικό ρολόι κινούνται με ταχύτητα u . Επειδή το $d\tau$ είναι Λορεντζιανά αμετάβλητο, η τιμή του είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του συστήματος S . Θεωρούμε τώρα ένα τοπικό αδρανειακό σύστημα S' ως προς το οποίο το σωματίδιο και το ρολόι είναι στιγμιαία ακίνητα (προφανώς, χρειάζεται ένας άπειρος αριθμός τέτοιων συστημάτων, ένα για κάθε στιγμιαία θέση του ρολογιού). Τότε, $u' = 0$, $\gamma(u') = 1$, και από την (9) έχουμε ότι $dt' = \gamma(u') d\tau = d\tau$. Συμπέρασμα:

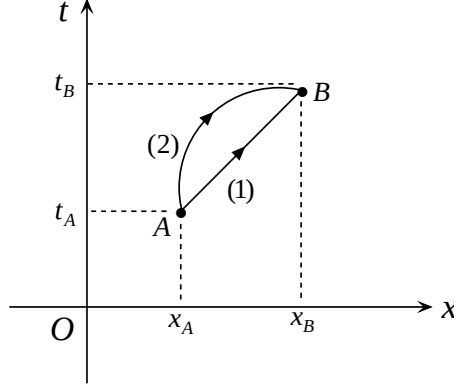
Στο σύστημα αναφοράς του σωματιδίου, και άρα του ρολογιού που κινείται μαζί με το σωματίδιο, ο ίδιος χρόνος $d\tau$ είναι το χρονικό διάστημα που μετράει αυτό ειδικά το ρολόι. Έτσι, ίδιος χρόνος είναι ο χρόνος που μετράται κατά μήκος της χωροχρονικής τροχιάς (κοσμικής γραμμής) του ίδιου του σωματιδίου.

Για κάθε άλλο σύστημα αναφοράς S , ως προς το οποίο $u \neq 0$, ισχύει ότι $\gamma(u) > 1$ και άρα $dt > d\tau$, έτσι ώστε $dt > dt'$. Αυτό εκφράζει το γνωστό σχετικιστικό φαινόμενο της διαστολής του χρόνου.

Προσέξτε ιδιαίτερα ότι, ενώ το χρονικό διάστημα dt εξαρτάται από την επιλογή του συστήματος αναφοράς S , ο ίδιος χρόνος $d\tau$ είναι, από τον ίδιο τον ορισμό του [σχέση (8)], μία ποσότητα ανεξάρτητη του συστήματος αναφοράς! Επίσης, το $d\tau$ παριστά καθαρά χρονικό διάστημα μόνο στο σύστημα αναφοράς (σύστημα ηρεμίας) του ίδιου του σωματιδίου, ενώ είναι χωροχρονικό διάστημα σε οποιοδήποτε άλλο σύστημα ως προς το οποίο το σωματίδιο βρίσκεται σε κίνηση.

3. Χρονική μέτρηση κατά μήκος κοσμικών γραμμών και μέγιστος ίδιος χρόνος

Για να απλουστεύσουμε την ανάλυσή μας, θεωρούμε χωροχρόνο δύο διαστάσεων και αδρανειακό παρατηρητή που χρησιμοποιεί σύστημα αναφοράς S με χωροχρονικές συντεταγμένες (x, t) (υποθέτουμε έτσι ότι $y=z=0$). Ο παρατηρητής παρατηρεί δύο ρολόγια, (1) και (2), τα οποία κινούνται κατά μήκος του άξονα x του συστήματός του, και σχεδιάζει τις κοσμικές γραμμές τους όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1

