Κ. Ι. ΠΑΠΑΧΡΗΣΤΟΥ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΤΙΚΩΝ ΔΟΚΙΜΩΝ

2022

Στοιχεία

Μαθηματικής Ανάλυσης

Συναρτήσεων Μίας Μεταβλητής

Κ. Ι. Παπαχρήστου

Τομέας Φυσικών Επιστημών
Σχολή Ναυτικών Δοκίμων

Σχολή Ναυτικών Δοκίμων

2022

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το παρόν εγχειρίδιο δεν αποτελεί πλήρες σύγγραμμα μαθηματικής ανάλυσης. Είναι απλά μία μικρή εισαγωγή στις πραγματικές συναρτήσεις μίας μεταβλητής, την παραγώγιση και την ολοκλήρωσή τους, καθώς και μια σύντομη ματιά στις σειρές και τις διαφορικές εξισώσεις. Πολλές θεμελιώδεις έννοιες – όπως, π.χ., η συνέχεια μίας συνάρτησης – αναφέρονται το πολύ ακροθιγώς, ενώ και το όλο ύφος του κειμένου είναι «ανεπίσημο», μακριά από την συνήθη αυστηρότητα των μαθηματικών. Σκοπός του βιβλίου είναι να χρησιμεύσει σαν βοήθημα σε ένα σύντομο (ίσως και κάτω από πίεση χρόνου) εισαγωγικό μάθημα μαθηματικής ανάλυσης για σπουδαστές θετικών επιστημών που ενδιαφέρονται άμεσα για εφαρμογές, παρακάμπτοντας, σε πρώτο χρόνο, την απολυτότητα της μαθηματικής ακρίβειας.

Ένα ιδιαίτερο κοινό στο οποίο απευθύνεται το βιβλίο είναι οι πρωτοετείς σπουδαστές της Σχολής Ναυτικών Δοκίμων. Αν και θα λάβουν εξαιρετικές γνώσεις μαθηματικών στα πρώτα έτη σπουδών, είναι κατά κανόνα αναγκαίο ένα γρήγορο «φρεσκάρισμα» αλλά και μία διεύρυνση γνώσεων μαθηματικής ανάλυσης στην αρχή του ακαδημαϊκού έτους, έτσι ώστε να είναι σε θέση να παρακολουθήσουν μαθήματα (π.χ., αυτό της Φυσικής) που κάνουν εκτεταμένη χρήση μαθηματικών εννοιών όπως η παράγωγος, το ολοκλήρωμα, το διαφορικό, κλπ.

Παρά τον κατά βάση πρακτικό χαρακτήρα του βιβλίου, δεν απουσιάζουν κάποιες συζητήσεις μεγαλύτερου μαθηματικού βάθους. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στην έννοια του διαφορικού μίας συνάρτησης και επισημαίνεται ότι, παρά τις ομοιότητες που υφίστανται από πλευράς συμβολισμού και ιδιοτήτων, δεν θα πρέπει να συγχέεται με το καλούμενο «διαφορικό» ενός ολοκληρώματος. Δίνεται επίσης έμφαση στην αντίληψη του αορίστου ολοκληρώματος ως *συνόλου* και όχι ως συνάρτησης, πράγμα που θα πρέπει να τονίζεται ιδιαίτερα στα εισαγωγικά συγγράμματα μαθηματικής ανάλυσης. Η κατανόηση αυτών των ζητημάτων είναι σημαντικό προαπαιτούμενο για τη μελέτη των διαφορικών εξισώσεων.

Αυτονόητα, οποιεσδήποτε παρατηρήσεις και προτάσεις για βελτιώσεις του βιβλίου είναι καλοδεχούμενες!

Κ. Ι. Παπαχρήστου

Αύγουστος 2022

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1.1 Πραγματικοί Αριθμοί

Διάφορα σύνολα αριθμών μάς είναι γνωστά από τα Μαθηματικά: Το σύνολο των *φυσικών αριθμών*, $N=\{1,2,3,\ldots\}$, το σύνολο των *ακεραίων*, $Z=\{0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\ldots\}$, και το σύνολο των *ρητών*, $Q=\{\,p/q$, όπου p, q ακέραιοι και $q\neq 0\}$. Αριθμοί όπως οι $\sqrt{2},\sqrt{3}$, $\ln 3$, κλπ, που *δεν* μπορούν να τεθούν στη μορφή πηλίκου ακεραίων p/q, καλούνται *άρρητοι*. Όλοι μαζί οι αριθμοί, ρητοί *και* άρρητοι, αποτελούν το σύνολο των *πραγματικών αριθμών*, *R*.

Στο σύνολο R των πραγματικών μπορούν να οριστούν διάφορα είδη *διαστημάτων*:

Ανοιχτό διάστημα:	$(a, b) = \{\, x \,/\, x\in R,\ a < x < b \,\}$
Κλειστό διάστημα:	$[a, b] = \{\, x \,/\, x\in R,\ a \leq x \leq b \,\}$
Ημίκλειστα διαστήματα:	$[a, b) = \{\, x \,/\, x\in R,\ a \leq x < b \,\}$ $(a, b] = \{\, x \,/\, x\in R,\ a < x \leq b \,\}$
Άπειρα διαστήματα:	$(-\infty, c), (c, +\infty), (-\infty, c], [c, +\infty), (-\infty, +\infty)$

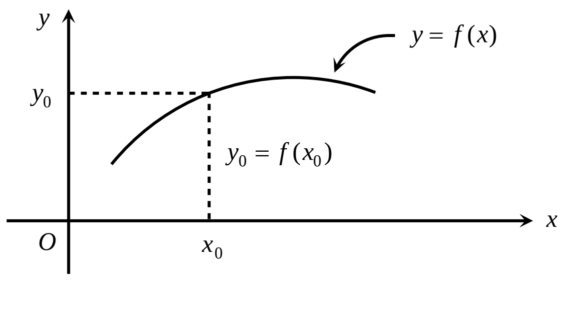
1.2 Συναρτήσεις

Έστω $D \subseteq R$ ένα υποσύνολο του R. Θεωρούμε έναν κανόνα $f : D \to R$, τέτοιον ώστε σε κάθε στοιχείο $x\in D$ να αντιστοιχεί ένα *μοναδικό* στοιχείο $y\in R$. (Είναι, όμως, επιτρεπτό δύο ή περισσότερα στοιχεία τού D να αντιστοιχούν στο ίδιο στοιχείο τού R.) Γράφουμε:

$$(x \in D) \overset{f}{\mapsto} (y \in R) \quad \text{ή} \quad y = f(x)$$

Ο κανόνας f αποτελεί μια *πραγματική συνάρτηση*. Λέμε ότι η *εξαρτημένη μεταβλητή* y είναι συνάρτηση της *ανεξάρτητης μεταβλητής* x. Το σύνολο D καλείται *πεδίο ορισμού* τής f, ενώ το σύνολο $\{\, y= f(x) \,/\, x\in D\}\equiv f(D)$ καλείται *πεδίο τιμών*.

Δοθείσης μίας συνάρτησης $y= f(x)$, μπορούμε να χαράξουμε την αντίστοιχη *γραφική παράσταση*:



Μία συνάρτηση $y= f(x)$ λέγεται *συνεχής* στο σημείο $x=x_0$ αν η τιμή της στο σημείο αυτό, $y_0= f(x_0)$, ορίζεται και είναι ίση με το όριο της $f(x)$ καθώς $x \to x_0$:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Πρακτικά, μπορούμε να πούμε ότι η γραφική παράσταση της $f(x)$ είναι μία συνεχής καμπύλη στο σημείο $x=x_0$ (δεν «σπάει» σε δύο ξεχωριστές καμπύλες στο σημείο αυτό). Αν θέσουμε $x-x_0=\Delta x$ και $f(x)-f(x_0)=y-y_0=\Delta y$, τότε, από τον ορισμό της συνεχούς συνάρτησης έπεται ότι $\Delta y \to 0$ όταν $\Delta x \to 0$.

Η παρακάτω λίστα περιλαμβάνει τις πλέον *στοιχειώδεις συναρτήσεις* που συνήθως συναντούμε:

Σταθερή συνάρτηση:	$y = f(x) = c \quad (c \in R)$
Δυναμοσυνάρτηση:	$y = f(x) = x^a \quad (a \in R)$
Εκθετική συνάρτηση:	$y = f(x) = e^x$
Λογαριθμική συνάρτηση:	$y = f(x) = \ln x$
Τριγωνομετρικές συναρτήσεις:	$y = f(x) = \sin x, \cos x, \tan x, \cot x$
Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις:	$y = f(x) = \arcsin x,\ \arccos x,\ \arctan x,\ \operatorname{arc}\cot x$

Με τη βοήθεια των στοιχειωδών συναρτήσεων μπορούμε να κατασκευάσουμε σύνθετες συναρτήσεις. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $y=g(u)$ και $u=h(x)$. Γράφουμε:

$$y = g[h(x)] \equiv (g \circ h)(x)$$

Ορίζουμε, λοιπόν, τη *σύνθετη συνάρτηση* $f = g \circ h$, έτσι ώστε

$$y = f(x) = g[h(x)] \equiv (g \circ h)(x)$$

Για να απλουστεύσουμε τους συμβολισμούς μας γράφουμε, απλά, $y=y(x)$ αντί $y=f(x)$. Όμοια, $y=y(u)$ και $u=u(x)$. Τότε,

$$y = y(x) \iff [\, y = y(u),\ u = u(x)\,]$$

Παραδείγματα:

1. Η σύνθετη συνάρτηση $y = y(x) = e^{\sqrt{x}}$ αναλύεται σε απλές, ως εξής:

$$y = y(u) = e^u, \quad u = u(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$$

ενώ η $y = y(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$ αναλύεται:

$$y = y(u) = e^u, \quad u = u(w) = \sqrt{w} = w^{1/2}, \quad w = w(x) = x^2 + 1 \quad .$$

2. Η συνάρτηση $y = y(x) = \ln(1+\sin^2 x)$ αναλύεται ως εξής:

$$y = y(u) = \ln u \ , \quad u = u(w) = 1 + w^2 \, , \quad w = w(x) = \sin x \ .$$

3. Η συνάρτηση $y = y(x) = \cos^3 \sqrt{x^6+1}$ αναλύεται:

$$y = y(u) = u^3 , \quad u = u(w) = \cos w , \quad w = w(z) = \sqrt{z} = z^{1/2} , \quad z = z(x) = x^6 + 1 \ .$$

1.3 Πεδία Ορισμού Συναρτήσεων

Έστω συνάρτηση $y=f(x)$. Εξ ορισμού, το πεδίο ορισμού της, D, είναι το μέγιστο υποσύνολο του R για το οποίο ισχύει ότι $y \in R$, $\forall x \in D$. Πρακτικά, αυτό σημαίνει ότι οι τιμές y της $f(x)$ είναι *πραγματικές* και *πεπερασμένες* για όλα τα $x \in D$. Ας δούμε τα πεδία ορισμού μερικών στοιχειωδών συναρτήσεων:

$$y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \quad | \quad D = R = (-\infty, +\infty)$$

$$y = f(x) = \frac{1}{x} \quad | \quad D = R - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$y = f(x) = \sqrt{x} \quad | \quad D = [0, +\infty)$$

$$y = f(x) = e^x \quad | \quad D = R = (-\infty, +\infty)$$

$$y = f(x) = \ln x \quad | \quad D = (0, +\infty)$$

$$y = f(x) = \sin x, \ \cos x \quad | \quad D = R = (-\infty, +\infty)$$

$$y = f(x) = \tan x \quad | \quad D = R - \{k\pi + \pi/2 , \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$$

$$y = f(x) = \cot x \quad | \quad D = R - \{k\pi, \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$$

$$y = f(x) = \arcsin x, \ \arccos x \quad | \quad D = [-1, 1]$$

$$y = f(x) = \arctan x, \ \mathrm{arc}\cot x \quad | \quad D = R = (-\infty, +\infty)$$

Ας δούμε και μερικά παραδείγματα σύνθετων συναρτήσεων:

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{u} \ , \ u = \sqrt{x} \quad | \quad D = (0, +\infty)$$

$$y = \frac{1}{\ln x} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{u} \ , \ u = \ln x \quad | \quad D = (0, +\infty) - \{1\} = (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{\ln x}} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{u} \ , \ u = \sqrt{w} \ , \ w = \ln x \quad | \quad D = (1, +\infty)$$

Άσκηση 1.1 Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

(1) $y=\dfrac{\ln(x^2+1)}{\sqrt{x^6+1}}$ (2) $y=\sqrt{1-x^2}$ (3) $y=\dfrac{\arctan x}{\sqrt{x^2-1}}$ (4) $y=\arccos\left(\dfrac{2x}{x+1}\right)$

(5) $y=\dfrac{\ln(x+5)}{\sqrt{8-x^3}}$ [$\mathit{Υποδ}: a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$]

(6) $y=\ln(\ln x)$ (7) $y=\tan 2x$ (8) $y=\tan\dfrac{x}{3}$

1.4 Πεπλεγμένες και Πλειότιμες Συναρτήσεις

Οι *πεπλεγμένες συναρτήσεις* είναι εκφράσεις της μορφής

$$F(x,y)=0 \qquad (1)$$

(δηλαδή, σχέσεις που συνδέουν τις μεταβλητές x και y) που όμως δεν μας επιτρέπουν να εκφράσουμε απευθείας το y σαν συνάρτηση του x. Στην ειδική περίπτωση που $F(x,y)=f(x)-y$, η σχέση (1) οδηγεί σε μια συνήθη συνάρτηση $y=f(x)$.

Παραδείγματα:

$$F(x,y)\equiv y^3-3xy+x^3=0$$

$$F(x,y)\equiv y+x\,e^y-1=0$$

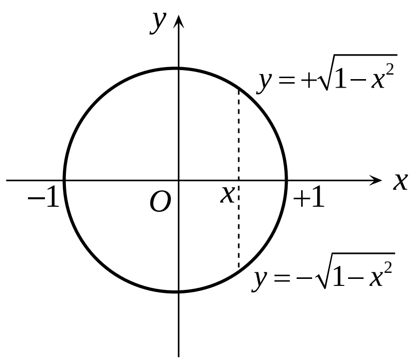
Οι συναρτήσεις που ορίσαμε μέχρι τώρα ήταν *μονότιμες*, με την έννοια ότι, σε κάθε τιμή τού $x\in D$ αντιστοιχεί μία *μοναδική* τιμή τού $y=f(x)$. Μια συνάρτηση που δεν υπακούει σε αυτό τον περιορισμό καλείται *πλειότιμη*. Γενικά, οι πεπλεγμένες συναρτήσεις είναι πλειότιμες.

