Μετάφραση από: Advanced Electromagnetics, Vol 4, No 1 (2015), pages 10-15

http://www.aemjournal.org/index.php/AEM/article/view/257/pdf_44

Παριστά η ηλεκτρεγερτική δύναμη (πάντοτε) έργο;

Κ. Ι. Παπαχρήστου[1], Α. Ν. Μαγουλάς[2]

[1]Τομέας Φυσικών Επιστημών, Σχολή Ναυτικών Δοκίμων
E-mail: papachristou@snd.edu.gr

[2]Τομέας Ηλεκτροτεχνίας & Ηλεκτρονικών Υπολογιστών, Σχολή Ναυτικών Δοκίμων
E-mail: aris@snd.edu.gr

Περίληψη

Στη βιβλιογραφία του Ηλεκτρομαγνητισμού, η ηλεκτρεγερτική δύναμη ενός «κυκλώματος» ορίζεται συχνά σαν έργο ανά μονάδα φορτίου για μια πλήρη διαδρομή κατά μήκος του κυκλώματος. Στο παρόν άρθρο εξηγούμε γιατί αυτός ο ορισμός δεν μπορεί να θεωρηθεί ως γενικά σωστός, αν και αληθεύει σε μερικές απλές ειδικές περιπτώσεις. Τα παραπάνω καταδεικνύονται με τη βοήθεια κατάλληλα επιλεγμένων παραδειγμάτων.

1. Εισαγωγή

Σε ένα πρόσφατο άρθρο [1] προτείναμε μια παιδαγωγική προσέγγιση στην *ηλεκτρεγερτική δύναμη* (ΗΕΔ) ενός «κυκλώματος», η οποία αποτελεί μια θεμελιώδη έννοια του Ηλεκτρομαγνητισμού. Αντί να ορίσει την ΗΕΔ με έναν ειδικό τρόπο, ξεχωριστά για κάθε ηλεκτροδυναμικό σύστημα, η προσέγγιση αυτή ξεκινά με τον πλέον γενικό ορισμό της ΗΕΔ και στη συνέχεια εξειδικεύεται για διάφορες περιπτώσεις φυσικού ενδιαφέροντος, έτσι ώστε να δώσει τις γνώριμες εκφράσεις για την ΗΕΔ.

Ανάμεσα στα παραδείγματα που εξετάστηκαν στο άρθρο [1], η περίπτωση ενός απλού κυκλώματος αποτελούμενου από μπαταρία και αντίσταση ήταν ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα, αφού η τιμή τής ΗΕΔ αποδείχθηκε πως είναι ίση με αυτήν του έργου, ανά μονάδα φορτίου, που προσφέρει η πηγή (μπαταρία) για μια πλήρη περιφορά του φορτίου κατά μήκος του κυκλώματος. Τώρα, στη βιβλιογραφία του Ηλεκτρομαγνητισμού, η ΗΕΔ συχνά *ορίζεται* σαν έργο ανά μονάδα φορτίου. Όπως εξηγούμε σε αυτό το άρθρο, τούτο δεν είναι γενικά αληθές, με εξαίρεση κάποιες ειδικές περιπτώσεις όπως αυτή που προαναφέρθηκε.

Στην Παράγραφο 2 δίνουμε τον γενικό ορισμό της ΗΕΔ $\mathcal{E}$ και, χωριστά, τον ορισμό του έργου w ανά μονάδα φορτίου, το οποίο (έργο) προσφέρεται από τους παράγοντες που είναι υπεύθυνοι για τη δημιουργία και τη διατήρηση ηλεκτρικού ρεύματος στο κύκλωμα. Στη συνέχεια διατυπώνουμε τις αναγκαίες συνθήκες ώστε να ισχύει η ισότητα $\mathcal{E}=w$. Τονίζουμε ότι, με τον τρόπο που ορίζονται, τα $\mathcal{E}$ και w αποτελούν *διαφορετικές* έννοιες. Έτσι, η εξίσωση $\mathcal{E}=w$ θα πρέπει να ερμηνεύεται ως πιθανή ισότητα *τιμών* ανάμεσα σε δύο φυσικά μεγέθη, όχι ως εννοιολογική ταύτιση αυτών των μεγεθών!

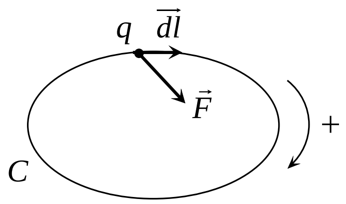
Στην Παρ. 3 γίνεται ανασκόπηση της περίπτωσης ενός κυκλώματος αποτελούμενου από μπαταρία συνδεδεμένη με μεταλλικό σύρμα πεπερασμένης αντίστασης, όπου η ισότητα $\mathcal{E}=w$ πράγματι ισχύει.

Στην Παρ. 4 μελετούμε το πρόβλημα ενός σύρματος που κινείται μέσα σε στατικό μαγνητικό πεδίο. Μια ειδική περίπτωση όπου η ισότητα $\mathcal{E}=w$ ισχύει, εξετάζεται στην Παρ. 5.

Τέλος, η Παρ. 6 εξετάζει το πρόβλημα ενός στάσιμου σύρματος μέσα σε ένα χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο. Αποδεικνύεται ότι η ισότητα $\mathcal{E}=w$ ικανοποιείται μόνο στην ειδική περίπτωση όπου το μαγνητικό πεδίο μεταβάλλεται γραμμικά με το χρόνο.

2. Οι γενικοί ορισμοί της ΗΕΔ και του έργου ανά μονάδα φορτίου

Θεωρούμε μια περιοχή του χώρου στην οποία υφίσταται ηλεκτρομαγνητικό (Η/Μ) πεδίο. Γενικά μιλώντας, κάθε *κλειστή* διαδρομή C (ή *βρόχος*) μέσα στην περιοχή αυτή θα καλείται *«κύκλωμα»* (άσχετα αν εν συνόλω ή εν μέρει το C αποτελείται ή όχι από υλικά μέρη όπως σύρματα, αντιστάσεις, πυκνωτές, μπαταρίες, κλπ.). Ορίζουμε *αυθαίρετα* μια θετική φορά διαγραφής του βρόχου C και θεωρούμε ένα στοιχείο $\vec{dl}$ του C προσανατολισμένο κατά τη θετική φορά (Σχήμα 1).