Τα ρολόγια αρχίζουν να κινούνται την ίδια χρονική στιγμή t_A από το ίδιο σημείο x_A του άξονα x , και συναντούνται και πάλι τη χρονική στιγμή t_B στο σημείο x_B . Έτσι, οι κοσμικές γραμμές και των δύο ρολογιών συνδέουν το χωροχρονικό σημείο (γεγονός) A με το χωροχρονικό σημείο B . Το ρολόι (1) κινείται *αδρανειακά*, αφού η κοσμική γραμμή του είναι ευθεία, ενώ η κίνηση του ρολογιού (2) είναι *επιταχυνόμενη*, όπως φανερώνει η καμπύλη μορφή της αντίστοιχης κοσμικής γραμμής. Σε ό,τι αφορά την καμπύλη κοσμική γραμμή (2), μπορούμε να φανταστούμε ότι την χωρίζουμε σε ένα άπειρο πλήθος απειροστών ευθύγραμμων τμημάτων, κατά μήκος καθενός εκ των οποίων η κίνηση του ρολογιού μπορεί να θεωρείται αδρανειακή. Κάθε απειροστό τμήμα της καμπύλης σχετίζεται με ένα *τοπικό* αδρανειακό σύστημα αναφοράς, ως προς το οποίο το ρολόι είναι *στιγμιαία* ακίνητο.

Δοθέντος ότι οι κοσμικές γραμμές (1) και (2) περιγράφουν πραγματικές κινήσεις με ταχύτητες μικρότερες από την ταχύτητα c του φωτός, όλα τα στοιχειώδη χωροχρονικά διαστήματα κατά μήκος αυτών των γραμμών θα πρέπει να είναι *χρονοειδή* [5]:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 > 0 \Rightarrow ds = (ds^2)^{1/2} \in R.$$

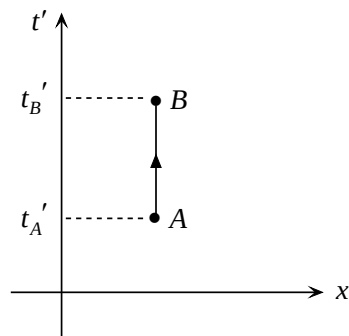
Επί πλέον, $ds = c dt \Rightarrow dt = ds/c$, όπου dt ο ίδιος χρόνος του θεωρούμενου τμήματος της κοσμικής γραμμής, ίσος με τον χρόνο που μετρά ένα τοπικό αδρανειακό σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο το αντίστοιχο ρολόι είναι στιγμιαία ακίνητο. Άρα, το *χρονικό* διάστημα dt που μετράται στο σύστημα αναφοράς αυτού του ρολογιού θα είναι ίσο με το *χωροχρονικό* διάστημα ds/c που μετράται στο σύστημα S του παρατηρητή ως προς τον οποίο τα δύο ρολόγια βρίσκονται σε κίνηση.

Σύμφωνα με το καθένα από τα δύο ρολόγια, ο συνολικός χρόνος που μεσολαβεί ανάμεσα στα γεγονότα A και B δίνεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\tau = \int_A^B d\tau = (1/c) \int_A^B ds = (1/c) \int_A^B (c^2 dt^2 - dx^2)^{1/2} \quad (10)$$

(το οποίο είναι Λορεντζιανά αμετάβλητη ποσότητα, αφού το dt είναι ανεξάρτητο του συστήματος αναφοράς). Βέβαια, η τιμή του ολοκληρώματος (10) εξαρτάται από την χωροχρονική διαδρομή από το A στο B και θα είναι διαφορετική για τις κοσμικές γραμμές (1) και (2). Όπως μπορεί να αποδειχθεί (βλ. Παράρτημα), ανάμεσα σε όλες τις δυνατές (χρονοειδείς) κοσμικές γραμμές που συνδέουν τα A και B , η μοναδική ευθύγραμμη διαδρομή (1) που περιγράφει την *αδρανειακή* κίνηση του σχετιζόμενου ρολογιού αντιστοιχεί σε *μέγιστο* ίδιο χρόνο τ . Συνεπώς, το αδρανειακό ρολόι (1) θα μετρήσει τον *μεγαλύτερο* χρόνο.

Τώρα, σύμφωνα με τον παρατηρητή που χρησιμοποιεί το σύστημα S με συντεταγμένες (x, t) , η χρονική απόσταση ανάμεσα στα γεγονότα A και B είναι $\Delta t = t_B - t_A$. Λόγω του φαινομένου της διαστολής του χρόνου, αυτό το χρονικό διάστημα φαίνεται *μεγαλύτερο* από τον ίδιο χρόνο τ που μετρά το αδρανειακό ρολόι (1): $\Delta t > \tau$.