Παράδειγμα:

$$x^2+y^2=1 \iff F(x,y)\equiv x^2+y^2-1=0 \quad \text{(μοναδιαίος κύκλος)}.$$

Γράφουμε: $y=\pm(1-x^2)^{1/2}$ | $D=[-1,1]$.

Παρατηρούμε ότι, σε κάθε τιμή τού $x\in D$ αντιστοιχούν *δύο* τιμές τού y:



1.5 Εκθετική και Λογαριθμική Συνάρτηση

Θεωρούμε την ακολουθία

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ , \quad n = 1,2,3,\cdots$$

Ορίζουμε:

$$e = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cong 2.7$$

Ορισμός: Έστω πραγματικός αριθμός $a>0$, και έστω ότι

$$a = e^b$$

για κάποιο $b \in R$. Ο αριθμός

$$b = \ln a$$

καλείται *λογάριθμος* του *a*. Προσέξτε ότι *δεν* ορίζεται ο $\ln a$ για $a \leq 0$! Ισχύει ότι

$$\ln a = \ln c \iff a = c$$

Παραδείγματα:

1) $\ln 1 = ?$

Έστω $\ln 1 = x$. Τότε, $1 = e^x \Rightarrow e^x = e^0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow$ $\boxed{\ln 1 = 0}$

2) $\ln e = ?$

Έστω $\ln e = x$. Τότε, $e = e^x \Rightarrow e^x = e^1 \Rightarrow x=1 \Rightarrow$ $\boxed{\ln e = 1}$

3) $\ln (1/e) = ?$

Έστω $\ln (1/e) = x$. Τότε, $1/e = e^x \Rightarrow e^x = e^{-1} \Rightarrow x = -1 \Rightarrow$ $\boxed{\ln (1/e) = -1}$

4) Όμοια, μπορούμε να δείξουμε ότι $\boxed{\ln\sqrt{e} = 1/2\ , \quad \ln(1/\sqrt{e}) = -1/2}$

5) $\lim_{x\to 0^+} \ln x = ?$

Έστω, γενικά, ότι $\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$. Παρατηρούμε ότι $x \to 0^+$ καθώς $y \to -\infty$. Έτσι, αντίστροφα, $y = \ln x \to -\infty$ όταν $x \to 0^+$. Δηλαδή,

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty}$$

Ιδιότητες των λογαρίθμων:

1. $\ln(e^a) = a \;, \quad \forall a \in R$
2. $e^{\ln a} = a \;, \quad \forall a \in R^+$
3. $\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad (a > 0,\; b > 0)$
4. $\ln\dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b = -\ln\dfrac{b}{a} \quad (a > 0,\; b > 0)$
5. $\ln\dfrac{1}{a} = -\ln a \quad (a > 0)$
6. $\ln(a^k) = k \ln a \quad (a > 0,\; k \in R)$

Απόδειξη:

1. Έστω $\ln(e^a) = x \;\Rightarrow\; e^a = e^x \;\Rightarrow\; x = a$.

2. Έστω $e^{\ln a} = x \;\Rightarrow\; \ln a = \ln x \;\Rightarrow\; x = a$.

3. Έστω $\ln a = x$, $\ln b = y$, $\ln(a\,b) = z$. Θα δείξουμε ότι $x+y = z$:

   $\ln(ab) = z \;\Rightarrow\; ab = e^z, \quad \ln a = x \;\Rightarrow\; a = e^x, \quad \ln b = y \;\Rightarrow\; b = e^y$.

   $ab = e^z \;\Rightarrow\; e^x e^y = e^z \;\Rightarrow\; e^{x+y} = e^z \;\Rightarrow\; x + y = z$, *ο.ε.δ.*

4. Έστω $\ln a = x$, $\ln b = y$, $\ln(a/b) = z$. Θα δείξουμε ότι $x-y = z$:

   $\ln(a/b) = z \;\Rightarrow\; a/b = e^z, \quad \ln a = x \;\Rightarrow\; a = e^x, \quad \ln b = y \;\Rightarrow\; b = e^y$.

   $a/b = e^z \;\Rightarrow\; e^x/e^y = e^z \;\Rightarrow\; e^{x-y} = e^z \;\Rightarrow\; x - y = z$, *ο.ε.δ.*

   $\ln(a/b) = \ln a - \ln b = -(\ln b - \ln a) = -\ln(b/a)$.

5. $\ln(1/a) = \ln 1 - \ln a = 0 - \ln a = -\ln a$.

6. Έστω $\ln(a^k) = x$, $\ln a = y$. Θα δείξουμε ότι $x = ky$:

   $\ln(a^k) = x \;\Rightarrow\; a^k = e^x, \quad \ln a = y \;\Rightarrow\; a = e^y$.

   $a^k = e^x \;\Rightarrow\; (e^y)^k = e^x \;\Rightarrow\; e^{ky} = e^x \;\Rightarrow\; ky = x$, *ο.ε.δ.*

Άσκηση 1.2 Δείξτε ότι

$$\ln\left(\frac{a\,b}{c}\right) = \ln a + \ln b - \ln c$$

Άσκηση 1.3 Να βρεθούν οι τιμές των παρακάτω εκφράσεων:

$$(1)\;\ln\left(\sin\frac{\pi}{2}\right) \qquad (2)\;\ln\left(\frac{1}{e^2}\right) \qquad (3)\;\ln\left(\frac{e^2\sqrt{e}}{\sqrt{e^3}}\right)$$

Η συνάρτηση

$$y = f(x) = e^x \equiv \exp x$$

καλείται *εκθετική συνάρτηση*. Αυτή ορίζεται για κάθε $x \in R$. Άρα, το πεδίο ορισμού της είναι $D = R$.

Η συνάρτηση

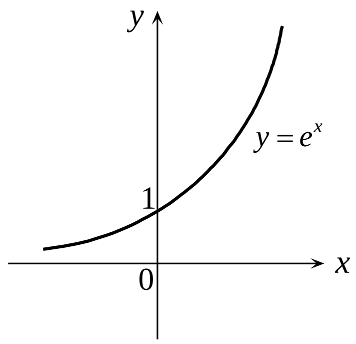
$$y = f(x) = \ln x$$

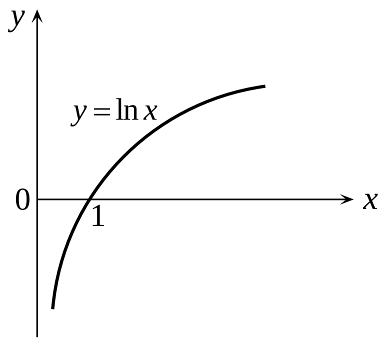
καλείται *λογαριθμική συνάρτηση*. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της; Παρατηρούμε ότι

$$y = \ln x \;\Rightarrow\; x = e^y \;\Rightarrow\; x > 0,\;\; \forall y \in R\;.$$

Άρα, $D = R^+ = (0\,, +\infty)$. Όπως δείξαμε νωρίτερα, $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$.

Γραφικές παραστάσεις:



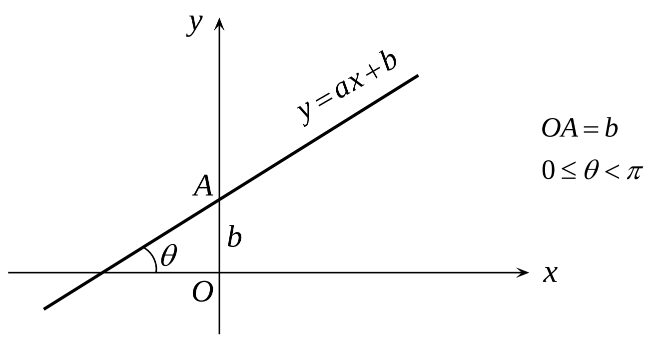


1.6 Γραμμική Συνάρτηση

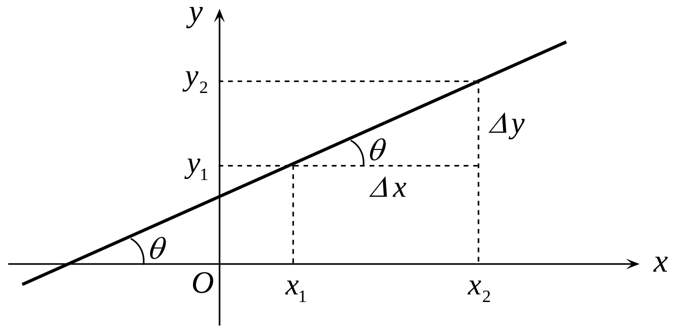
Η συνάρτηση

$$y = f(x) = a\,x + b \qquad (a \neq 0) \tag{1}$$

καλείται *γραμμική συνάρτηση* γιατί παρίσταται γραφικά με μία ευθεία γραμμή:



Παρατηρούμε ότι $f(0)=b$. Η γεωμετρική σημασία τού a βρίσκεται ως εξής:



Έστω ότι $y_1=ax_1+b$, $y_2=ax_2+b$. Αφαιρώντας κατά μέλη και καλώντας $\Delta x=x_2-x_1$, $\Delta y=y_2-y_1$, βρίσκουμε ότι

$$\Delta y = a\,\Delta x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = a \equiv \sigma\tau\alpha\theta. \qquad (2)$$

Η σχέση (2) αποτελεί την αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι μία συνάρτηση $y=f(x)$ γραμμική. Από το σχήμα, τώρα, βλέπουμε ότι $\Delta y/\Delta x=\tan\theta$. Έτσι,

$$a = \tan\theta \qquad (3)$$

Το a καλείται *κλίση* της ευθείας (1).

Πρόβλημα: Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο (x_0 , y_0) και έχει γωνία κλίσης θ ως προς τον άξονα x.

Λύση: Από τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε ότι $\Delta y= a\Delta x$, όπου $a= \tan\theta$ και $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y = y-y_0$. Έτσι,

$$y - y_0 = a\,(x - x_0) \qquad (4)$$

Εναλλακτικά, ζητάμε μία εξίσωση της μορφής (1) για κατάλληλες τιμές των a και b. Το a ισούται με $\tan\theta$. Θέτοντας $x= x_0$ και $y= y_0$ στην (1) , έχουμε: $y_0= a\,x_0+b \Rightarrow b= y_0 - ax_0$. Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή του b στην (1), βρίσκουμε πάλι την (4) .

Πρόβλημα: Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία (x_1 , y_1) και (x_2 , y_2) .

Λύση: Αφού η ευθεία διέρχεται από το σημείο (x_1 , y_1), θα περιγράφεται από μια εξίσωση της μορφής (4) με (x_1 , y_1) στη θέση των (x_0 , y_0): $y - y_1= a\,(x - x_1)$. Από την άλλη, η κλίση a ισούται με $a= \Delta y/\Delta x= (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$. Έτσι έχουμε:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \qquad (5)$$

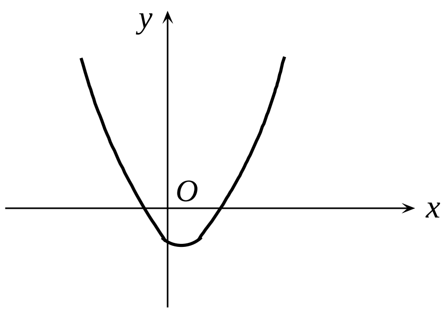
Από τις ιδιότητες των αναλογιών (Παράρτ. IV), (5) $\Rightarrow$ $(y-y_1)/(x-x_1)=(y-y_2)/(x-x_2)$ (δείξτε το!). Έτσι, οδηγούμαστε σε μια σχέση ισοδύναμη της (5).

1.7 Τετραγωνική Συνάρτηση

Η συνάρτηση

$$y = f(x) = a x^2 + b x + c \qquad (a \neq 0)$$

καλείται *τετραγωνική συνάρτηση* και παρίσταται γραφικά με μία *παραβολή*:



Οι *ρίζες* μιας τετραγωνικής συνάρτησης είναι οι πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί ρ_1, ρ_2 για τους οποίους ισχύει ότι $f(\rho_1)= f(\rho_2)=0$. Δίνονται από τη σχέση

$$\rho_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad , \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

Οι ρίζες είναι πραγματικές και διάφορες αν $\Delta>0$, πραγματικές και ίσες αν $\Delta=0$, και μιγαδικές συζυγείς αν $\Delta<0$.

1.8 Άρτιες και Περιττές Συναρτήσεις

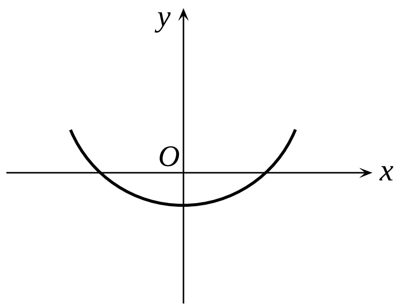
Έστω συνάρτηση $y= f(x)$ με πεδίο ορισμού D. Υποθέτουμε ότι, για κάθε $x\in D$, ισχύει ότι και το $(-x)\in D$. Λέμε ότι

η $f(x)$ είναι *άρτια* αν $\qquad f(-x) = f(x)$, $\forall x\in D$

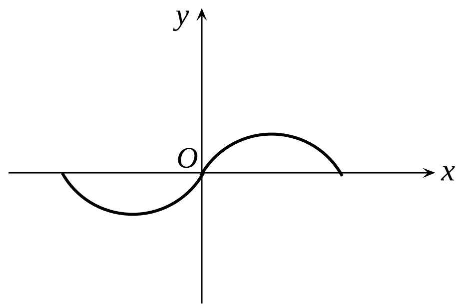
η $f(x)$ είναι *περιττή* αν $\qquad f(-x) = -f(x)$, $\forall x\in D$

(Βέβαια, μία τυχαία συνάρτηση δεν απαιτείται να είναι είτε άρτια, είτε περιττή! Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=x^3+1$ δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή.)