Σχήμα 1: Ένας προσανατολισμένος βρόχος που παριστά κύκλωμα.

Φανταζόμαστε τώρα ένα δοκιμαστικό φορτίο q τοποθετημένο στη θέση που βρίσκεται το $\vec{dl}$, και καλούμε $\vec{F}$ τη δύναμη που ασκείται πάνω στο q τη χρονική στιγμή t. Η δύναμη αυτή ασκείται από το ίδιο το Η/Μ πεδίο, πιθανώς δε και από πρόσθετες *πηγές ενέργειας* (π.χ. μπαταρίες, ή κάποιας μορφής εξωτερική μηχανική δράση) οι οποίες (πηγές) συμβάλλουν στη δημιουργία και διατήρηση ενός ηλεκτρικού ρεύματος κατά μήκος του βρόχου C. Η *δύναμη ανά μονάδα φορτίου* στη θέση που βρίσκεται το $\vec{dl}$, τη χρονική στιγμή t, ισούται με

$$\vec{f} = \frac{\vec{F}}{q} \tag{1}$$

Παρατηρούμε ότι η $\vec{f}$ είναι ανεξάρτητη του q, αφού η ηλεκτρομαγνητική δύναμη πάνω στο q είναι ανάλογη του φορτίου. Ειδικά, αν αντιστρέψουμε το πρόσημο του q δεν θα επηρεαστεί η $\vec{f}$ (αν και θα αλλάξει η κατεύθυνση της $\vec{F}$).

Γενικά, ούτε το σχήμα, ούτε το μέγεθος του βρόχου C απαιτείται να παραμείνουν σταθερά. Επί πλέον, ο βρόχος μπορεί να βρίσκεται σε κίνηση ως προς έναν εξωτερικό αδρανειακό παρατηρητή. Για το λόγο αυτό, για ένα βρόχο με (πιθανώς) μεταβλητό σχήμα, μέγεθος ή θέση στο χώρο, θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο $C(t)$ για να υποδείξουμε την κατάσταση της καμπύλης τη χρονική στιγμή t.

Ορίζουμε τώρα την *ηλεκτρεγερτική δύναμη* (ΗΕΔ) του κυκλώματος C *τη στιγμή* t ως το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $\vec{f}$ κατά μήκος του βρόχου C, στη φορά *θετικής* διαγραφής τού C :

$$\mathcal{E}(t) = \oint_{C(t)} \vec{f}(\vec{r},t) \cdot \vec{dl} \tag{2}$$

(όπου $\vec{r}$ το διάνυσμα θέσης του $\vec{dl}$ ως προς την αρχή του συστήματος συντεταγμένων μας). Παρατηρούμε ότι το πρόσημο της ΗΕΔ εξαρτάται από την εκλογή θετικής φοράς διαγραφής τού C: αλλάζοντας τη φορά αυτή, το πρόσημο της $\mathcal{E}$ αντιστρέφεται.

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, η δύναμη (ανά μονάδα φορτίου) που ορίζεται στη σχέση (1) μπορεί να αποδοθεί σε δύο παράγοντες: την αλληλεπίδραση του q με το ίδιο το Η/Μ πεδίο, καθώς και τυχόν επιδράσεις πάνω στο q από επιπρόσθετες πηγές ενέργειας. Τελικά, αυτές οι δεύτερες επιδράσεις είναι *ηλεκτρομαγνητικής* φύσης, ακόμα κι όταν ξεκινούν από κάποια εξωτερική μηχανική δράση. Γράφουμε:

$$\vec{f} = \vec{f}_{em} + \vec{f}_{app} \tag{3}$$

όπου $\vec{f}_{em}$ η δύναμη που οφείλεται στο Η/Μ πεδίο και $\vec{f}_{app}$ η *εφαρμοζόμενη δύναμη* λόγω κάποιας πρόσθετης πηγής ενέργειας. Σημειώνουμε ότι η δύναμη (3) δεν περιλαμβάνει παράγοντες οφειλόμενους σε *ηλεκτρική αντίσταση*, η οποία αντιτίθεται στη ροή φορτίου κατά μήκος του C. Η δύναμη (3) περιλαμβάνει μόνο παράγοντες που συνεισφέρουν στη δημιουργία και διατήρηση μιας τέτοιας ροής στο κύκλωμα.

Τώρα, ας υποθέσουμε ότι αφήνουμε *ένα μοναδικό φορτίο* q να διαγράψει μια πλήρη τροχιά κατά μήκος του κυκλώματος C, κάτω από την επίδραση της δύναμης (3). Το φορτίο θα διαγράψει, έτσι, κάποια καμπύλη τροχιά C' *στο χώρο* (όχι απαραίτητα κλειστή!) ως προς έναν εξωτερικό αδρανειακό παρατηρητή. Έστω $\overrightarrow{dl'}$ ένα στοιχείο της καμπύλης C', το οποίο παριστά μια απειροστή μετατόπιση του q στο χώρο σε χρονικό διάστημα dt. Ορίζουμε το *έργο ανά μονάδα φορτίου* γι' αυτή την πλήρη διαδρομή κατά μήκος του κυκλώματος, με το ολοκλήρωμα:

$$w = \int_{C'} \vec{f} \cdot \overrightarrow{dl'} \qquad (4)$$

Για ένα *στάσιμο* κύκλωμα *σταθερού* σχήματος, η καμπύλη C' συμπίπτει με την κλειστή καμπύλη C, έτσι ώστε η σχέση (4) ανάγεται στην

$$w = \oint_C \vec{f} \cdot \overrightarrow{dl} \qquad (\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}\ C) \qquad (5)$$