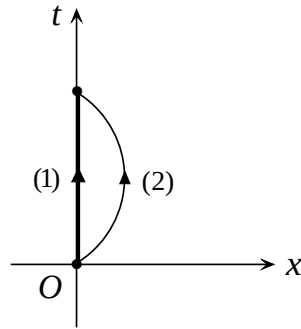
Σχήμα 2

Ένα ειδικό αδρανειακό σύστημα αναφοράς είναι το σύστημα αναφοράς του ίδιου του ρολογιού (1). Έστω S' το σύστημα αυτό, με χωροχρονικές συντεταγμένες (x', t') (βλ. Σχήμα 2). Δοθέντος ότι το ρολόι είναι στάσιμο στο S' , η κοσμική γραμμή του σε αυτό το σύστημα θα αντιστοιχεί σε $x' = \text{σταθερό}$ (π.χ., $x' = 0$). Σε αυτή την περίπτωση, ο ίδιος χρόνος τ που μετρά το ρολόι *ισούται* με τη χρονική διαφορά $\Delta t' = t'_B - t'_A$. Δηλαδή, $\Delta t' = \tau$. Ισχύει βέβαια πάντοτε ότι $\Delta t' < \Delta t$, όπου Δt το χρονικό διάστημα ως προς το σύστημα αναφοράς που παρίσταται στο Σχήμα 1.

4. Το παράδοξο των διδύμων

Ερχόμαστε τώρα στο «παράδοξο»: Ο John και η Mary είναι δίδυμα αδέλφια. Ενώ ο John μένει σπίτι, η αδελφή του κάνει ένα ταξίδι μετ' επιστροφής, κινούμενη με πολύ μεγάλες ταχύτητες (!). Όταν η Mary επιστρέφει στο σπίτι, ανακαλύπτει ότι ο John έχει μεγαλώσει ηλικιακά περισσότερο απ' όσο εκείνη.

Προσέξτε ότι ο John και η Mary *δεν είναι ισοδύναμοι παρατηρητές*, δεδομένου ότι ο John είναι *αδρανειακός* παρατηρητής ενώ η Mary *δεν είναι* (λόγω των διάφορων επιταχύνσεων που θα έπρεπε να υποστεί σε ένα ταξίδι μετ' επιστροφής). Έτσι, η κοσμική γραμμή του John σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς θα είναι ευθεία, ενώ εκείνη της Mary θα είναι καμπυλόγραμμη. Για να απλουστεύσουμε τα πράγματα, επιλέγουμε αυτό το αδρανειακό σύστημα να είναι το σύστημα ηρεμίας του ίδιου του John, με συντεταγμένες (x, y, z, t) , και υποθέτουμε ότι το ταξίδι της Mary γίνεται κατά μήκος του άξονα x . Άρα, στην ουσία, έχουμε να κάνουμε με χωροχρόνο δύο διαστάσεων με συντεταγμένες (x, t) . Καλούμε (1) και (2) τις κοσμικές γραμμές του John και της Mary, αντίστοιχα (βλ. Σχήμα 3).



Σχήμα 3

Έστω τ_1 και τ_2 οι ίδιοι χρόνοι κατά μήκος των κοσμικών γραμμών (1) και (2), ίσοι με τα χρονικά διαστήματα που μετρούν τα ρολόγια του John και της Mary, αντίστοιχα, κατά τη διάρκεια του ταξιδιού της Mary. Σύμφωνα με τη συζήτηση στην Παρ. 3, ο μεγαλύτερος ίδιος χρόνος αντιστοιχεί στο ρολόι που εκτελεί *αδρανειακή* κίνηση, το οποίο στην προκειμένη περίπτωση είναι το στάσιμο ρολόι του John. Άρα $\tau_1 > \tau_2$, πράγμα που σημαίνει ότι ο John θα καταγράψει μεγαλύτερο χρονικό διάστημα. Έτσι, ο John θα είναι μεγαλύτερος από την Mary όταν εκείνη επιστρέψει στο σπίτι.