Η γραφική παράσταση μιας *περιττής* συνάρτησης περνάει πάντα από την αρχή των αξόνων (υπό την προϋπόθεση, βέβαια, ότι η τιμή $x=0$ ανήκει στο D). Πράγματι: θέτοντας $x=0$ στη σχέση $f(-x)+ f(x)=0$, βρίσκουμε ότι $f(0)=0$.



Άρτια συνάρτηση



Περιττή συνάρτηση

Παραδείγματα:

Άρτιες	Περιττές
$f(x) = c,\ x^2,\ x^4,\ x^6,\ \cdots$	$f(x) = x,\ x^3,\ x^5,\ x^7,\ \cdots$
$f(x) = \|x\|$	$f(x) = \sin x$
$f(x) = \cos x$	$f(x) = \tan x,\ \cot x$
$f(x) = e^x + e^{-x}$	$f(x) = e^x - e^{-x}$

Άσκηση 1.4 Δείξτε τα παρακάτω:

- Το γινόμενο ή το πηλίκο δύο *άρτιων* ή δύο *περιττών* συναρτήσεων είναι *άρτια* συνάρτηση.
- Το γινόμενο ή το πηλίκο μιας *άρτιας* και μιας *περιττής* συνάρτησης είναι *περιττή* συνάρτηση.
- Το άθροισμα ή η διαφορά δύο *άρτιων* συναρτήσεων είναι *άρτια* συνάρτηση.
- Το άθροισμα ή η διαφορά δύο *περιττών* συναρτήσεων είναι *περιττή* συνάρτηση.
- Το άθροισμα μιας άρτιας και μιας περιττής συνάρτησης δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή συνάρτηση.

Πρόταση: *Κάθε* συνάρτηση $f(x)$ μπορεί να γραφεί σαν το άθροισμα μιας *άρτιας* συνάρτησης $A(x)$ και μιας *περιττής* συνάρτησης $\Pi(x)$.

Απόδειξη: Γράφουμε:

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] \equiv A(x) + \Pi(x)$$

$$A(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)], \quad \Pi(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$$

Δεν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι $A(-x) = A(x)$ και $\Pi(-x) = -\Pi(x)$.

Παράδειγμα: Για $f(x) = e^x$, γράφουμε:

$$e^x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) + \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \equiv A(x) + \Pi(x)$$

Άσκηση 1.5 Για κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις, εξετάστε αν είναι άρτια, περιττή, ή τίποτα από τα δύο:

(1) $f(x)=2x^4-3x^2+1$ (2) $f(x)=2x^3-3x$ (3) $f(x)=x^5+1$

(4) $f(x)=|x+1|+|x-1|$ (5) $f(x)=|x+1|-|x-1|$ (6) $f(x)=\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$

(7) $f(x)=x^3\sin x$ (8) $f(x)=x^3\cos x$ (9) $f(x)=\dfrac{\tan x}{x^5}$ (10) $f(x)=\dfrac{\cot x}{x^6}$

1.9 Περιοδικές Συναρτήσεις

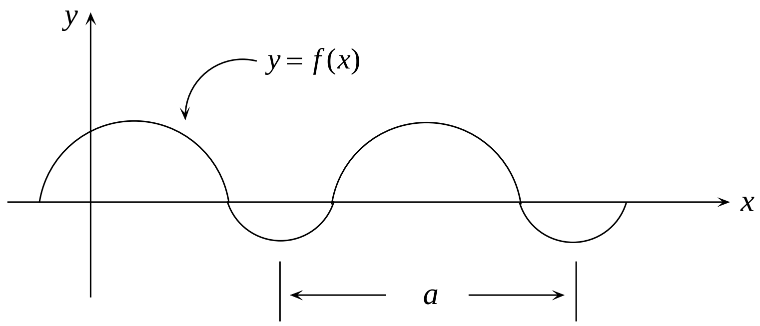
Μία συνάρτηση $y=f(x)$ καλείται *περιοδική* με *περίοδο* $a\neq 0$ αν

$$f(x+a)=f(x) \qquad (1)$$

Αν ισχύει η (1), τότε ισχύει γενικότερα και ότι

$$f(x+ka)=f(x)\,, \quad k=\pm1, \pm2, \pm3, \dots$$

(δείξτε το!). Δηλαδή, αν το a είναι περίοδος της $f(x)$, τότε και το ka (όπου k ακέραιος) επίσης είναι περίοδος της $f(x)$. Συνήθως, με τον όρο «περίοδος» εννοούμε τη *μικρότερη θετική περίοδο* μιας περιοδικής συνάρτησης.



Παραδείγματα:

Στα παρακάτω παραδείγματα θα κάνουμε χρήση των τριγωνομετρικών εξισώσεων που εκτίθενται στο Παράρτημα ΙΙ.

1. $y=f(x)=\sin x$. Ελέγχουμε αν η f είναι περιοδική με περίοδο a:

$$f(x+a)=f(x) \;\Rightarrow\; \sin(x+a)=\sin x \;\Rightarrow\; x+a=x+2k\pi \;\text{ ή }\; x+a=(2k+1)\pi-x$$

έτσι ώστε $a=2k\pi$ ή $a=(2k+1)\pi-2x$ ($k=0, \pm1, \pm2, \pm3, \dots$). Η δεύτερη λύση απορρίπτεται, αφού το a πρέπει να είναι σταθερό, ανεξάρτητο του x. Η λύση $a=2k\pi$ παίρνει την ελάχιστη θετική τιμή της για k=1. Άρα, η $y=f(x)=\sin x$ είναι περιοδική με (ελάχιστη) περίοδο

$$a=2\pi$$

2. $y=f(x)=\cos x$. Δείξτε ότι και η συνάρτηση αυτή είναι περιοδική με περίοδο

$$a=2\pi$$

3. $y=f(x)=\sin 2x$ ή $\cos 2x$. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις αυτές είναι περιοδικές με περίοδο

$$a=\pi$$

4. $y=f(x)=\sin(x/2)$ ή $\cos(x/2)$. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις αυτές είναι περιοδικές με περίοδο

$$a=4\pi$$

5. $y=f(x)=\sin\lambda x$ ή $\cos\lambda x$ ($\lambda\in R^+$). Δείξτε ότι οι συναρτήσεις αυτές είναι περιοδικές με περίοδο

$$a=2\pi/\lambda$$

6. $y=f(x)=\tan x$ ή $\cot x$. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις αυτές είναι περιοδικές με περίοδο

$$a=\pi$$

7. $y=f(x)=\tan\lambda x$ ή $\cot\lambda x$ ($\lambda\in R^+$). Δείξτε ότι οι συναρτήσεις αυτές είναι περιοδικές με περίοδο

$$a=\pi/\lambda$$

8. Κάθε *σταθερή* συνάρτηση $y=f(x)=c$ είναι περιοδική με *αυθαίρετη* περίοδο. Πράγματι: $f(x+a)=c=f(x)$, για κάθε a.

Άσκηση 1.6 Δείξτε τα παρακάτω:

- Αν η $f(x)$ είναι περιοδική με περίοδο a, τότε και οι $\lambda f(x)$ και $f(x)+c$ (όπου λ, c σταθερές) είναι επίσης περιοδικές με περίοδο a.
- Έστω ότι οι $f_1(x)$ και $f_2(x)$ είναι περιοδικές με περίοδο a. Τότε, και οι συναρτήσεις $f_1(x)\pm f_2(x)$ είναι περιοδικές με περίοδο a.
- Έστω ότι οι $f_1(x)$ και $f_2(x)$ είναι περιοδικές με περίοδο a. Τότε, και οι συναρτήσεις $f_1(x)\cdot f_2(x)$ και $f_1(x)/f_2(x)$ είναι περιοδικές με περίοδο a (αν και, σ' αυτή την περίπτωση, το a μπορεί να μην είναι η *ελάχιστη* περίοδος του γινομένου ή του πηλίκου).

Έστω τώρα ότι οι $f_1(x)$ και $f_2(x)$ είναι περιοδικές, με αντίστοιχες *ελάχιστες* περιόδους a_1 και a_2. Θέλουμε να ελέγξουμε αν το άθροισμα $f_1(x)+f_2(x)$ είναι περιοδική συνάρτηση. Αυτό θα συμβεί αν οι $f_1(x)$ και $f_2(x)$ έχουν κάποια κοινή περίοδο, όχι απαραίτητα ελάχιστη για την $f_1(x)$ ή την $f_2(x)$. Τα σύνολα των θετικών περιόδων των δύο συναρτήσεων είναι:

$$S_1=\{ka_1/k=1,2,3,\cdots\}=\{a_1,2a_1,3a_1,\cdots\},$$
$$S_2=\{ka_2/k=1,2,3,\cdots\}=\{a_2,2a_2,3a_2,\cdots\}$$

Ας υποθέσουμε ότι $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$ (δηλαδή, η τομή των S_1 και S_2 δεν είναι το κενό σύνολο). Τότε, η συνάρτηση $f_1(x)+f_2(x)$ είναι περιοδική, με περίοδο το *ελάχιστο* εκ των στοιχείων του συνόλου $S_1 \cap S_2$.

Τι μπορούμε να πούμε για τις συναρτήσεις $f_1(x)\cdot f_2(x)$ και $f_1(x)/f_2(x)$; Και πάλι, το ελάχιστο εκ των στοιχείων του συνόλου $S_1 \cap S_2$ είναι περίοδος για τις συναρτήσεις αυτές, είναι όμως δυνατό να μην είναι η *ελάχιστη* περίοδός τους. Ας δούμε ένα παράδειγμα:

Θα ελέγξουμε την περιοδικότητα της συνάρτησης $f(x)=\tan x$. Μπορούμε να δουλέψουμε με δύο τρόπους:

(α) $f(x+a)=f(x) \Rightarrow \tan(x+a)=\tan x \Rightarrow x+a=x+k\pi \Rightarrow a=k\pi$ (k=1,2,3,...). Η ελάχιστη τιμή της περιόδου είναι $a=\pi$.

(β) Γράφουμε τη δοσμένη συνάρτηση στη μορφή πηλίκου: $f(x)=\sin x/\cos x$. Οι συναρτήσεις στον αριθμητή και τον παρονομαστή είναι περιοδικές, με κοινή (ελάχιστη) περίοδο 2π. Αυτή θα είναι επίσης περίοδος και για την $f(x)$, θα είναι όμως η *ελάχιστη* περίοδός της; Έστω a η ζητούμενη ελάχιστη περίοδος της $f(x)$. Τότε,

$$f(x+a)=f(x) \Rightarrow \frac{\sin(x+a)}{\cos(x+a)}=\frac{\sin x}{\cos x} .$$

Αυτό ικανοποιείται με δύο τρόπους:

- $\sin(x+a)=\sin x$ και $\cos(x+a)=\cos x \Rightarrow x+a=x+2k\pi$, ή
- $\sin(x+a)=-\sin x$ και $\cos(x+a)=-\cos x \Rightarrow x+a=x+(2k+1)\pi$.

Έτσι, $a=2k\pi$ ή $a=(2k+1)\pi$. Τα δύο αυτά αποτελέσματα συνδυάζονται αν γράψουμε $a=\lambda\pi$ (λ=1,2,3,...). Η ελάχιστη περίοδος λαμβάνεται για $\lambda=1$, έτσι ώστε $a=\pi$. Παρατηρούμε ότι η περίοδος του πηλίκου $\sin x/\cos x$ (ίση με π) είναι *μικρότερη* από την περίοδο 2π των $\sin x$ και $\cos x$!

Παραδείγματα:

1. Να εξεταστεί η περιοδικότητα των συναρτήσεων $f(x)=\sin\sqrt{x}$ και $f(x)=\sin x^2$.

Δείξτε ότι, και στις δύο περιπτώσεις, η σχέση $f(x+a)=f(x)$ οδηγεί σε εκφράσεις για το a που δεν είναι σταθερές ποσότητες αλλά συναρτήσεις του x. Άρα, καμία από τις συναρτήσεις αυτές δεν είναι περιοδική.

2. Να εξεταστεί ως προς την περιοδικότητά της η συνάρτηση $f(x)=3\sin 2x+2\cos 3x$.

Λύση: Έστω $f_1(x)=3\sin 2x$ και $f_2(x)=2\cos 3x$. Τότε, $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$. Η $f(x)$ θα είναι περιοδική αν οι $f_1(x)$ και $f_2(x)$ έχουν κάποια κοινή περίοδο, δηλαδή, αν $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$, όπου S_1 και S_2 είναι τα σύνολα των περιόδων των δύο συναρτήσεων. Η περίοδος της $f(x)$ θα είναι τότε το ελάχιστο εκ των στοιχείων του συνόλου $S_1 \cap S_2$. Τώρα, θυμίζουμε ότι οι συναρτήσεις $\sin \lambda x$ και $\cos \lambda x$ είναι περιοδικές με ελάχιστη περίοδο $2\pi/\lambda$. Έτσι, το σύνολο των περιόδων σε κάθε περίπτωση είναι $2k\pi/\lambda$ (k=1,2,3,...). Αναλυτικά, θέτοντας $\lambda=2$ και $\lambda=3$,

$$S_1 = \{k\pi \ / \ k = 1,2,3,\cdots\} = \{\pi, 2\pi, 3\pi, \cdots\} \ ,$$
$$S_2 = \{\frac{2k\pi}{3} \ / \ k = 1,2,3,\cdots\} = \{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi, \cdots\}$$

Παρατηρούμε ότι το ελάχιστο στοιχείο της τομής $S_1 \cap S_2$ είναι το 2π. Άρα, η δοσμένη συνάρτηση $f(x)$ είναι περιοδική με περίοδο $a=2\pi$.

3. Να εξεταστεί η περιοδικότητα της συνάρτησης $f(x) = \sin^2 x$.

Λύση: $f(x+a)=f(x) \Rightarrow \sin^2(x+a)=\sin^2 x$. Αυτό ικανοποιείται με δύο τρόπους:

- $\sin(x+a) = \sin x \ \Rightarrow \ x+a = x+2k\pi$ ή $x+a = (2k+1)\pi - x$ (αποκλείεται),
- $\sin(x+a) = -\sin x \ \Rightarrow \ x+a = x+(2k+1)\pi$ ή $x+a = 2k\pi - x$ (αποκλείεται).