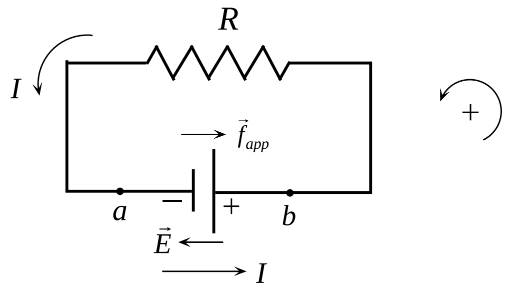
Θα πρέπει να προσέξουμε ιδιαίτερα ότι το ολοκλήρωμα (2) υπολογίζεται *για δεδομένη χρονική στιγμή* t, ενώ στα ολοκληρώματα (4) και (5) ο χρόνος αφήνεται να ρεύσει! Γενικά, η τιμή τού w εξαρτάται από τη χρονική στιγμή t_0 και το σημείο P_0 όπου το q ξεκινά την κλειστή διαδρομή στο κύκλωμα C. Έτσι, υπάρχει κάποιος βαθμός ασάφειας στον ορισμό του έργου ανά μονάδα φορτίου. Από την άλλη μεριά, η «ασάφεια» σε ό,τι αφορά την ΗΕΔ σχετίζεται με την εξάρτηση της ΗΕΔ από τη χρονική στιγμή t.

Θέτουμε τώρα το ερώτημα: Είναι δυνατόν η *τιμή* της ΗΕΔ να ισούται με αυτήν του έργου ανά μονάδα φορτίου, παρά το γεγονός ότι αυτά τα δύο μεγέθη ορίζονται διαφορετικά; Για να ισχύει η σχέση $\mathcal{E}=w$, τόσο το $\mathcal{E}$ όσο και το w θα πρέπει να είναι σαφώς ορισμένα. Έτσι, το $\mathcal{E}$ θα πρέπει να είναι *σταθερό*, ανεξάρτητο του χρόνου ($d\mathcal{E}/dt=0$) ενώ το w δεν θα πρέπει να εξαρτάται από την αρχική χρονική στιγμή t_0 ή το αρχικό σημείο P_0 της κλειστής διαδρομής του q πάνω στο C. Αυτές οι προϋποθέσεις αποτελούν *αναγκαίες συνθήκες* ώστε η ισότητα $\mathcal{E}=w$ να έχει νόημα.

Στις επόμενες παραγράφους επεξηγούμε αυτές τις ιδέες με τη χρήση διαφόρων παραδειγμάτων. Όπως θα δούμε, η ικανοποίηση των συνθηκών που προαναφέρθηκαν αποτελεί μάλλον την εξαίρεση παρά τον κανόνα!

3. Μεταλλικό σύρμα συνδεδεμένο με μπαταρία

Θεωρούμε κύκλωμα αποτελούμενο από ιδανική μπαταρία (που δεν έχει, δηλαδή, εσωτερική αντίσταση) συνδεδεμένη με μεταλλικό σύρμα ολικής αντίστασης R (Σχ. 2). Όπως δείξαμε στο άρθρο [1] (βλ. επίσης [2]), η ΗΕΔ του κυκλώματος *στην κατεύθυνση του ρεύματος* ισούται με την τάση V της μπαταρίας. Επί πλέον, η ΗΕΔ σε αυτή την περίπτωση παριστά το έργο, ανά μονάδα φορτίου, που προσφέρεται από την πηγή (μπαταρία). Ας δούμε τα πράγματα αναλυτικά:



Σχήμα 2: Μπαταρία συνδεδεμένη με μεταλλικό σύρμα.

Ένα (*συμβατικά θετικό*) κινούμενο φορτίο q υπόκειται σε δύο δυνάμεις κατά μήκος του κυκλώματος C: μια ηλεκτροστατική δύναμη $\vec{F}_e = q\vec{E}$ σε κάθε σημείο τού C, και μια δύναμη $\vec{F}_{app}$, στο *εσωτερικό* της μπαταρίας, η οποία μεταφέρει το q από τον αρνητικό πόλο a στον θετικό πόλο b *δια μέσου της πηγής*. Σύμφωνα με τη σχέση (3), η ολική δύναμη ανά μονάδα φορτίου είναι

$$\vec{f} = \vec{f}_e + \vec{f}_{app} = \vec{E} + \vec{f}_{app} \ .$$

Η ΗΕΔ στην κατεύθυνση του ρεύματος (αριστερόστροφα), τη χρονική στιγμή t, είναι

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \oint_C \vec{f} \cdot \overrightarrow{dl} \\ &= \oint_C \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} + \oint_C \vec{f}_{app} \cdot \overrightarrow{dl} \\ &= \int_a^b \vec{f}_{app} \cdot \overrightarrow{dl} \end{aligned} \qquad (6)$$

όπου λάβαμε υπόψη ότι $\oint_C \vec{E}\cdot\overrightarrow{dl}=0$ για ένα ηλεκτροστατικό πεδίο, καθώς και ότι η δράση της πηγής πάνω στο q περιορίζεται στην περιοχή ανάμεσα στους πόλους της μπαταρίας.