Θα μπορούσε τώρα κάποιος να πει ότι, από την οπτική γωνία της Mary, ήταν ο John εκείνος που εκτέλεσε ταξίδι μετ' επιστροφής, ενώ εκείνη έμεινε στάσιμη. Γιατί τότε δεν ήταν *εκείνη* που μεγάλωσε περισσότερο κατά τη διάρκεια του «ταξιδιού του»;

Η απάντηση είναι ότι η προηγούμενη ανάλυση ισχύει μόνο σε σχέση με ένα *αδρανειακό* σύστημα αναφοράς, όπως αυτό του John. Μία ανάλογη ανάλυση του φαινομένου από το σύστημα ηρεμίας της Mary δεν θα ήταν σωστή, δοθέντος ότι η Mary δεν είναι αδρανειακός παρατηρητής. Έτσι, το «συμπέρασμά» της ότι θα έπρεπε να είναι εκείνη η μεγαλύτερη θα ήταν απλά λανθασμένο! (Βλ. [2] για μία αναλυτικότερη συζήτηση.)

Παράρτημα

Θεωρούμε επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της μορφής

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} f[x(t), x'(t), t] dt \quad (\text{A.1})$$

όπου f δοσμένη συνάρτηση των μεταβλητών που υποδεικνύονται (με $x' = dx/dt$) και όπου $x(t)$ μία καμπύλη που ενώνει δύο σημεία (x_1, t_1) και (x_2, t_2) στο επίπεδο (x, t) . Έτσι,

$$x(t_1) = x_1, \quad x(t_2) = x_2 \quad (\text{A.2})$$

Ζητούμε καμπύλη $x(t)$ τέτοια ώστε η τιμή του ολοκληρώματος Q να είναι ένα *ακρότατο* (το οποίο μπορεί να είναι μέγιστο ή ελάχιστο). Όπως αποδεικνύεται (βλ., π.χ., [6]) η ειδική αυτή συνάρτηση $x(t)$ ικανοποιεί την διαφορική *εξίσωση Euler-Lagrange*

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial x'} = 0 \quad (\text{A.3})$$

με αρχική συνθήκη την (A.2).

Ας πάμε πίσω στο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (10), το οποίο εκφράζει τον ίδιο χρόνο κατά μήκος της κοσμικής γραμμής ενός σωματιδίου ή ενός ρολογιού σε χωρο-χρονο δύο διαστάσεων:

$$\tau = (1/c) \int_A^B (c^2 dt^2 - dx^2)^{1/2}$$

όπου $c^2 dt^2 - dx^2 > 0$ (χρονοειδές διάστημα) και όπου τα A και B είναι σταθερά χωροχρονικά σημεία (γεγονότα). Έχουμε:

$$(c^2 dt^2 - dx^2)^{1/2} = (c^2 - x'^2)^{1/2} dt.$$

Έτσι,

$$\tau = (1/c) \int_{t_A}^{t_B} (c^2 - x'^2)^{1/2} dt \quad (\text{A.4})$$

Ζητούμε την χωροχρονική καμπύλη $x(t)$ για την οποία το ολοκλήρωμα στην (A.4) αποκτά ακρότατη τιμή. Προς τον σκοπό αυτό, καλούμε

$$(c^2 - x'^2)^{1/2} \equiv f(x, x', t)$$

και απαιτούμε να ικανοποιείται η διαφορική εξίσωση (A.3). Επειδή

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x'} = - \frac{x'}{(c^2 - x'^2)^{1/2}},$$

από την (A.3) έχουμε ότι

$$\frac{x'}{(c^2 - x'^2)^{1/2}} = \text{σταθ.} \Rightarrow x'^2 = \text{σταθ.} (c^2 - x'^2) \Rightarrow x'^2 = \text{σταθ.}$$

και άρα $x'(t) = \text{σταθ.}$ Δηλαδή, η $x(t)$ είναι γραμμική συνάρτηση: $x(t) = \kappa t + \lambda$.