(Οι δύο λύσεις που αποκλείστηκαν δίνουν εκφράσεις για το a που εξαρτώνται από το x.) Έτσι έχουμε ότι $a=2k\pi$ ή $a=(2k+1)\pi$. Τα δύο αυτά αποτελέσματα συνδυάζονται αν γράψουμε $a=\lambda\pi$ (λ=1,2,3,...). Η ελάχιστη περίοδος λαμβάνεται για $\lambda=1$, έτσι ώστε $a=\pi$. Η δοσμένη συνάρτηση, λοιπόν, είναι περιοδική με περίοδο $a=\pi$.

4. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$1, \ \cos\omega t, \ \sin\omega t, \ \cos 2\omega t, \ \sin 2\omega t, \ \dots, \ \cos n\omega t, \ \sin n\omega t, \ \dots$$

(όπου ω=*σταθ.*). Η σταθερή συνάρτηση 1 είναι περιοδική με *αυθαίρετη* περίοδο. Οι υπόλοιπες συναρτήσεις έχουν κοινή περίοδο $T=2\pi/\omega$, αυτή όμως είναι *ελάχιστη* περίοδος μόνο για τις $\cos\omega t$ και $\sin\omega t$ (γενικά, οι $\cos n\omega t$ και $\sin n\omega t$ έχουν ελάχιστη περίοδο ίση με $2\pi/n\omega=T/n$). Θεωρούμε τώρα μια συνάρτηση $f(t)$ που εκφράζεται στη μορφή σειράς της οποίας οι όροι εμπεριέχουν τις παραπάνω συναρτήσεις πολλαπλασιασμένες με αυθαίρετους (σταθερούς) συντελεστές:

$$f(t) = a_0 + (a_1\cos\omega t + b_1\sin\omega t) + (a_2\cos 2\omega t + b_2\sin 2\omega t) + \dots +$$
$$+ (a_n\cos n\omega t + b_n\sin n\omega t) + \dots$$

ή

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

Σύμφωνα με αυτά που γνωρίζουμε, η $f(t)$ είναι περιοδική με περίοδο $T=2\pi/\omega$. Δηλαδή, $f(t+T) = f(t)$. (*Σημείωση:* Μπορεί να αποδειχθεί ότι *κάθε* περιοδική συνάρτηση με περίοδο T μπορεί να εκφραστεί στη μορφή σειράς όπως η παραπάνω, με $\omega=2\pi/T$ και κατάλληλους συντελεστές a_n, b_n. Η σειρά αυτή καλείται *σειρά Fourier*.)

Άσκηση 1.7 Δείξτε ότι η συνάρτηση που παρίσταται με σειρά Fourier:

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2\pi n t}{T}+b_n\sin\frac{2\pi n t}{T}\right)$$

είναι περιοδική, με περίοδο T.

Άσκηση 1.8 Να εξεταστούν ως προς την περιοδικότητά τους οι παρακάτω συναρτήσεις:

(1) $f(x)=\sin 2x+\cos\sqrt{2}\,x$ (2) $f(x)=2\cos(x/2)-5\sin(x/3)$

(3) $f(x)=5\sin 2x-3\cos^2 x$ (4) $f(x)=\tan\lambda x$

1.10 Αντίστροφη Συνάρτηση

Έστω $y=f(x)$ μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού D. Το πεδίο τιμών της είναι το σύνολο $B=\{f(x)\,/\,x\in D\}\equiv f(D)$. Η συνάρτηση προσδιορίζει μία *απεικόνιση* του συνόλου D πάνω στο σύνολο B, έτσι ώστε σε κάθε σημείο $x\in D$ να αντιστοιχεί ένα *μοναδικό* σημείο $y\in B$. Αν, επιπλέον, σε κάθε σημείο $y\in B$ αντιστοιχεί ένα *μοναδικό* σημείο $x\in D$, η απεικόνιση καλείται *αμφιμονοσήμαντη* ή «ένα-προς-ένα» (1-1). Σε μια τέτοια περίπτωση,

$$x_1=x_2 \Leftrightarrow f(x_1)=f(x_2) \qquad \text{ή} \qquad x_1\neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$$

Μία συνάρτηση $y=f(x)$ που είναι 1-1 καλείται *αντιστρέψιμη* γιατί μας επιτρέπει να ορίσουμε την *αντίστροφη συνάρτηση* $x=f^{-1}(y)$ με πεδίο ορισμού το B και πεδίο τιμών το D, έτσι ώστε

$$f^{-1}[f(x)]=x\ , \qquad f[f^{-1}(y)]=y$$

Παρατηρούμε ότι

$$(f^{-1}\circ f)(x)=x\ , \qquad (f\circ f^{-1})(y)=y$$

Λέμε ότι η σύνθεση των f και f^{-1} ισούται με την *ταυτοτική συνάρτηση*.

Παραδείγματα:

1. Η συνάρτηση $y=f(x)=x^3$ είναι 1-1, με $D=B=R$. Η αντίστροφη συνάρτηση είναι η $x=f^{-1}(y)=\sqrt[3]{y}$.

2. Η συνάρτηση $y=f(x)=e^x$ είναι 1-1, με $D=R$ και $B=R^+$. Η αντίστροφη συνάρτηση είναι η $x=f^{-1}(y)=\ln y$.

3. Η συνάρτηση $y = f(x) = x^2$ με $D=R$ και $B=[0, +\infty)$ *δεν* είναι 1-1, αφού σε κάθε τιμή $y>0$ αντιστοιχούν *δύο* τιμές $x = \pm\sqrt{y}$. Άρα, η συνάρτηση αυτή *δεν* είναι αντιστρέψιμη (η αντίστροφη συνάρτηση είναι *πλειότιμη*) (βλ. Παρ.1.4).

4. Η συνάρτηση $y = f(x) = \sin x$ με $D=R$ και $B=[-1, 1]$ δεν είναι 1-1, αφού σε κάθε τιμή $y \in [-1, 1]$ αντιστοιχούν *άπειρες* τιμές τού $x = \operatorname{arc}\sin y$. Άρα, η συνάρτηση αυτή *δεν* είναι αντιστρέψιμη.

1.11 Μονοτονία Συνάρτησης

Έστω συνάρτηση $y = f(x)$ με πεδίο ορισμού D. Θεωρούμε ένα διάστημα $[a, b] \subseteq D$. Η f λέγεται *αύξουσα* στο $[a, b]$ αν, για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in [a, b]$ τέτοια ώστε $x_1 < x_2$, ισχύει ότι $f(x_1) < f(x_2)$, ενώ λέγεται *φθίνουσα* στο διάστημα αυτό αν, για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in [a, b]$ τέτοια ώστε $x_1 < x_2$, ισχύει ότι $f(x_1) > f(x_2)$. Μία συνάρτηση που είναι αύξουσα ή φθίνουσα σε κάποιο διάστημα λέγεται *μονότονη* στο διάστημα αυτό.

Άσκηση 1.9 Δείξτε ότι μια συνάρτηση f που είναι μονότονη σε *ολόκληρο* το πεδίο ορισμού της είναι *αντιστρέψιμη*, και η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} επίσης είναι μονότονη (αύξουσα ή φθίνουσα, σε αντιστοιχία με την f).

Παραδείγματα:

1. Η γραμμική συνάρτηση $y = ax + b$ είναι αύξουσα για $a>0$ και φθίνουσα για $a<0$.

2. Η συνάρτηση $y = e^x$ είναι αύξουσα σε ολόκληρο τον άξονα x.

3. Η συνάρτηση $y = e^{-x}$ είναι φθίνουσα σε ολόκληρο τον άξονα x.

4. Η συνάρτηση $y = x^2$ είναι φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

(Αποδείξτε τις παραπάνω προτάσεις.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ

2.1 Ορισμός

Κατά μία έννοια, η παράγωγος είναι ένας «δείκτης ευαισθησίας» μιας συνάρτησης $y=f(x)$ στις μικρές μεταβολές τού x. Όσο μεγαλύτερες είναι οι αντίστοιχες μεταβολές τού y, τόσο μεγαλύτερη είναι και η ευαισθησία της συνάρτησης. Η ευαισθησία αυτή μεταβάλλεται, γενικά, με το x. Η παρατήρηση αυτή μας οδηγεί στον ορισμό μιας νέας συνάρτησης $y' = f'(x)$, της παραγώγου τής $f(x)$.

Έστω $y=f(x)$ μία συνεχής συνάρτηση. Θεωρούμε μια αυθαίρετη μεταβολή τού x: $x \to x+\Delta x$. Αυτή επάγει μια αντίστοιχη μεταβολή τού y: $y \to y+\Delta y$, όπου

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \quad \text{έτσι ώστε} \quad y+\Delta y = f(x) + \Delta y = f(x+\Delta x) \ .$$

Ένα μέτρο της ευαισθησίας τής $f(x)$ στο σημείο x είναι το πηλίκο $\Delta y/\Delta x$, με την προϋπόθεση ότι το Δx είναι πολύ μικρό. Αναλυτικά,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Η έκφραση αυτή είναι, γενικά, συνάρτηση *δύο* ανεξάρτητων μεταβλητών, του x και του Δx. Αν όμως πάρουμε το όριο του $\Delta y/\Delta x$ για $\Delta x \to 0$, το αποτέλεσμα θα εξαρτάται μόνο από το x, θα είναι δηλαδή μία συνάρτηση του x. Η συνάρτηση αυτή καλείται *παράγωγος* της $f(x)$ και συμβολίζεται $f'(x)$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Συχνά θα γράφουμε $y' = f'(x)$. Η τιμή τής $f'(x)$ σε ένα σημείο $x=x_0$ συμβολίζεται $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) \equiv f'(x)|_{x=x_0}$$

Παραδείγματα:

1. $y=f(x)=c$ (σταθερή συνάρτηση). Έχουμε:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = c - c = 0 \ \Rightarrow \ \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0 \ \Rightarrow \ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

Άρα,

$$y' = (c)' = 0$$

2. $y = f(x) = ax + b$ (γραμμική συνάρτηση). Έχουμε:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = [a(x+\Delta x)+b] - (ax+b) = a\Delta x \;\Rightarrow$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a \;\Rightarrow\; \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$$

Άρα,

$$y' = (ax+b)' = a$$

3. $y = f(x) = x^2$. Έχουμε:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 \;\Rightarrow$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x \;\Rightarrow\; \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$$

Άρα,

$$y' = (x^2)' = 2x$$

4. $y = f(x) = x^3$. Έχουμε:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 \;\Rightarrow$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2 \;\Rightarrow\; \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2$$

Άρα,

$$y' = (x^3)' = 3x^2$$

5. $y = f(x) = x^a \;(a \in R)$. Όπως μπορεί να δειχθεί,

$$y' = (x^a)' = a x^{a-1}$$

Σαν παραδείγματα,

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \left(x^{-2}\right)' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(x^{-1/2}\right)' = -\frac{1}{2}x^{-3/2} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$$

Η παράγωγος μίας συνάρτησης επιδέχεται γεωμετρική ερμηνεία, την οποία θα συζητήσουμε στην Παρ.2.10.

2.2 Κανόνες Παραγώγισης

1. Παράγωγος αθροίσματος συναρτήσεων:

$$\left(f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \right)' = f_1'(x) \pm f_2'(x) \pm \cdots$$

- *Η παράγωγος αθροίσματος (ή διαφοράς) συναρτήσεων ισούται με το άθροισμα (ή τη διαφορά) των παραγώγων των συναρτήσεων.*

2. Παράγωγος γινομένου συναρτήσεων (*κανόνας του Leibniz*):

$$\left(f_1(x) f_2(x) \right)' = f_1'(x) f_2(x) + f_1(x) f_2'(x)$$

$$\left(f_1(x) f_2(x) f_3(x) \right)' = f_1'(x) f_2(x) f_3(x) + f_1(x) f_2'(x) f_3(x) + f_1(x) f_2(x) f_3'(x)$$

κλπ. Ειδικά, αν c είναι μια σταθερά, και με δεδομένο ότι $(c)' = 0$,

$$[c f(x)]' = c f'(x)$$

3. Παράγωγος πηλίκου συναρτήσεων:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{[g(x)]^2}$$

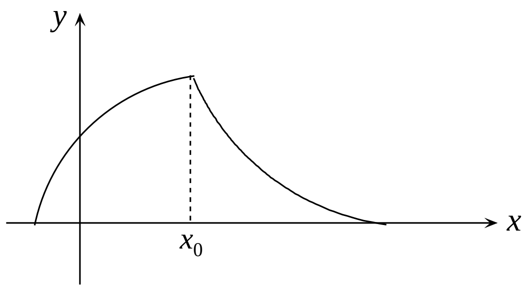
Άσκηση 2.1 Υπολογίστε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

(1) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{2} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ (2) $y = \dfrac{\sin x}{x}$ (3) $y = 2\sqrt{x^3}\, e^x - \dfrac{3 \ln x}{x}$

Ισχύει η εξής σημαντική πρόταση:

Αν η παράγωγος $f'(x)$ μιας συνάρτησης $f(x)$ ορίζεται στο σημείο $x=x_0$, η συνάρτηση είναι *συνεχής* στο σημείο αυτό.

(Σκεφτείτε το ως εξής: Αν υπάρχει ασυνέχεια στο σημείο x_0, το Δy δεν τείνει στο μηδέν καθώς $\Delta x \to 0$, και το όριο του $\Delta y/\Delta x$ δεν αποκτά πεπερασμένη τιμή.) Προσέξτε ότι το αντίστροφο *δεν* ισχύει γενικά: υπάρχουν συναρτήσεις που είναι συνεχείς σε κάποιο σημείο όπου η παράγωγός τους δεν ορίζεται. Για παράδειγμα, η κατεύθυνση της γραφικής παράστασης της $f(x)$ μπορεί να αλλάζει απότομα στο σημείο $x=x_0$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Η παράγωγος $f'(x)$, τότε, είναι ασυνεχής στο x_0, με βάση την γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου που θα δούμε στην Παρ. 2.10.