Τώρα, στη στατική περίπτωση (I = σταθερό) το φορτίο q κινείται με σταθερό μέτρο ταχύτητας κατά μήκος του κυκλώματος. Αυτό σημαίνει ότι η ολική δύναμη στο q στη διεύθυνση της τροχιάς C είναι μηδέν. Στο εσωτερικό του σύρματος, η ηλεκτροστατική δύναμη $\vec{F}_e = q\vec{E}$ εξισορροπείται από τη δύναμη αντίστασης πάνω στο q λόγω των συγκρούσεων του φορτίου με τα θετικά ιόντα του μετάλλου (όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, αυτή η δύναμη *δεν* συνεισφέρει στην ΗΕΔ). Στο εσωτερικό της (ιδανικής) μπαταρίας, όμως, όπου δεν υπάρχει αντίσταση, η ηλεκτροστατική δύναμη θα πρέπει να εξισορροπηθεί από την αντίθετη δύναμη που ασκείται από την πηγή. Έτσι, στο τμήμα του κυκλώματος ανάμεσα στο a και το b, $\vec{f}_{app} = -\vec{f}_e = -\vec{E}$. Από την (6), τότε, έχουμε:

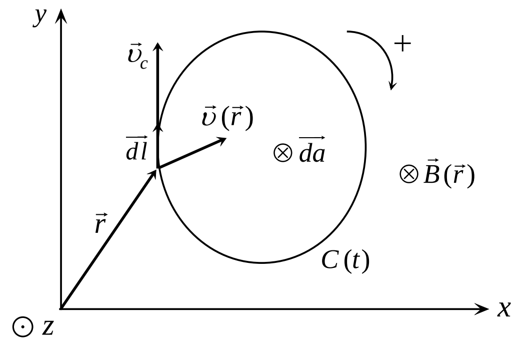
$$\mathcal{E} = -\int_a^b \vec{E}\cdot\overrightarrow{dl} = V_b - V_a = V \qquad (7)$$

όπου V_a και V_b τα ηλεκτρικά δυναμικά στα σημεία a και b, αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι η ΗΕΔ είναι χρονικά σταθερή, όπως αναμένεται σε μια στατική κατάσταση.

Στη συνέχεια, θέλουμε να υπολογίσουμε το έργο ανά μονάδα φορτίου για μια πλήρη διαδρομή πάνω στο κύκλωμα. Για το σκοπό αυτό, αφήνουμε *ένα μοναδικό φορτίο* q να διατρέξει ολόκληρο το C και χρησιμοποιούμε την έκφραση (5) (αφού το σύρμα είναι ακίνητο και το σχήμα του μένει σταθερό). Κατά την εφαρμογή αυτής της σχέσης, ο χρόνος υποτίθεται ότι ρέει καθώς το q κινείται κατά μήκος τού C. Δοθέντος, όμως, ότι η φυσική κατάσταση είναι στατική (χρονικά ανεξάρτητη), ο χρόνος δεν παίζει σημαντικό ρόλο, αφού δεν έχει σημασία η χρονική στιγμή κατά την οποία το φορτίο θα περάσει από δοσμένο σημείο της καμπύλης C. Έτσι, η ολοκλήρωση στην (5) θα δώσει το ίδιο αποτέλεσμα (7) όπως η ολοκλήρωση στην (6), παρά το γεγονός ότι, στη δεύτερη περίπτωση, ο χρόνος θεωρήθηκε *σταθερός*. Συμπεραίνουμε ότι η ισότητα $w=\mathcal{E}$ ικανοποιείται σ' αυτή την περίπτωση: η ΗΕΔ πράγματι παριστά έργο ανά μονάδα φορτίου.

4. Κινούμενο σύρμα μέσα σε στατικό μαγνητικό πεδίο

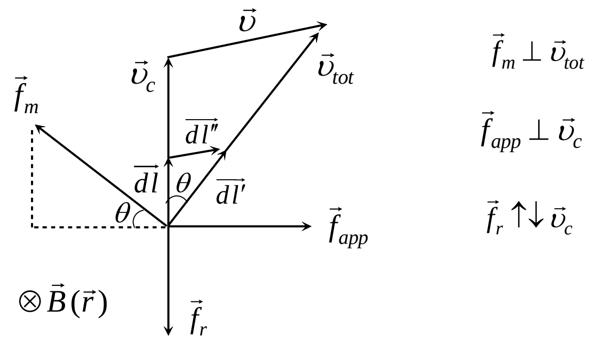
Θεωρούμε ένα σύρμα C που κινείται στο επίπεδο xy. Το σχήμα και/ή το μέγεθος του σύρματος είναι δυνατό να μεταβάλλονται κατά τη διάρκεια της κίνησής του. Στην περιοχή όπου κινείται το σύρμα υπάρχει ένα στατικό μαγνητικό πεδίο $\vec{B}(\vec{r})$. Χάριν απλότητας, υποθέτουμε ότι το πεδίο αυτό είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζει το σύρμα, και η κατεύθυνσή του είναι προς το *εσωτερικό* της σελίδας.



Σχήμα 3: Σύρμα C κινούμενο μέσα σε στατικό μαγνητικό πεδίο.

Στο Σχ. 3, ο άξονας z είναι κάθετος στο επίπεδο του σύρματος, με κατεύθυνση προς τον αναγνώστη. Καλούμε $\overrightarrow{da}$ το απειροστό κάθετο διάνυσμα που αντιπροσωπεύει ένα στοιχείο της επίπεδης επιφάνειας που οριοθετείται από το σύρμα (το διάνυσμα αυτό κατευθύνεται προς το *εσωτερικό* της σελίδας, σε αντιστοιχία με την επιλεγμένη δεξιόστροφη φορά διαγραφής του βρόχου C). Αν $\hat{u}_z$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στον άξονα z, τότε $\overrightarrow{da} = -(da)\hat{u}_z$ και $\vec{B} = -B(\vec{r})\hat{u}_z$, όπου $B(\vec{r}) = |\vec{B}(\vec{r})|$.