Γεωμετρικά, η συνάρτηση αυτή εκφράζει μία *ευθεία* κοσμική γραμμή στο επίπεδο (x, t) και αντιστοιχεί σε *αδρανειακή* κίνηση από το A στο B . Αυτή η κίνηση, έτσι, αντιστοιχεί σε ένα *ακρότατο* του ολοκληρώματος στη σχέση (A.4), άρα ένα ακρότατο του ίδιου χρόνου τ που μετρά ένα ρολόι κινούμενο από το A στο B . Όμως, είναι αυτό το ακρότατο ένα μέγιστο ή ένα ελάχιστο;

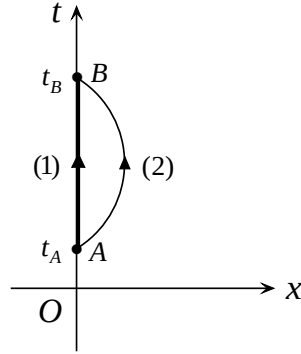
Παρατηρούμε καταρχάς ότι, από φυσική άποψη, το μέγεθος x' αντιπροσωπεύει την ταχύτητα ενός (γενικά επιταχυνόμενου) ρολογιού που κινείται κατά μήκος μιας (γενικά καμπυλόγραμμης) κοσμικής γραμμής από το A στο B , σε αδρανειακό σύστημα S με χωροχρονικές συντεταγμένες (x, t) : $x' = dx/dt = u$. Η σχέση (A.4), έτσι, μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\tau = (1/c) \int_{t_A}^{t_B} (c^2 - u^2)^{1/2} dt .$$

Έχουμε: $(c^2 - u^2)^{1/2} = c(1 - u^2/c^2)^{1/2} = c\gamma(u)^{-1}$, όπου $\gamma(u) = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$. Άρα,

$$\tau = \int_{t_A}^{t_B} \gamma(u)^{-1} dt \quad (\text{A.5})$$

Ας υποθέσουμε ότι το αδρανειακό σύστημα S είναι το σύστημα αναφοράς του αδρανειακού παρατηρητή του οποίου η κοσμική γραμμή από το A στο B είναι ευθεία (αυτή η επιλογή συστήματος αναφοράς δεν θα επηρεάσει την τιμή τού τ , δοθέντος ότι το μέγεθος αυτό είναι Λορεντζιανά αναλλοίωτο). Ως προς το ίδιο του το σύστημα S , ο παρατηρητής (και το ρολόι του) είναι ακίνητος, έτσι ώστε $u=0$ και $\gamma(u)=1$. Η σχέση (A.5) τότε δίνει: $\tau_1 = t_B - t_A$ (βλ. Σχήμα 4).



Σχήμα 4

Κάθε άλλη κοσμική γραμμή που συνδέει τα A και B θα είναι αναγκαία καμπυλόγραμμη και θα αντιπροσωπεύει ένα ρολόι σε επιταχυνόμενη κίνηση. Σε αυτή την περίπτωση θα έχουμε ότι $u \neq 0$ και $\gamma(u)^{-1} < 1$. Το ολοκλήρωμα στη σχέση (A.5) θα δώσει τότε μία τιμή $\tau_2 < t_B - t_A$.

Συμπέρασμα: Η ευθύγραμμη κοσμική γραμμή του αδρανειακού παρατηρητή αντιστοιχεί σε *μέγιστο* ίδιο χρόνο, ίσο με τον πραγματικό χρόνο που μετρά το ρολόι του συγκεκριμένου παρατηρητή. Αυτός ο παρατηρητής, συνεπώς, θα μετρήσει το *μεγαλύτερο* χρονικό διάστημα ανάμεσα στα γεγονότα A και B .

Αναφορές

1. W. Rindler, *Relativity: Special, General and Cosmological* (Oxford University Press, 2001).
2. G. F. R. Ellis, R. M. Williams, *Flat and Curved Space-Times*, 2nd Edition (Oxford, 2000).
3. R. d’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity* (Oxford University Press, 1992).
4. D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 4th Edition (Pearson, 2013).
5. C. J. Papachristou, *Aspects of Relativity in Flat Spacetime* (Springer, 2026).²
6. H. Goldstein, *Classical Mechanics*, 2nd Edition (Addison-Wesley, 1980).

² <https://arxiv.org/abs/2603.04574>