2.3 Παράγωγοι Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων

1. Για την συνάρτηση $y = f(x) = \sin x$ έχουμε:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

Όμως,

$$\sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{(x + \Delta x) - x}{2}\cos\frac{(x + \Delta x) + x}{2} = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x + \Delta x}{2}$$

Έτσι,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x + \Delta x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x + \Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$= \left(\lim_{\frac{\Delta x}{2} \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \right)\left(\lim_{\Delta x \to 0} \cos\frac{2x + \Delta x}{2} \right) = 1 \cdot \cos\frac{2x + 0}{2}$$

όπου λάβαμε υπόψη ότι, γενικά,

$$\lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

Άρα,

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$$

2. Έστω $y = f(x) = \cos x$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x}$$

Έχουμε:

$$\cos(x + \Delta x) - \cos x = 2\sin\frac{(x + \Delta x) + x}{2}\sin\frac{x - (x + \Delta x)}{2} = -2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\frac{2x + \Delta x}{2}$$

Έτσι,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\frac{2x+\Delta x}{2}}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\frac{2x+\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$= -\left(\lim_{\frac{\Delta x}{2} \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right)\left(\lim_{\Delta x \to 0} \sin\frac{2x+\Delta x}{2}\right) = -1 \cdot \sin\frac{2x+0}{2}$$

Άρα,

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

3. Για την συνάρτηση $y = f(x) = \tan x$ έχουμε:

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \Rightarrow$$

$$\boxed{(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

Όμοια,

$$\boxed{(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}}$$

2.4 Πίνακας Παραγώγων Στοιχειωδών Συναρτήσεων

$(c)' = 0 \quad (c = \sigma\tau\alpha\theta.)$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in R)$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(e^x)' = e^x$	$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\mathrm{arc}\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

2.5 Παράγωγοι Σύνθετων Συναρτήσεων

Έστω $y=f(u)$ και $u=\varphi(x)$ δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Ορίζουμε τη σύνθετη συνάρτηση

$$y=(f\circ\varphi)(x)\equiv f[\varphi(x)]$$

Η παράγωγος της συνάρτησης αυτής ως προς x ισούται με

$$y'=(f\circ\varphi)'(x)=f'(u)\,\varphi'(x)$$

Απόδειξη: Έχουμε ότι $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta y}{\Delta u}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$. Επειδή η φ είναι συνεχής (γιατί;), $\Delta u\to 0$ όταν $\Delta x\to 0$. Τώρα,

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=\left(\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\right)\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=f'(u)\varphi'(x)$$

Θα υιοθετήσουμε τους πιο απλούς συμβολισμούς $y=y(u)$ και $u=u(x)$, έτσι ώστε, με τη σύνθεση αυτών των συναρτήσεων, $y=y(x)$. Θα γράφουμε, τότε,

$$y'(x)=y'(u)\,u'(x)$$

Σε πιο σύνθετες περιπτώσεις, $y=y(u)$, $u=u(w)$ και $w=w(x)$, έτσι ώστε $y=y(x)$ και

$$y'(x)=y'(u)\,u'(w)\,w'(x)$$

κλπ.

Παραδείγματα:

1. $y(x)=e^{2x}$. Γράφουμε: $y(u)=e^u$, $u(x)=2x$. Τότε,

$$y'(x)=y'(u)u'(x)=(e^u)'(2x)'=2e^u \;\Rightarrow\; (e^{2x})'=2e^{2x}$$

2. $y(x)=e^{-x}$. Γράφουμε: $y(u)=e^u$, $u(x)=-x$. Τότε,

$$y'(x)=y'(u)u'(x)=(e^u)'(-x)'=-e^u \;\Rightarrow\; (e^{-x})'=-e^{-x}$$

3. Γενικά,

$$\boxed{(e^{ax})'=ae^{ax}\quad(a\in R)}$$

4. $y(x)=e^{\sqrt{x^2+1}}$. Γράφουμε: $y(u)=e^u$, $u(w)=\sqrt{w}=w^{1/2}$, $w(x)=x^2+1$. Τότε,

$$y'(x)=y'(u)\,u'(w)\,w'(x)=(e^u)'(w^{1/2})'(x^2+1)'=e^u\left(\frac{1}{2}w^{-1/2}\right)(2x+0)=\frac{xe^u}{\sqrt{w}}=\frac{xe^{\sqrt{w}}}{\sqrt{w}}\Rightarrow$$

$$\left(e^{\sqrt{x^2+1}}\right)'=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,e^{\sqrt{x^2+1}}$$

5. Γενικά,

$$\boxed{\left(e^{f(x)}\right)'=f'(x)e^{f(x)}}$$

6. Όπως μπορούμε εύκολα να δείξουμε,

$$\boxed{(\sin ax)'=a\cos ax\,,\quad (\cos ax)'=-a\sin ax\quad (a\in R)}$$

Γενικότερα,

$$\boxed{\begin{array}{ll}[\sin f(x)]'=f'(x)\cos f(x)\,, & [\cos f(x)]'=-f'(x)\sin f(x)\\ [\tan f(x)]'=f'(x)/\cos^2 f(x)\,, & [\cot f(x)]'=-f'(x)/\sin^2 f(x)\end{array}}$$

7. $y(x)=\ln(\sin x)$. Γράφουμε: $y(u)=\ln u$, $u(x)=\sin x$. Τότε,

$$y'(x)=y'(u)\,u'(x)=(\ln u)'(\sin x)'=\frac{1}{u}\cos x=\frac{\cos x}{\sin x}\Rightarrow$$

$$\boxed{[\ln(\sin x)]'=\cot x}$$

Όμοια,

$$\boxed{[\ln(\cos x)]'=-\tan x}$$

Γενικότερα,

$$\boxed{[\ln f(x)]'=\frac{f'(x)}{f(x)}}$$

8. Ισχύει, γενικά, ότι

$$\boxed{\left([f(x)]^a\right)'=a\,[f(x)]^{a-1}f'(x)\quad (a\in R)}$$

Σαν παραδείγματα,

$$(\sin^2 x)'\equiv[(\sin x)^2]'=2\sin x(\sin x)'=2\sin x\cos x=\sin 2x$$

$$(\sqrt{\ln x})'\equiv[(\ln x)^{1/2}]'=\frac{1}{2}(\ln x)^{-1/2}(\ln x)'=\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$$

2.6 Παράγωγοι Συναρτήσεων της Μορφής $y=[f(x)]^{\varphi(x)}$

Έστω συνάρτηση της μορφής $y=[f(x)]^{\varphi(x)}$, όπου $f(x)>0$ για όλες τις τιμές τού x σε κάποιο υποσύνολο του πεδίου ορισμού τής f. Ζητούμε την παράγωγο y' ως προς x.

Τέχνασμα: Θα γράφουμε:

$$f(x)=e^{\ln f(x)} \quad \text{έτσι ώστε} \quad y=\left[e^{\ln f(x)}\right]^{\varphi(x)}=e^{\varphi(x)\ln f(x)}\equiv e^{g(x)}.$$

Τότε,

$$\begin{aligned} y'=[e^{g(x)}]'=g'(x)e^{g(x)}=g'(x)e^{\varphi(x)\ln f(x)}&=[\varphi(x)\ln f(x)]'\,[f(x)]^{\varphi(x)} \\ &=[\varphi(x)\ln f(x)]'\,y \end{aligned}$$

Παραδείγματα:

1. $y=a^x$ $(a>0)$. Γράφουμε:

$$\begin{aligned} &a=e^{\ln a} \;\Rightarrow\; y=a^x=(e^{\ln a})^x=e^{x\ln a} \\ &y'=(e^{x\ln a})'=(x\ln a)'e^{x\ln a}=(\ln a)\,a^x \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\boxed{(a^x)'=(\ln a)\,a^x \quad (a>0)}$$

2. $y=x^x$ $(x>0)$. Γράφουμε:

$$\begin{aligned} &x=e^{\ln x} \;\Rightarrow\; y=x^x=(e^{\ln x})^x=e^{x\ln x} \\ &y'=(e^{x\ln x})'=(x\ln x)'e^{x\ln x}=(1+\ln x)\,x^x \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\boxed{(x^x)'=(1+\ln x)\,x^x \quad (x>0)}$$

Άσκηση 2.2 Να υπολογιστούν οι παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων:

(1) $y=e^{\sqrt[3]{\sin(3x^2+1)}}$ (2) $y=\cos^2\left(\sqrt[3]{x^6+1}\right)$ (3) $y=\tan(\sin^3 2x)$

(4) $y=\ln[\ln(x^4+1)]$ (5) $y=\sqrt{\ln\sqrt{x^2+1}}$ (6) $y=(x+1)^{x+1}$ $(x>-1)$

(7) $y=x^{x^2}$ $(x>0)$ (8) $y=(\sin x)^{\cos x}$ $(0<x<\pi)$ (9) $y=\ln|x|$ $(x\neq 0)$

[Υπόδειξη για την (9): $|x|=x$ αν $x>0$, ενώ $|x|=-x$ αν $x<0$. Θεωρήστε τις δύο περιπτώσεις χωριστά. Τι παρατηρείτε;]

2.7 Διαφορικό μιας Συνάρτησης

Έστω συνάρτηση $y = f(x)$. Έστω Δx μια αυθαίρετη μεταβολή τού x: $x \to x+\Delta x$. Η αντίστοιχη μεταβολή τού y είναι:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

Προσέξτε ότι το Δy είναι συνάρτηση *δύο* ανεξάρτητων μεταβλητών: του x και του Δx.

Η παράγωγος της f στο σημείο x είναι, εξ ορισμού,

$$f\,'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι υπάρχει συνάρτηση $\varepsilon(x, \Delta x)$, τέτοια ώστε

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f\,'(x) + \varepsilon(x, \Delta x) \quad \text{όπου} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(x, \Delta x) = 0$$

Άρα,

$$\Delta y = f\,'(x)\,\Delta x + \varepsilon(x, \Delta x)\Delta x \qquad (1)$$

Το γινόμενο $f\,'(x)\,\Delta x$ είναι *γραμμικό* (πρώτου βαθμού) ως προς Δx, ενώ το γινόμενο $\varepsilon(x, \Delta x)\Delta x$ θα πρέπει να περιέχει όρους *δευτέρου βαθμού και άνω* ως προς Δx (δηλαδή, δεν μπορεί να περιέχει σταθερό και πρωτοβάθμιο όρο). Γράφουμε, συμβολικά,

$$\varepsilon(x, \Delta x)\Delta x \equiv O(\Delta x^2) \quad \text{όπου} \quad \Delta x^2 \equiv (\Delta x)^2 \; \left(\neq \Delta(x^2)\,!\right)$$

Έτσι, η (1) γράφεται:

$$\boxed{\Delta y = f\,'(x)\,\Delta x + O(\Delta x^2)} \qquad (2)$$

Παρατηρούμε ότι το Δy είναι άθροισμα ενός γραμμικού και ενός μη-γραμμικού όρου ως προς Δx. Επιπλέον, η παράγωγος της f στο σημείο x είναι ο συντελεστής τού Δx στον γραμμικό όρο.

Παράδειγμα: Έστω $y = f(x) = x^3$. Τότε,

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\,\Delta x + (3x\Delta x^2 + \Delta x^3)$$

απ' όπου έχουμε ότι $f\,'(x) = 3x^2$ και $O(\Delta x^2) = 3x\Delta x^2 + \Delta x^3$.

Ο γραμμικός όρος στην (2), ο οποίος είναι συνάρτηση των μεταβλητών x και Δx, καλείται *διαφορικό* της συνάρτησης $y = f(x)$ και συμβολίζεται ως εξής:

$$\boxed{dy = d\,f(x) = f\,'(x)\,\Delta x} \qquad (3)$$

Η (2) τότε γράφεται:

$$\Delta y = dy + O(\Delta x^2) \qquad (4)$$

Όταν το Δx είναι *απειροστό* ($|\Delta x| << 1$), μπορούμε να κάνουμε την προσέγγιση $O(\Delta x^2) \approx 0$. Έτσι,

$$\Delta y \approx dy = f'(x)\,\Delta x \quad \textit{για απειροστό } \Delta x$$

Προσέξτε όμως ότι, για *πεπερασμένο* (όχι απειροστό) Δx, η *διαφορά* Δy και το *διαφορικό* dy είναι, γενικά, δύο ξεχωριστές ποσότητες!

Εξαίρεση στην παραπάνω παρατήρηση αποτελεί η περίπτωση των *γραμμικών* συναρτήσεων. Έστω $y = f(x) = ax+b$. Τότε,

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = [a(x+\Delta x)+b] - (ax+b) = a\Delta x$$

και

$$dy = f'(x)\,\Delta x = (ax+b)'\Delta x = a\Delta x = \Delta y$$

Δηλαδή, *στις γραμμικές συναρτήσεις (και μόνο σε αυτές) δεν υπάρχει διάκριση ανάμεσα στο διαφορικό και τη μεταβολή τους:* $dy = \Delta y$. Τούτο βέβαια σημαίνει ότι, για τις συναρτήσεις αυτές, $O(\Delta x^2) = 0$.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα εφαρμογής του ορισμού (3):

$$\text{Για } f(x) = x^a \;\Rightarrow\; d(x^a) = (x^a)'\Delta x = a\,x^{a-1}\Delta x$$
$$\text{Για } f(x) = e^x \;\Rightarrow\; d(e^x) = (e^x)'\Delta x = e^x\Delta x$$
$$\text{Για } f(x) = \ln x \;\Rightarrow\; d(\ln x) = (\ln x)'\Delta x = \frac{1}{x}\Delta x$$

Προσέξτε ότι, για $f(x) = x$, έχουμε: $dx = (x)'\Delta x = 1\cdot\Delta x \;\Rightarrow$

$$\boxed{\Delta x = dx}$$

(σε συμφωνία και με την παρατήρηση που κάναμε νωρίτερα για τις γραμμικές συναρτήσεις). Η (3), έτσι, μπορεί να γραφεί πιο συμμετρικά ως εξής:

$$\boxed{dy = d\,f(x) = f'(x)\,dx}$$

Διαιρώντας με dx, βρίσκουμε μια σημαντική έκφραση για την παράγωγο:

$$\boxed{f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d\,f(x)}{dx}}$$

Με λόγια, *η παράγωγος μίας συνάρτησης ισούται με τον λόγο του διαφορικού της συνάρτησης προς το διαφορικό (ή, ισοδύναμα, την μεταβολή) της ανεξάρτητης μεταβλητής της.*

Άσκηση 2.3 Αποδείξτε τις παρακάτω ιδιότητες του διαφορικού:

1. $d\,[\,f(x) \pm g(x)] = df(x) \pm dg(x)$
2. $d\,[\,f(x)\,g(x)] = f(x)\,dg(x) + g(x)\,df(x)$
3. $d\,[c\,f(x)] = c\,df(x) \quad (c{=}\sigma\tau\alpha\theta.)$
4. $d\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{[g(x)]^2}$

2.8 Διαφορικοί Τελεστές

Εισάγουμε τώρα τον εξής χρήσιμο συμβολισμό:

$$\frac{d\,f(x)}{dx} \equiv \frac{d}{dx}\,f(x)$$

Προσέξτε ότι ο συμβολισμός αυτός προσπαθεί να «μιμηθεί» τις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού των αριθμών:

$$\frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma} = \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \beta$$

με τη διαφορά ότι η έκφραση $\dfrac{d}{dx}$ σαφέστατα *δεν* είναι αριθμός! Το σύμβολο $\dfrac{d}{dx}$ ονομάζεται *διαφορικός τελεστής* και, όταν τοποθετείται μπροστά από μία συνάρτηση $f(x)$, δίνει *εντολή* να πάρουμε την παράγωγο της $f(x)$. Έτσι, γράφουμε:

$$\boxed{f\,'(x) = \frac{d\,f(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\,f(x)}$$

Η παραπάνω σχέση περιέχει τρεις διαφορετικούς συμβολισμούς της παραγώγου μίας συνάρτησης!