Θεωρούμε ένα στοιχείο $\overrightarrow{dl}$ του σύρματος, ευρισκόμενο στο σημείο με διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ ως προς την αρχή των συντεταγμένων του αδρανειακού συστήματος αναφοράς μας. Καλούμε $\vec{\upsilon}(\vec{r})$ την ταχύτητα αυτού του στοιχείου ως προς το σύστημά μας. Έστω q ένα (*συμβατικά θετικό*) φορτίο διερχόμενο από το θεωρούμενο σημείο τη χρονική στιγμή *t*. Το φορτίο αυτό εκτελεί σύνθετη κίνηση, έχοντας ταχύτητα $\vec{\upsilon}_c$ *κατά μήκος του σύρματος* και αποκτώντας μια επιπρόσθετη ταχύτητα $\vec{\upsilon}(\vec{r})$ λόγω της κίνησης του ίδιου του σύρματος. Η ολική ταχύτητα του *q* ως προς εμάς, είναι $\vec{\upsilon}_{tot} = \vec{\upsilon}_c + \vec{\upsilon}$.



Σχήμα 4: Ισορροπία δυνάμεων ανά μονάδα φορτίου.

Η ισορροπία των δυνάμεων που ασκούνται στο *q* φαίνεται στο διάγραμμα του Σχ. 4. Η *μαγνητική δύναμη* στο *q* είναι κάθετη στην ολική ταχύτητα του φορτίου και ίση με $\vec{F}_m = q(\vec{\upsilon}_{tot} \times \vec{B})$. Άρα, η μαγνητική δύναμη ανά μονάδα φορτίου είναι $\vec{f}_m = \vec{\upsilon}_{tot} \times \vec{B}$. Η συνιστώσα της στη διεύθυνση του σύρματος (δηλαδή, στη διεύθυνση του $\overrightarrow{dl}$) εξισορροπείται από τη *δύναμη αντίστασης* $\vec{f}_r$, η οποία αντιτίθεται στην κίνηση του *q* κατά μήκος τού *C* (όπως προαναφέρθηκε, η δύναμη αυτή *δεν* συνεισφέρει στην ΗΕΔ). Όμως, η συνιστώσα της μαγνητικής δύναμης που είναι *κάθετη* στο σύρμα θα τείνει να αναγκάσει το σύρμα να κινηθεί «προς τα πίσω» (σε κατεύθυνση αντίθετη προς την επιθυμητή κίνηση του σύρματος), εκτός αν εξισορροπηθεί με κάποια *εξωτερική* μηχανική δράση (π.χ., το χέρι μας, το οποίο τραβά το σύρμα προς τα μπρος). Τώρα, το φορτίο *q* παίρνει ένα μερίδιο αυτής της δράσης μέσω κάποιας δύναμης που μεταφέρεται σ' αυτό από τη δομή του σύρματος. Αυτή η δύναμη (την οποία ονομάζουμε *εφαρμοζόμενη δύναμη*) θα πρέπει να ασκείται *κάθετα* προς το σύρμα, έτσι ώστε να εξουδετερώνει την κάθετη συνιστώσα της μαγνητικής δύναμης. Συμβολίζουμε την εφαρμοζόμενη δύναμη ανά μονάδα φορτίου με $\vec{f}_{app}$. Αν και η δύναμη αυτή έχει την αφετηρία της σε κάποια εξωτερική μηχανική δράση, αποδίδεται στο *q* μέσω μιας *ηλεκτρομαγνητικής* αλληλεπίδρασης με το κρυσταλλικό πλέγμα του σύρματος (δεν θα πρέπει να συγχέεται με τη δύναμη λόγω αντίστασης, της οποίας ο ρόλος είναι διαφορετικός!).

Σύμφωνα με την (3), η ολική δύναμη που συνεισφέρει στην ΗΕΔ του κυκλώματος είναι $\vec{f} = \vec{f}_m + \vec{f}_{app}$. Από την (2), η ΗΕΔ τη χρονική στιγμή *t* είναι

$$\mathcal{E}(t) = \oint_{C(t)} \vec{f}_m \cdot \overrightarrow{dl} + \oint_{C(t)} \vec{f}_{app} \cdot \overrightarrow{dl} \ .$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι μηδέν, αφού η εφαρμοζόμενη δύναμη είναι κάθετη στο στοιχείο του σύρματος σε κάθε σημείο του βρόχου *C*. Το ολοκλήρωμα της μαγνητικής δύναμης ισούται με

$$\oint_C (\vec{\upsilon}_{tot} \times \vec{B}) \cdot \overrightarrow{dl} = \oint_C (\vec{\upsilon}_c \times \vec{B}) \cdot \overrightarrow{dl} + \oint_C (\vec{\upsilon} \times \vec{B}) \cdot \overrightarrow{dl}$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος είναι μηδέν, όπως προκύπτει από το Σχ. 4. Έτσι έχουμε, τελικά:

$$\mathcal{E}(t) = \oint_{C(t)} [\vec{\upsilon}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})] \cdot \overrightarrow{dl} \qquad (8)$$

Όπως μπορεί να αποδειχθεί [1, 2], η ΗΕΔ του κυκλώματος *C* ισούται με

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{d}{dt}\Phi_m(t) \qquad (9)$$

όπου εισάγαμε τη *μαγνητική ροή* δια μέσου του *C*,

$$\Phi_m(t) = \int_{S(t)} \vec{B}(\vec{r}) \cdot \overrightarrow{da} = \int_{S(t)} B(\vec{r})\, da \qquad (10)$$

[Με *S*(*t*) συμβολίζουμε *οποιαδήποτε* ανοιχτή επιφάνεια με όριο το *C* τη στιγμή *t*, π.χ., την επίπεδη επιφάνεια που περικλείεται από το σύρμα.]