Προσέξτε τις παρακάτω ιδιότητες:

1. $\dfrac{d}{dx}[\,f(x) \pm g(x)] = \dfrac{df(x)}{dx} \pm \dfrac{dg(x)}{dx}$
2. $\dfrac{d}{dx}[\,f(x)\,g(x)] = \dfrac{df(x)}{dx}\,g(x) + f(x)\dfrac{dg(x)}{dx}$

2.9 Παράγωγος Σύνθετης Συνάρτησης με Χρήση του Διαφορικού

Θεωρούμε δύο συναρτήσεις f και g, τέτοιες ώστε $y=f(u)$ και $u=g(x)$. Η σύνθετη συνάρτηση $(f\circ g)$ ορίζεται, όπως γνωρίζουμε, ως εξής:

$$y=(f\circ g)(x)\equiv f[g(x)]$$

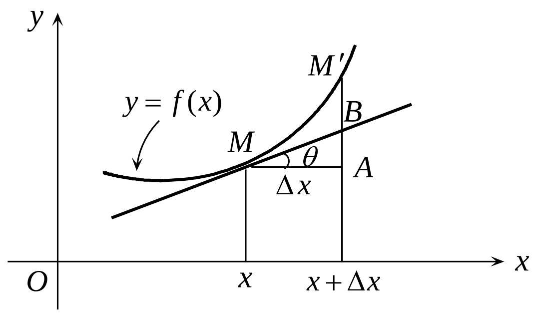
Πιο απλά, γράφουμε, παραλείποντας τα σύμβολα των συναρτήσεων: $y=y(u)$, $u=u(x)$ και $y=y(x)=y[u(x)]$.

Θέλουμε τώρα μία έκφραση για την παράγωγο του y ως προς x. Η παράγωγος αυτή ισούται με το πηλίκο dy/dx. Γράφουμε:

$$y'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx}=y'(u)\,u'(x)$$

που είναι ο γνωστός κανόνας παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης. Προσέξτε πόσο απλουστεύεται η απόδειξη αυτού του κανόνα αν εκφράσουμε τις παραγώγους σαν πηλίκα διαφορικών !

2.10 Γεωμετρική Σημασία της Παραγώγου και του Διαφορικού



Στο σχήμα βλέπουμε τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y=f(x)$. Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο $M\equiv(x,\,y)$ της καμπύλης, και φέρουμε την εφαπτομένη στην καμπύλη στο σημείο αυτό. Η ευθεία αυτή σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα x. Όπως βλέπουμε, στη μεταβολή $\Delta x=MA$ του x αντιστοιχεί η μεταβολή $\Delta y=AM'$ του y. Το τμήμα AB, τότε, αντιπροσωπεύει το διαφορικό dy της f για τις δοσμένες τιμές των x και Δx, ενώ η παράγωγος της f στο σημείο x ισούται με $\tan\theta$. Πράγματι:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{MA\to 0}\frac{AM'}{MA}=\lim_{BM'\to 0}\frac{AM'}{MA}=\frac{AB}{MA}=\tan\theta$$

όπου κάναμε χρήση της παρατήρησης ότι $BM'\to 0$ όταν $MA\to 0$. Άρα,

- ***η τιμή $f'(x_0)$ της παραγώγου της συνάρτησης $y=f(x)$ στο σημείο $x=x_0$ ισούται με την κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στην καμπύλη της συνάρτησης στο σημείο $M\equiv(x_0,\,y_0)$, όπου $y_0=f(x_0)$***

(βλ. Παρ.1.6). Επίσης,

$$dy = f\,'(x)\,\Delta x = (\tan\theta)\,\Delta x = \frac{AB}{MA}\,MA = AB\ .$$

Τέλος, από τη σχέση (4) της Παρ.2.7, έχουμε ότι

$$O(\Delta x^2) = \Delta y - dy = AM' - AB = BM'\ .$$

Αν η f ήταν *γραμμική*, θα είχαμε $B \equiv M'$, οπότε $O(\Delta x^2) = 0$ και $\Delta y = dy = AB$.

2.11 Παράγωγοι Ανώτερης Τάξης

Η *δεύτερη παράγωγος* της συνάρτησης $y = f(x)$ ορίζεται:

$$f\,''(x) \equiv [f\,'(x)]' = \frac{d}{dx}\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right) = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 f(x) = \frac{d^2}{dx^2}f(x)$$

ή

$$y'' = f\,''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

όπου $dx^2 \equiv (dx)^2$. Με ανάλογο τρόπο ορίζουμε την *τρίτη παράγωγο*:

$$y''' = f\,'''(x) \equiv [f\,''(x)]' = \frac{d^3}{dx^3}f(x) = \frac{d^3 f(x)}{dx^3} = \frac{d^3 y}{dx^3}$$

Γενικά, η *παράγωγος n-τάξης* γράφεται:

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}f(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{d^n y}{dx^n}$$

Παραδείγματα:

1. $(x^a)' = a\,x^{a-1}$, $(x^a)'' = a(a-1)x^{a-2}$, $(x^a)''' = a(a-1)(a-2)x^{a-3}$, $\cdots$ $(a \in R)$

2. $(\sin x)' = \cos x$, $(\sin x)'' = -\sin x$, $(\sin x)''' = -\cos x$, $(\sin x)'''' = \sin x$, κλπ.

3. $(e^x)' = (e^x)'' = (e^x)''' = \cdots = e^x$

Παρατηρήστε, ιδιαίτερα, ότι η απλή εκθετική συνάρτηση $y=e^x$ είναι η μόνη συνάρτηση που ισούται με την παράγωγό της, και γενικότερα, με τις παραγώγους της όλων των τάξεων!

Άσκηση 2.4 Δείξτε ότι, για τις συναρτήσεις $u(x)$ και $v(x)$ ισχύουν τα παρακάτω:

1. $(u+v)'' = u'' + v''$, $(u+v)''' = u''' + v'''$, κλπ.

2. $$\begin{aligned}(uv)'' &= u''v + 2u'v' + uv'' \\ (uv)''' &= u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''\end{aligned}$$

2.12 Παράγωγοι Πεπλεγμένων Συναρτήσεων

Έστω $F(x,y)=0$ μία πεπλεγμένη συνάρτηση (βλ. Παρ.1.4). Θεωρητικά, μέσω αυτής της σχέσης το y είναι συνάρτηση του x: $y=y(x)$. Δεν υπάρχει, εν τούτοις, ένας απλός μαθηματικός τύπος με τον οποίο να μπορούμε απευθείας να εκφράσουμε το y ως προς x. Πώς, τότε, θα υπολογίσουμε την παράγωγο $y'(x)$; Για τον σκοπό αυτό εργαζόμαστε ως εξής: Παραγωγίζουμε τη σχέση $F(x,y)=0$ ως προς x, λαμβάνοντας υπόψη ότι το y είναι, μέσω αυτής της σχέσης, συνάρτηση του x.

Παραδείγματα:

1. Έστω $F(x,y) \equiv x^2+y^2-1=0$ (μοναδιαίος κύκλος στο επίπεδο xy). Παραγωγίζοντας,

$$\frac{d}{dx}(x^2+y^2-1)=0 \;\Rightarrow\; 2x+\frac{d(y^2)}{dy}\frac{dy}{dx}=0 \;\Rightarrow\; 2x+2yy'=0 \;\Rightarrow\; y'=-\frac{x}{y} \quad .$$

2. Έστω $F(x,y) \equiv y^3-3xy+x^3=0$. Παραγωγίζοντας ως προς x, βρίσκουμε:

$$3y^2y'-3y-3xy'+3x^2=0 \;\Rightarrow\; y'=\frac{y-x^2}{y^2-x} \quad .$$

3. Έστω $F(x,y) \equiv e^y-x=0$ ($x>0$), που ισοδυναμεί με $e^y=x$ ή $y=\ln x$. Παραγωγίζοντας ως προς x, βρίσκουμε τη γνωστή έκφραση για την παράγωγο λογαρίθμου:

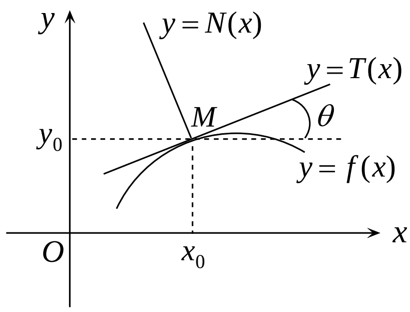
$$y'e^y-1=0 \;\Rightarrow\; y'=e^{-y}=\frac{1}{x} \quad .$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΜΕΡΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

3.1 Εφαπτόμενες και Κάθετες Γραμμές σε Καμπύλες

Έστω συνάρτηση $y= f(x)$ και έστω $M \equiv (x_0, y_0)$ [όπου $y_0= f(x_0)$] ένα σημείο της καμπύλης που παριστά την συνάρτηση αυτή στο επίπεδο xy. Καλούμε $y=T(x)$ την *γραμμική* συνάρτηση που περιγράφει την *εφαπτόμενη* ευθεία στην καμπύλη $f(x)$ στο σημείο M. Όμοια, καλούμε $y=N(x)$ την *κάθετη* ευθεία στην καμπύλη $f(x)$ στο σημείο M. Με αυτό εννοούμε, ουσιαστικά, την ευθεία που είναι κάθετη στην εφαπτόμενη γραμμή στο σημείο M. Άρα, οι γραμμές $T(x)$ και $N(x)$ είναι κάθετες μεταξύ τους:



Ζητούμε τις εξισώσεις που περιγράφουν τις ευθείες $T(x)$ και $N(x)$.

α. Εφαπτόμενη γραμμή $y=T(x)$

Όπως είδαμε στην Παρ.1.6, η ευθεία που διέρχεται από το σημείο (x_0, y_0) και έχει κλίση $a=\tan\theta$, περιγράφεται από την εξίσωση:

$$y-y_0 = a(x-x_0)\,.$$

Σύμφωνα, όμως, με την Παρ.2.10, η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στην καμπύλη $y= f(x)$ στο σημείο (x_0, y_0) ισούται με $a= f'(x_0)$. Έτσι, η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας είναι

$$\boxed{y-y_0 = (x-x_0)\, f'(x_0)}$$

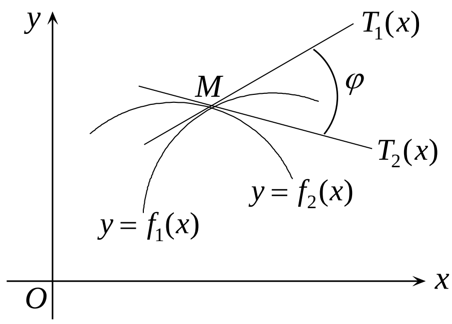
β. Κάθετη γραμμή $y=N(x)$

Η ευθεία αυτή διέρχεται από το σημείο (x_0, y_0) και σχηματίζει γωνία $(\theta+\pi/2)$ με τον άξονα x, άρα έχει κλίση $a'=\tan(\theta+\pi/2)= -\cot\theta = -1/\tan\theta = -1/a$, όπου $a=\tan\theta = f'(x_0)$ η κλίση της εφαπτόμενης γραμμής. Η κάθετη γραμμή, λοιπόν, περιγράφεται από την εξίσωση $y-y_0 = a'(x-x_0) = -(1/a)(x-x_0)$, ή

$$\boxed{y-y_0 = -(x-x_0)\,/\,f'(x_0)}$$

3.2 Γωνία Τομής Δύο Καμπύλων

Θεωρούμε δύο καμπύλες C_1 και C_2 που περιγράφονται, αντίστοιχα, από τις συναρτήσεις $y= f_1(x)$ και $y= f_2(x)$. Οι καμπύλες τέμνονται στο σημείο $M \equiv (x_0 , y_0)$, όπου $f_1(x_0)= f_2(x_0)= y_0$. Έστω $y=T_1(x)$ και $y=T_2(x)$ οι εφαπτόμενες ευθείες στις C_1 και C_2 , στο σημείο τομής M. Ζητούμε τη γωνία φ ανάμεσα στις δύο αυτές εφαπτόμενες.



Καλούμε θ_1 και θ_2 τις γωνίες που σχηματίζουν οι δύο εφαπτόμενες με τον άξονα x (υποθέτουμε ότι $\theta_1>\theta_2$). Η γωνία τομής των εφαπτομένων, τότε, είναι $\varphi= \theta_1-\theta_2$. Οι κλίσεις, τώρα, των δύο ευθειών δίνονται από τις σχέσεις:

$$a_1= \tan\theta_1= f_1'(x_0) , \quad a_2= \tan\theta_2= f_2'(x_0) .$$

Έτσι,

$$\tan\varphi = \tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1+\tan\theta_1 \tan\theta_2} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\tan\varphi = \frac{a_1 - a_2}{1+a_1 a_2} = \frac{f_1'(x_0) - f_2'(x_0)}{1+ f_1'(x_0)\, f_2'(x_0)}}$$

Ειδικές περιπτώσεις:

1. Αν $a_1= a_2$, τότε $\tan\varphi= 0$ και $\varphi= 0$. Δηλαδή, οι δύο εφαπτόμενες ευθείες ταυτίζονται.

2. Αν $a_1= -1/a_2 \Leftrightarrow 1+ a_1 a_2 = 0$, τότε $\tan\varphi= \infty$ και $\varphi= \pi/2$. Δηλαδή, οι δύο εφαπτόμενες ευθείες τέμνονται κάθετα η μία προς την άλλη.

Σχόλιο: Έστω, γενικά, ότι μας δίνονται δύο ευθείες στο επίπεδο xy (όχι απαραίτητα εφαπτόμενες σε κάποιες αντίστοιχες καμπύλες), με κλίσεις $a_1= \tan\theta_1$ και $a_2= \tan\theta_2$. Η γωνία $\varphi= \theta_1-\theta_2$, τότε, ανάμεσα στις δύο αυτές ευθείες θα βρίσκεται από τη σχέση:

$$\boxed{\tan\varphi = \frac{a_1 - a_2}{1+a_1 a_2}}$$

Ειδικά, αν $a_1= a_2$, οι δύο ευθείες είναι *παράλληλες* μεταξύ τους, ενώ αν $a_1= -1/a_2$ ή $1+ a_1 a_2 = 0$, οι ευθείες είναι *κάθετες* μεταξύ τους.

Παραδείγματα:

1. Έστω $y= f(x)= e^{2x}$. Ζητούμε τις εξισώσεις της εφαπτόμενης και της κάθετης ευθείας στο σημείο $(x_0 , y_0) \equiv (0,1)$. Έχουμε: $f\,'(x_0)= f\,'(0)= 2$. Άρα, για την εφαπτόμενη ευθεία,

$$y - y_0 = (x - x_0)\, f\,'(x_0) \;\Rightarrow\; y-1= (x-0)\, f\,'(0) \;\Rightarrow\; y = 2x+1$$

ενώ, για την κάθετη ευθεία,

$$y - y_0 = -(x - x_0) / f\,'(x_0) \;\Rightarrow\; y-1= -(x-0)/2 \;\Rightarrow\; y = -x/2 +1 \,.$$

Παρατηρούμε ότι οι κλίσεις των δύο ευθειών είναι, αντίστοιχα, $a= f\,'(0)= 2$ και $a' = -1/a = -1/2$, έτσι ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη καθετότητας $1+ a\,a' = 0$.

2. Έστω οι ευθείες $y= f_1(x)= x$ και $y= f_2(x)= -x$. Ζητούμε, καταρχήν, το σημείο τομής τους, (x_0 , y_0) . Στο σημείο αυτό, $f_1(x_0)= f_2(x_0)= y_0$. Όπως είναι εύκολο να δείξουμε, $x_0 = y_0= 0 \Leftrightarrow (x_0 , y_0) \equiv (0,0)$. Τώρα, οι κλίσεις των ευθειών είναι $a_1=1$ και $a_2= -1$. Παρατηρούμε ότι $1+ a_1 a_2 = 0$, πράγμα που σημαίνει ότι οι δύο ευθείες τέμνονται κάθετα στο σημείο $(0,0)$.

3.3 Μέγιστες και Ελάχιστες Τιμές Συνάρτησης

Έστω συνάρτηση $y=f(x)$. Η $f(x)$ λέγεται *αύξουσα* στο σημείο $x=x_0$ αν, για $h>0$ και αρκετά μικρό,

$$f(x_0-h) < f(x_0) < f(x_0+h)$$

ενώ λέγεται *φθίνουσα* στο $x=x_0$ αν

$$f(x_0-h) > f(x_0) > f(x_0+h)$$

Αποδεικνύεται το εξής:

- Αν $f\,'(x_0) > 0$, η $f(x)$ είναι *αύξουσα* στο $x=x_0$.
- Αν $f\,'(x_0) < 0$, η $f(x)$ είναι *φθίνουσα* στο $x=x_0$.
- Αν $f\,'(x_0) = 0$, η $f(x)$ είναι *στάσιμη* (*σταθερή*) στο $x=x_0$.

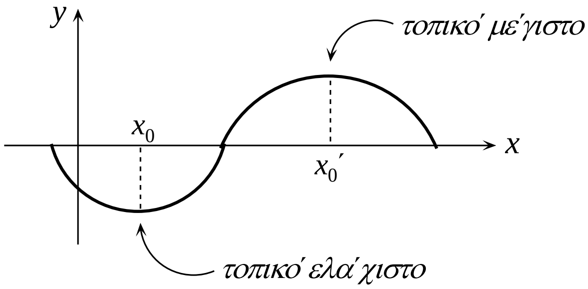
Ένα σημείο (x_0 , y_0) στο οποίο $f\,'(x_0)= 0$, καλείται *κρίσιμο σημείο* τής $y=f(x)$.

Η $y=f(x)$ έχει *τοπικό μέγιστο* στο σημείο $x=x_0$ αν, για $h>0$ και αρκετά μικρό,

$$f(x_0) > f(x_0-h) \quad \text{και} \quad f(x_0) > f(x_0+h)$$

ενώ έχει *τοπικό ελάχιστο* στο $x=x_0$ αν

$$f(x_0) < f(x_0-h) \quad \text{και} \quad f(x_0) < f(x_0+h)$$



Γενικά, μία (τοπικά) μέγιστη ή ελάχιστη τιμή τής $f(x)$ καλείται *ακραία τιμή* (ή *οριακή τιμή*).

Υπάρχουν δύο μέθοδοι για τον προσδιορισμό των μεγίστων και ελαχίστων μίας συνάρτησης:

α. Κριτήριο πρώτης παραγώγου

1. Επιλύουμε την εξίσωση $f\,'(x)=0$ για να βρούμε τα κρίσιμα σημεία τής $y=f(x)$.

2. Έστω $x=x_0$ ένα κρίσιμο σημείο, και έστω $h>0$ και αρκετά μικρό. Τότε,

- το $f(x_0)$ είναι *μέγιστο* αν $f\,'(x_0-h)>0$ και $f\,'(x_0+h)<0$,
- το $f(x_0)$ είναι *ελάχιστο* αν $f\,'(x_0-h)<0$ και $f\,'(x_0+h)>0$,
- το $f(x_0)$ δεν είναι *ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο* αν $f\,'(x_0-h)\,f\,'(x_0+h)\geq 0$.

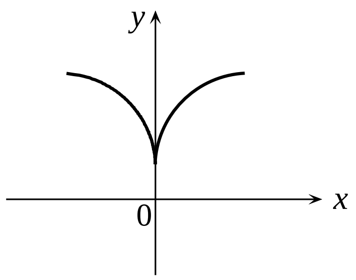
β. Κριτήριο δεύτερης παραγώγου

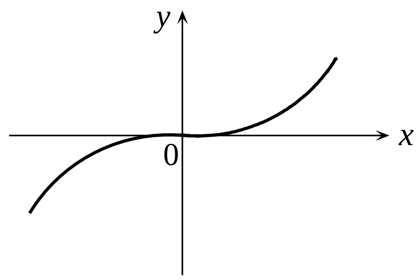
1. Επιλύουμε την εξίσωση $f\,'(x)=0$ για να βρούμε τα κρίσιμα σημεία τής $y=f(x)$.

2. Έστω $x=x_0$ ένα κρίσιμο σημείο. Τότε,

- αν $f\,''(x_0)<0$, το $f(x_0)$ είναι *μέγιστο,*
- αν $f\,''(x_0)>0$, το $f(x_0)$ είναι *ελάχιστο,*
- αν $f\,''(x_0)=0$ ή ∞ , το κριτήριο αποτυγχάνει (χρησιμοποιούμε το κριτήριο της πρώτης παραγώγου).

Παρατήρηση: Η συνθήκη $f\,'(x_0)=0$ δεν είναι *ούτε αναγκαία ούτε ικανή* για να έχει η $y=f(x)$ ακρότατο σημείο για $x=x_0$! Ας προσέξουμε τα παρακάτω παραδείγματα:





(α) (β)

Στην περίπτωση (α), η συνάρτηση έχει ελάχιστο στο σημείο x=0, αλλά η παράγωγός της δεν μηδενίζεται στο σημείο αυτό (για την ακρίβεια, $f\,'(0)=\infty$). Στην περίπτωση (β), ισχύει μεν ότι $f\,'(0)=0$, αλλά το σημείο x=0 δεν είναι ακρότατο σημείο της συνάρτησης (δεν είναι ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο).

Άσκηση 3.1 Μελετήστε τις συναρτήσεις $y=\sin x$ και $y=\cos x$. Βρείτε (α) τα κρίσιμα σημεία, (β) τα διαστήματα όπου η κάθε συνάρτηση είναι αύξουσα ή φθίνουσα, και (γ) τις μέγιστες και ελάχιστες τιμές τού y σε κάθε περίπτωση.

3.4 Απροσδιόριστες Μορφές και Κανόνας του L'Hospital

Συχνά, στην προσπάθειά μας να υπολογίσουμε το όριο μίας συνάρτησης καταλήγουμε σε εκφράσεις που, κατά τα μαθηματικά, δεν ορίζονται. Οι συνηθέστεροι τύποι τέτοιων *απροσδιόριστων μορφών* είναι οι εξής:

$$\frac{0}{0}\,,\quad \frac{\infty}{\infty}\,,\quad 0\cdot\infty\,,\quad \infty-\infty\,,\quad 0^0,\quad 1^\infty,\quad \infty^0$$

Προβλήματα τέτοιας μορφής αντιμετωπίζονται αποτελεσματικά με βάση το *θεώρημα του L'Hospital*:

Έστω $f(x)$ και $g(x)$ δύο συναρτήσεις τέτοιες ώστε

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0 \quad \text{ή} \quad \lim_{x\to x_0} f(x)=\pm\lim_{x\to x_0} g(x)=\infty$$

(όπου το x_0 μπορεί να είναι πεπερασμένο ή άπειρο). Τότε,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f\,'(x)}{g\,'(x)} \quad .$$

Αν $\lim_{x\to x_0} f\,'(x)=\lim_{x\to x_0} g\,'(x)=0$ ή ∞, τότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f\,''(x)}{g\,''(x)} \quad , \quad \text{κλπ.}$$

Με το θεώρημα αντιμετωπίζουμε απευθείας τις περιπτώσεις $0/0$ και ∞/∞.

Η περίπτωση $0\cdot\infty$ ανάγεται στις προηγούμενες, ως εξής: Έστω ότι $f(x)\to 0$ και $g(x)\to\infty$. Γράφουμε:

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{1/g(x)}\ \to \frac{0}{0} \qquad \text{ή} \qquad f(x)\cdot g(x)=\frac{g(x)}{1/f(x)}\ \to \frac{\infty}{\infty}\ .$$

Για την περίπτωση $\infty-\infty$ (όπου $f(x)\to+\infty$ και $g(x)\to+\infty$), γράφουμε:

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{1/f(x)}-\frac{1}{1/g(x)}=\frac{(1/g)-(1/f)}{1/(f\cdot g)}\ \to \frac{0}{0}\ .$$

Οι περιπτώσεις 0^0, $1^{+\infty}$ και $(+\infty)^0$ αντιμετωπίζονται με τον μετασχηματισμό:

$$[f(x)]^{g(x)}=\left[e^{\ln f(x)}\right]^{g(x)}=e^{g(x)\cdot\ln f(x)}$$

και την ιδιότητα: $\lim\limits_{x\to x_0} e^{h(x)}=\exp\left[\lim\limits_{x\to x_0} h(x)\right]$.

Παραδείγματα:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\ (0/0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{1}=1$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x-\sin x}\ (0/0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{1-\cos x}\ (0/0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{\sin x}=\infty$.

3. Για $a>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^a}\ (\infty/\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{a x^a}=0$ (λέμε ότι «το x^a τείνει στο άπειρο πιο γρήγορα από το $\ln x$»).

4. Για $n>0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}(x^n\ln x)\ (0\cdot\infty)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{1/x^n}\ (\infty/\infty)=-\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^n}{n}=0$.

5. $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}\ (0/0)$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{\ln x+\dfrac{x-1}{x}}\ (0/0)=\lim_{x\to 1^+}\frac{1/x}{(1/x)+(1/x^2)}=\frac{1}{2}\ .$$

6. Έστω $A=\lim\limits_{x\to 0^+}x^x\ (0^0)$. Γράφουμε: $A=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{x\ln x}=\exp\left[\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x)\right]$.
Σύμφωνα με το Παράδειγμα 4, $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x)=0$. Άρα, $A=1$. Γράφουμε: «$0^0=1$», με την έννοια ότι $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x=1$.

Άσκηση 3.2 Υπολογίστε τα παρακάτω όρια:

(1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x - x\cos x}{x - \sin x}$

(2) $\lim_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x} - \cot x\right)$

(3) $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$

(4) $\lim_{x\to 0^+}(\cot x)^{1/\ln x}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

4.1 Παράγουσες μιας Συνάρτησης

Ορισμός: Έστω δοσμένη συνάρτηση $f(x)$. Κάθε συνάρτηση $F(x)$ της οποίας η παράγωγος ισούται με την $f(x)$: $F'(x) = f(x)$, αποτελεί μία *παράγουσα* της $f(x)$.

Αν η $F(x)$ είναι παράγουσα της $f(x)$, τότε και *κάθε* συνάρτηση της μορφής $G(x)=F(x)+C$, όπου C αυθαίρετη σταθερά, επίσης είναι παράγουσα της $f(x)$ (δείξτε το!). Έτσι, δοσμένης μίας συνάρτησης $f(x)$ και μίας παράγουσάς της, $F(x)$, μπορούμε να βρούμε ένα *άπειρο* σύνολο παραγουσών τής $f(x)$: $\{F(x)+C \,/\, C\in R\}$.