Έστω, τώρα, *C΄* η τροχιά τού *q* στο χώρο ως προς έναν εξωτερικό παρατηρητή, για μια πλήρη διαδρομή τού *q* πάνω στο σύρμα (γενικά, η *C΄* θα είναι *ανοιχτή* καμπύλη). Σύμφωνα με την

(4), το απαιτούμενο έργο ανά μονάδα φορτίου γι' αυτή τη διαδρομή, είναι

$$w = \int_{C'} \vec{f}_m \cdot \overrightarrow{dl'} + \int_{C'} \vec{f}_{app} \cdot \overrightarrow{dl'} .$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι μηδέν (βλ. Σχ. 4), ενώ ως προς το δεύτερο παρατηρούμε ότι

$$\vec{f}_{app} \cdot \overrightarrow{dl'} = \vec{f}_{app} \cdot \overrightarrow{dl} + \vec{f}_{app} \cdot \overrightarrow{dl''} = \vec{f}_{app} \cdot \overrightarrow{dl''}$$

(αφού η εφαρμοζόμενη δύναμη είναι κάθετη στο στοιχείο του σύρματος, όπως βλέπουμε στο Σχ. 4). Έτσι έχουμε, τελικά:

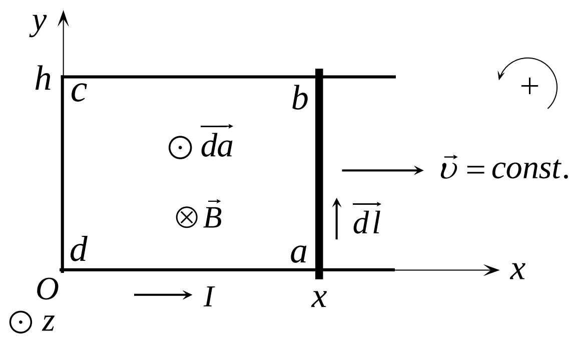
$$w = \int_{C'} \vec{f}_{app} \cdot \overrightarrow{dl'} \quad \text{με} \qquad (11a)$$

$$\vec{f}_{app} \cdot \overrightarrow{dl'} = \vec{f}_{app} \cdot \overrightarrow{dl''} = \vec{f}_{app} \cdot \vec{\upsilon}\, dt \qquad (11b)$$

όπου $\overrightarrow{dl''} = \vec{\upsilon}\, dt$ η απειροστή μετατόπιση του στοιχείου του σύρματος μέσα σε χρόνο *dt*.

5. Παράδειγμα: Κίνηση μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο

Θεωρούμε μια μεταλλική ράβδο (*ab*) μήκους *h*, η οποία γλιστρά παράλληλα προς τον εαυτό της με ταχύτητα σταθερού μέτρου υ, πάνω σε δύο παράλληλες ράγες που αποτελούν μέρος ενός σύρματος σχήματος Π, όπως φαίνεται στο Σχ. 5. Ένα *ομογενές* μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ με κατεύθυνση προς το εσωτερικό της σελίδας, πληροί ολόκληρη την περιοχή.

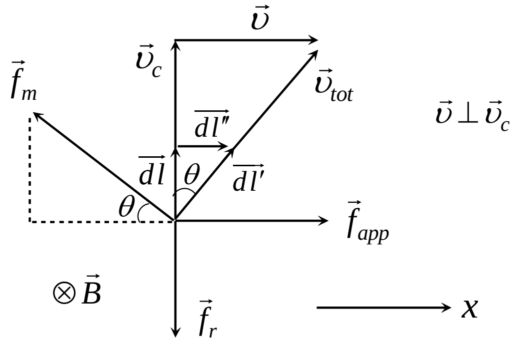


Σχήμα 5: Μεταλλική ράβδος (*ab*) που γλιστρά πάνω σε δύο παράλληλες ράγες.

Ένα κύκλωμα *C*(*t*) μεταβλητού μεγέθους σχηματίζεται από τον ορθογώνιο βρόχο (*abcda*).

Το πεδίο και το στοιχείο επιφάνειας γράφονται, αντίστοιχα, $\vec{B} = -B\hat{u}_z$ (όπου $B = |\vec{B}| = \sigma\tau\alpha\theta.$) και $\overrightarrow{da} = (da)\hat{u}_z$ (προσέξτε ότι η κατεύθυνση διαγραφής του βρόχου *C* είναι τώρα αριστερόστροφη).

Το γενικό διάγραμμα του Σχ. 4, που δείχνει την ισορροπία των δυνάμεων, ανάγεται σε αυτό του Σχ. 6. Προσέξτε ότι το διάγραμμα αυτό αφορά μόνο το *κινούμενο* τμήμα (*ab*) του κυκλώματος, αφού σ' αυτό το τμήμα μόνο η ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ και η εφαρμοζόμενη δύναμη $\vec{f}_{app}$ είναι μη-μηδενικές.



Σχήμα 6: Ισορροπία δυνάμεων ανά μονάδα φορτίου.

Η ΗΕΔ του κυκλώματος τη χρονική στιγμή *t* είναι, σύμφωνα με την (8),

$$\mathcal{E}(t) = \oint_{C(t)} (\vec{\upsilon} \times \vec{B}) \cdot \overrightarrow{dl} = \int_a^b \upsilon B\, dl = \upsilon B \int_a^b dl = \upsilon B h \ .$$

Εναλλακτικά, η μαγνητική ροή δια μέσου του *C* είναι

$$\Phi_m(t) = \int_{S(t)} \vec{B}(\vec{r}) \cdot \overrightarrow{da} = -\int_{S(t)} B\, da = -B \int_{S(t)} da = -Bhx$$

(όπου *x* η στιγμιαία θέση της ράβδου τη στιγμή *t*), έτσι ώστε

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{d}{dt} \Phi_m(t) = Bh \frac{dx}{dt} = Bh\upsilon \ .$$

Παρατηρούμε ότι η ΗΕΔ είναι σταθερή (χρονικά ανεξάρτητη).

Θέλουμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε την (11) για να υπολογίσουμε το έργο ανά μονάδα φορτίου, για μια πλήρη περιφορά ενός φορτίου πάνω στο *C*. Επειδή η εφαρμοζόμενη δύναμη είναι μη-μηδενική μόνο στο τμήμα (*ab*) του *C*, ο δρόμος ολοκλήρωσης *C΄* (που είναι ευθεία γραμμή, δοθέντος ότι το φορτίο κινείται στο χώρο με σταθερή ταχύτητα) θα αντιστοιχεί στην κίνηση του φορτίου κατά μήκος της μεταλλικής ράβδου μόνο, δηλαδή από το *a* ως το *b*. (Επειδή η ράβδος μετατοπίζεται στο χώρο ενώ το φορτίο κινείται κατά μήκος της, η γραμμή *C΄* *δεν* θα είναι παράλληλη προς τη ράβδο.) Σύμφωνα με την (11),

$$w=\int_{C'} \vec{f}_{app}\cdot\overrightarrow{dl'} \quad \text{με}$$

$$\vec{f}_{app}\cdot\overrightarrow{dl'}=\vec{f}_{app}\cdot\overrightarrow{dl''}=f_{app}\,dl''=f_{app}\,\upsilon\,dt$$

(βλ. Σχ. 6). Τώρα, ο ρόλος της εφαρμοζόμενης δύναμης είναι να εξισορροπεί την *x*-συνιστώσα της μαγνητικής δύναμης, έτσι ώστε η ράβδος να κινείται με σταθερό μέτρο ταχύτητας στη διεύθυνση *x*. Έτσι,

$$f_{app}=f_m\cos\theta=\upsilon_{tot}B\cos\theta=B\upsilon_c$$

και

$$f_{app}\,\upsilon\,dt=B\upsilon\upsilon_c\,dt=B\upsilon\,dl$$

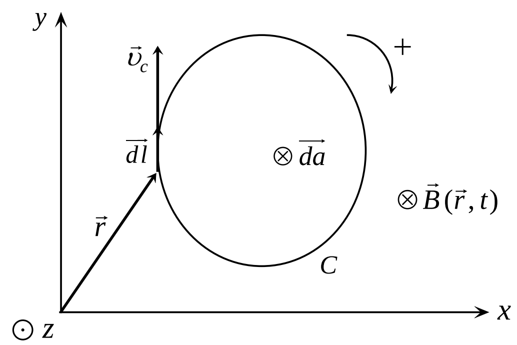
(αφού το $\upsilon_c\,dt$ αντιπροσωπεύει μια στοιχειώδη μετατόπιση *dl* του φορτίου κατά μήκος της μεταλλικής ράβδου, σε χρόνο *dt*). Τελικά, έχουμε:

$$w=\int_a^b B\upsilon\,dl=B\upsilon\int_a^b dl=B\upsilon h\ .$$

Παρατηρούμε ότι, σε αυτό το ειδικό παράδειγμα, η τιμή του έργου ανά μονάδα φορτίου ισούται με αυτήν της ΗΕΔ, όπου και οι δύο αυτές ποσότητες είναι σταθερές και σαφώς ορισμένες. Εν τούτοις, κάτι τέτοιο *δεν* συμβαίνει αν το μαγνητικό πεδίο είναι *μη-ομογενές*!

6. Στάσιμο σύρμα μέσα σε χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο

Το τελευταίο παράδειγμά μας αφορά ένα *στάσιμο* σύρμα *C* μέσα σε ένα *χρονικά μεταβαλλόμενο* μαγνητικό πεδίο, της μορφής $\vec{B}(\vec{r},t)=-B(\vec{r},t)\,\hat{u}_z$ (όπου $B(\vec{r},t)=|\vec{B}(\vec{r},t)|$), όπως δείχνει το Σχ. 7.



Σχήμα 7: Στάσιμο σύρμα *C* μέσα σε χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο.

Όπως γνωρίζουμε [1-7], η παρουσία ενός χρονικά μεταβαλλόμενου μαγνητικού πεδίου συνεπάγεται επίσης την παρουσία ενός ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$, τέτοιου ώστε

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{12}$$

Όπως εξηγήσαμε αναλυτικά στο άρθρο [1], η ΗΕΔ του κυκλώματος τη χρονική στιγμή *t* δίνεται από τη σχέση

$$\mathcal{E}(t)=\oint_C \vec{E}(\vec{r},t)\cdot\overrightarrow{dl}=-\frac{d}{dt}\Phi_m(t) \tag{13}$$

όπου

$$\Phi_m(t)=\int_S \vec{B}(\vec{r},t)\cdot\overrightarrow{da}=\int_S B(\vec{r},t)\,da \tag{14}$$

η μαγνητική ροή δια μέσου του *C* τη στιγμή αυτή.

Από την άλλη μεριά, το έργο ανά μονάδα φορτίου για μια πλήρη διαδρομή πάνω στο *C* δίνεται από τη σχέση (5): $w = \oint_C \vec{f} \cdot \overrightarrow{dl}$, όπου $\vec{f} = \vec{f}_{em} = \vec{E} + (\vec{\upsilon}_c \times \vec{B})$, έτσι ώστε

$$w = \oint_C \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} + \oint_C (\vec{\upsilon}_c \times \vec{B}) \cdot \overrightarrow{dl} \ .$$

Όπως είναι εύκολο να δούμε (βλ. Σχ. 7), το δεύτερο ολοκλήρωμα μηδενίζεται, κι έτσι έχουμε:

$$w = \oint_C \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} \qquad (15)$$

Η ομοιότητα ανάμεσα στα ολοκληρώματα των σχέσεων (13) και (15) είναι παραπλανητική! Το ολοκλήρωμα στην (13) υπολογίζεται *για μια δοσμένη χρονική στιγμή t*, ενώ στην (15) ο χρόνος αφήνεται να ρεύσει καθώς το φορτίο κινείται κατά μήκος του *C*. Είναι, άραγε, δυνατό οι *τιμές* αυτών των ολοκληρωμάτων να συμπίπτουν; Όπως αναφέρθηκε στο τέλος της Παρ. 2, αναγκαία συνθήκη για να συμβεί αυτό, είναι, οι δύο ολοκληρώσεις να δίνουν χρονικά-ανεξάρτητα αποτελέσματα. Για να είναι η ΗΕΔ $\mathcal{E}$ χρονικά ανεξάρτητη (αλλά μη-μηδενική), η μαγνητική ροή (14) – άρα και το ίδιο το μαγνητικό πεδίο – πρέπει να αυξάνει *γραμμικά* με το χρόνο. Από την άλλη μεριά, η ολοκλήρωση (15) για το έργο *w* θα είναι χρονικά ανεξάρτητη αν το ίδιο ισχύει για το ηλεκτρικό πεδίο. Από την (12), τότε, βλέπουμε ότι το μαγνητικό πεδίο θα πρέπει να είναι γραμμικά εξαρτημένο από το χρόνο, πράγμα που μας οδηγεί και πάλι στη συνθήκη που βρήκαμε προηγουμένως.

Σαν παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι το μαγνητικό πεδίο είναι της μορφής

$$\vec{B} = -B_0 \, t \, \hat{u}_z \qquad (B_0 = \sigma\tau\alpha\theta.) \, .$$

Μια λύση τής (12) για το $\vec{E}$ είναι, σε κυλινδρικές συντεταγμένες,

$$\vec{E} = \frac{B_0 \rho}{2} \, \hat{u}_\varphi \ .$$

[Υποθέτουμε ότι οι λύσεις αυτές ισχύουν σε μια περιορισμένη περιοχή του χώρου (π.χ., στο εσωτερικό ενός σωληνοειδούς του οποίου ο άξονας συμπίπτει με τον άξονα *z*), έτσι ώστε το *ρ* να είναι πεπερασμένο στην περιοχή που μας ενδιαφέρει.] Τώρα, θεωρήστε ένα κυκλικό σύρμα *C* ακτίνας *R*, με κέντρο την αρχή των συντεταγμένων του επιπέδου *xy*. Τότε, δοθέντος ότι $\overrightarrow{dl} = -(dl)\hat{u}_\varphi$,

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = -\frac{B_0 R}{2} \oint_C dl = -B_0 \pi R^2 .$$

Εναλλακτικά, έχουμε ότι

$$\Phi_m = \int_S B da = B_0 \pi R^2 t \, ,$$

έτσι ώστε $\mathcal{E} = -\, d\Phi_m / dt = -B_0 \pi R^2$. Είναι φανερό ότι, λόγω της χρονικής σταθερότητας του ηλεκτρικού πεδίου, το ίδιο αποτέλεσμα θα προκύψει για το έργο *w* με χρήση της (15).

7. Μερικές τελικές παρατηρήσεις

Δεν φαίνεται να υπάρχει ενιαίος και κοινά αποδεκτός ορισμός της ΗΕΔ στη βιβλιογραφία του Ηλεκτρομαγνητισμού. Ο ορισμός που δώσαμε σ' αυτό το άρθρο (όπως επίσης και στο [1]) προσεγγίζει αυτούς των [2] και [3]. Ειδικότερα, χρησιμοποιώντας ένα παράδειγμα παρόμοιο με αυτό της Παρ. 5 του παρόντος άρθρου, ο Griffiths [2] κάνει σαφή διαχωρισμό ανάμεσα στις έννοιες της ΗΕΔ και του έργου ανά μονάδα φορτίου. Στα [4] και [5] (όπως επίσης και σε αμέτρητα άλλα εκπαιδευτικά συγγράμματα) η ΗΕΔ ορίζεται, γενικά, σαν έργο ανά μονάδα φορτίου, ενώ στα [6] και [7] ορίζεται σαν το κλειστό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του μη-συντηρητικού μέρους του ηλεκτρικού πεδίου που συνοδεύει μια χρονικά-μεταβαλλόμενη μαγνητική ροή.

Η ισορροπία των δυνάμεων και ο τρόπος παραγωγής έργου σε ένα αγώγιμο κύκλωμα που κινείται δια μέσου ενός μαγνητικού πεδίου, αναλύονται με όμορφο τρόπο στα [2, 8, 9]. Μια ενδιαφέρουσα προσέγγιση στη σχέση ανάμεσα στο έργο και την ΗΕΔ, με χρήση της έννοιας του *εικονικού έργου* (virtual work) περιγράφεται στο [10].

Ασφαλώς, ο κατάλογος των αναφορών που δίνονται εδώ, σε καμία περίπτωση δεν είναι εξαντλητικός! Χρησιμεύει κυρίως στο να καταδείξει την ποικιλομορφία των ιδεών γύρω από την έννοια της ΗΕΔ. Οι περιπλοκότητες που ενυπάρχουν σε αυτή την έννοια την καθιστούν ενδιαφέρον αντικείμενο μελέτης, τόσο για τον επιστημονικό ερευνητή όσο και για τον προχωρημένο σπουδαστή της κλασικής Ηλεκτροδυναμικής.

Αναφορές

[1] C. J. Papachristou, A. N. Magoulas, *Electromotive force: A guide for the perplexed*, Annals Nav. Acad. Gr. (Nausivios Chora) Vol. 5 (2014). Βλ. επίσης: http://arxiv.org/abs/1211.6463.

[2] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 3rd Edition (Prentice-Hall, 1999).

[3] W. N. Cottingham, D. A. Greenwood, *Electricity and Magnetism* (Cambridge, 1991).

[4] D. M. Cook, *The Theory of the Electromagnetic Field* (Dover, 2003).

[5] R. K. Wangsness, *Electromagnetic Fields*, 2nd Edition (Wiley, 1986).

[6] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 2nd Edition (Wiley, 1975).

[7] W. K. H. Panofsky, M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, 2nd Edition (Addison-Wesley, 1962).

[8] E. P. Mosca, *Magnetic forces doing work?*, Am. J. Phys. 42 (1974) 295.

[9] J. A. Redinz, *Forces and work on a wire in a magnetic field*, Am. J. Phys. 79 (2011) 774.

[10] R. A. Diaz, W. J. Herrera, S. Gomez, *The role of the virtual work in Faraday's Law*, http://arxiv.org/abs/1104.1718.