Το άπειρο σύνολο $I=\{F(x)+C \,/\, C\in R\}$, όπου $F(x)$ *οποιαδήποτε* παράγουσα της $f(x)$, περιέχει *όλες* τις δυνατές παράγουσες της $f(x)$ (δηλαδή, δεν υπάρχουν παράγουσες της $f(x)$ που να μην περιέχονται στο σύνολο I). Αυτό προκύπτει από το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα: Δύο παράγουσες μίας συνάρτησης $f(x)$ διαφέρουν το πολύ κατά μία σταθερά.

Απόδειξη: Έστω $F(x)$ και $G(x)$ δύο παράγουσες της $f(x)$:

$$F'(x) = G'(x) = f(x) \;\Leftrightarrow\; F'(x) - G'(x) \equiv [F(x)-G(x)]' = 0 \;\Leftrightarrow\; F(x)-G(x) = C\,.$$

Σύμφωνα με το θεώρημα, μία τυχαία παράγουσα $G(x)$ διαφέρει από την παράγουσα $F(x)$ του συνόλου I κατά μία σταθερά και μόνο. Αυτό σημαίνει ότι η $G(x)$ ανήκει και η ίδια στο σύνολο I. Συμπέρασμα:

- **Για να βρούμε το (άπειρο) σύνολο *όλων* των παραγουσών τής $f(x)$ αρκεί να βρούμε *οποιαδήποτε* παράγουσα $F(x)$ και να κατασκευάσουμε το σύνολο $I = \{F(x)+C \,/\, C\in R\}$, για κάθε δυνατή τιμή της σταθεράς C.**

Συμβολισμός: Παραλείποντας τις αγκύλες (*οι οποίες, όμως, πάντα θα υπονοούνται!*) θα γράφουμε το *σύνολο* I των παραγουσών τής $f(x)$ ως εξής:

$$I = F(x) + C \quad (\text{όλα τα } C\in R)\,.$$

Παραδείγματα:

1. Για τη συνάρτηση $f(x)=x^2$, το σύνολο των παραγουσών είναι: $I= x^3/3 + C$.

2. Για τη συνάρτηση $f(x)=e^{2x}$, το σύνολο είναι: $I= e^{2x}/2 + C$.

3. Για τη συνάρτηση $f(x)=-2/x$ $(x>0)$, το σύνολο είναι: $I= -2\ln x + C$.

4.2 Το Αόριστο Ολοκλήρωμα

Ορισμός: Το άπειρο σύνολο I όλων των παραγουσών μίας συνάρτησης $f(x)$ καλείται *αόριστο ολοκλήρωμα* της συνάρτησης αυτής και συμβολίζεται με $I=\int f(x)dx$. Η μεταβλητή x καλείται *μεταβλητή ολοκλήρωσης*.

Αν $F(x)$ είναι *οποιαδήποτε* παράγουσα της $f(x)$: $F'(x) = f(x)$, τότε το αόριστο ολοκλήρωμα I δίνεται από την έκφραση:

$$\boxed{I=\int f(x)\,dx=F(x)+C}$$

για όλες οι πραγματικές τιμές της σταθεράς C. Τονίζουμε και πάλι ότι το I παριστά *σύνολο συναρτήσεων*, όχι μεμονωμένη συνάρτηση! Αν θέλαμε να είμαστε ακριβέστεροι, θα γράφαμε: $I=\int f(x)dx=\{F(x)+C\,/\,C\in R\}$. Έτσι, όσο κι αν φαίνεται παράξενο, η παρακάτω σχέση είναι αληθής:

$$\int f(x)\,dx=\int f(x)\,dx+C\ , \quad \forall C\in R \quad !$$

Φυσικά, πρόκειται για ισότητα *συνόλων*, όχι ισότητα συναρτήσεων! Δοθέντος ότι $F'(x) = f(x)$, παρατηρούμε ότι μπορούμε να γράψουμε:

$$\boxed{\int F'(x)\,dx=F(x)+C} \qquad (1)$$

για κάθε συνάρτηση $F(x)$.

Η ποσότητα dx που εμφανίζεται μέσα στο ολοκλήρωμα ονομάζεται, καταχρηστικά, «*διαφορικό*» του ολοκληρώματος. Δεν θα πρέπει να συγχέεται, όμως, με το διαφορικό ή τη διαφορά, όπως αυτά τα συναντήσαμε στο Κεφάλαιο 2, ούτε και να εκλαμβάνεται σαν μια απειροστή ποσότητα! Για να καταλάβουμε το πνεύμα του συμβολισμού, ας αλλάξουμε προσωρινά τον συμβολισμό μας σε δx, και ας γράψουμε τη σχέση (1) ως εξής:

$$\int F'(x)\,\delta x=F(x)+C \qquad (2)$$

Για $F(x)=x$, αυτό δίνει: $\int \delta x=x+C$. Θέτοντας u στη θέση τού x, $\int \delta u=u+C$. Τώρα, ας υποθέσουμε ότι το u είναι συνάρτηση του x: $u=f(x)$. Τότε, $\int \delta f(x)= f(x)+C$. Από την άλλη, λόγω της (2), $\int f'(x)\delta x= f(x)+C$. Παρατηρούμε ότι $\int \delta f(x)= \int f'(x)\delta x$, πράγμα που μας επιτρέπει να γράψουμε, συμβολικά, $\delta f(x) = f'(x)\delta x$. Αυτό, βέβαια, *μοιάζει* με τον ορισμό του διαφορικού: $d f(x) = f'(x)dx$! Και, δεν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι τα σύμβολα δ και d μοιράζονται κοινές ιδιότητες όταν τοποθετούνται μπροστά από συναρτήσεις. Έτσι, καλούμε το dx «διαφορικό» της ολοκλήρωσης, και γράφουμε τη σχέση (2) στη μορφή (1). Επίσης, γράφουμε:

$$\int d\,F(x)=\int F'(x)\,dx=F(x)+C\ .$$

Πίνακας Βασικών Ολοκληρωμάτων

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \qquad (a \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right) + C$$

4.3 Βασικοί Κανόνες Ολοκλήρωσης

1. Ολοκλήρωμα αθροίσματος ή διαφοράς συναρτήσεων:

$$\int [f(x) \pm g(x) \pm \cdots]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx \pm \cdots$$

Σημείωση: Πώς ερμηνεύεται το «άθροισμα συνόλων» στο δεξί μέλος; Έστω $F(x)$ και $G(x)$ τυχαίες παράγουσες των $f(x)$ και $g(x)$, αντίστοιχα. Τότε, εξ ορισμού,

$$\int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx \equiv \{F(x) + G(x) + C \,/\, C \in R\} \equiv F(x) + G(x) + C \;.$$

2. Ένας σταθερός πολλαπλασιαστικός παράγοντας βγαίνει έξω από το ολοκλήρωμα:

$$\int c\, f(x)\, dx = c \int f(x)\, dx \qquad (c{=}\sigma\tau\alpha\theta.)$$

Συνδυάζοντας τις δύο παραπάνω ιδιότητες, έχουμε:

$$\int [c_1\, f(x) \pm c_2 g(x) \pm \cdots]\, dx = c_1 \int f(x)\, dx \;\pm\; c_2 \int g(x)\, dx \pm \cdots$$

3. Όπως έχουμε ήδη πει,

$$\boxed{\int d\, f(x) = \int f\,'(x)\, dx = f(x) + C}$$

4. Αμεταβλητότητα τύπων ολοκλήρωσης κάτω από αλλαγή μεταβλητής:

Έστω ότι ισχύει: $\int f(x)dx=F(x)+C$ [όπου $F(x)$ παράγουσα της $f(x)$], και έστω ότι η μεταβλητή u είναι συνάρτηση της μεταβλητής x: $u=u(x)$. Τότε, $\int f(u)du=F(u)+C$, όπου η $F(u)$ είναι παράγουσα της $f(u)$. Αναλυτικά,

$$\boxed{\int f(u)\, du = \int f\left(u(x)\right) u\,'(x)\, dx = F\left(u(x)\right) + C}$$

Η ιδιότητα αυτή είναι σημαντική για τη μέθοδο της ολοκλήρωσης με αντικατάσταση, την οποία θα δούμε παρακάτω.

Άσκηση 4.1 Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

(1) $\displaystyle\int \left(\frac{2}{x^2} - \frac{3}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx$

(2) $\displaystyle\int \left(3 - \frac{2}{x} + 4\sqrt{x} \right) dx$

4.4 Ολοκλήρωση με Αντικατάσταση (Αλλαγή Μεταβλητής)

Έστω ότι μας δίνεται το ολοκλήρωμα $I=\int f(x)dx$, όπου η $f(x)$ δεν είναι στοιχειώδης συνάρτηση. Συχνά (αλλά όχι πάντα!) είναι δυνατό να βρούμε μια νέα μεταβλητή u, συνάρτηση του x: $u=u(x)$, έτσι ώστε το ολοκλήρωμα I να πάρει τη μορφή: $I=\int g(u)du$, όπου η $g(u)$ είναι τώρα στοιχειώδης (ή, έστω, απλούστερη) συνάρτηση. Αν

$$\int g(u)du = F(u) + C \ ,$$

τότε

$$I = F\,[u(x)] + C \ .$$

Προσέξτε ότι

$$I = \int g(u)\, du = \int g[u(x)]\, u'(x)\, dx = \int f(x) dx$$

που σημαίνει ότι ο στόχος είναι να θέσουμε την δοσμένη, αρχική συνάρτηση $f(x)$ στη μορφή:

$$f(x) = g[u(x)]\, u'(x)$$

και να «απορροφήσουμε» το $u'(x)$ μέσα στο διαφορικό dx, δημιουργώντας ένα νέο διαφορικό du.

Σαν παράδειγμα, έστω ότι η $f(x)$ έχει τη μορφή: $f(x)=u'(x)/u(x)$, έτσι ώστε $g(u)=1/u$. Έχουμε (υποθέτοντας ότι η $u(x)>0$ στο πεδίο ορισμού της):

$$I = \int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \int \frac{du}{u} = \ln\big(u(x)\big) + C \ .$$

Μερικοί χρήσιμοι μετασχηματισμοί του διαφορικού:

$$dx = d\,(x+c)$$

$$dx = \frac{1}{a}\, d\,(ax) \quad (a \neq 0)$$

$$x^a dx = \frac{1}{a+1}\, d\left(x^{a+1}\right) \quad (a \neq -1)$$

$$x^{-1} dx = \frac{dx}{x} = d\,(\ln x)$$

$$e^{ax} dx = \frac{1}{a}\, d\left(e^{ax}\right) \quad (a \neq 0)$$

$$\cos ax\, dx = \frac{1}{a}\, d\,(\sin ax) \ \ , \ \ \sin ax\, dx = -\frac{1}{a}\, d\,(\cos ax) \quad (a \neq 0)$$

Άσκηση 4.2 Αποδείξτε τις παραπάνω σχέσεις.

Παραδείγματα:

1. $I = \int x e^{x^2} dx$.

Γράφουμε: $xdx = \frac{1}{2} d(x^2)$, και θέτουμε $u=x^2$. Έτσι,

$$I = \frac{1}{2}\int e^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}(e^u + C') = \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C \quad (\text{όπου } C = C'/2) .$$

2. $I = \int \frac{x^2 dx}{2x^3+1}$.

Γράφουμε: $x^2 dx = \frac{1}{3} d(x^3) = \frac{1}{6} d(2x^3) = \frac{1}{6} d(2x^3+1)$, και θέτουμε $u=2x^3+1$:

$$I = \frac{1}{6}\int \frac{d(2x^3+1)}{2x^3+1} = \frac{1}{6}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{6}(\ln u + C') = \frac{1}{6}\ln u + C = \frac{1}{6}\ln(2x^3+1) + C \quad (C=C'/6) .$$

3. $I = \int \frac{\ln x}{x} dx$.

Γράφουμε: $\frac{1}{x} dx = d(\ln x)$, και θέτουμε $u=\ln x$:

$$I = \int \ln x \, d(\ln x) = \int u\, du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C \; .$$

4. $I = \int \frac{x \ln(x^2+1)}{x^2+1} dx$.

Γράφοντας: $xdx = \frac{1}{2} d(x^2) = \frac{1}{2} d(x^2+1)$, και θέτοντας $u=x^2+1$, έχουμε:

$I = \frac{1}{2}\int \frac{\ln u}{u} du$, που είναι της μορφής του Παραδ. 3 (με u στη θέση τού x).

Κάνοντας τη νέα αντικατάσταση $w=\ln u$, δείξτε ότι, τελικά, $I = \frac{1}{4}[\ln(x^2+1)]^2 + C$.

5. $I = \int \tan x \, dx \quad (0 < x < \pi/2)$.

Γράφουμε:

$$I = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} \;\; (\text{θετουμε } u = \cos x) \;\; = -\int \frac{du}{u} = -(\ln u + C') \;\; \Rightarrow$$

$$\boxed{\int \tan x \, dx = -\ln(\cos x) + C}$$

(όπου $C = -C'$). Όμοια, βρίσκουμε:

$$\boxed{\int \cot x \, dx = \ln(\sin x) + C}$$

6. $I=\int \frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$.

Γράφοντας: $\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = x^{-1/2}dx = \frac{1}{1/2}\,d(x^{1/2}) = 2\,d(\sqrt{x})$, και θέτοντας $u=\sqrt{x}$, βρίσκουμε: I=2 $\int \tan u\,du$, που ανάγεται στο Παράδ. 5. Το αποτέλεσμα είναι:

$$I=-2\ln(\cos\sqrt{x})+C \ .$$

7. $I=\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx$.

Γράφοντας: $(e^x-e^{-x})\,dx = d\,(e^x+e^{-x})$, και θέτοντας $u=e^x+e^{-x}$, έχουμε:

$$I=\int \frac{du}{u}=\ln u + C = \ln(e^x+e^{-x})+C \ .$$

8. $I=\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}\,dx$.

Αυτό γράφεται:

$$I=2\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx = 2\int \frac{\sin x\, d(\sin x)}{1+\sin^2 x} \ \ (\text{θετουμε } u=\sin x) \ = 2\int \frac{u\,du}{1+u^2}$$
$$=2\ \frac{1}{2}\int \frac{d(u^2)}{1+u^2}=\int \frac{d(1+u^2)}{1+u^2} \ \ (\text{θετουμε } w=1+u^2) \ = \int \frac{dw}{w}=\ln w + C$$
$$=\ln(1+u^2)+C = \ln(1+\sin^2 x)+C \ .$$

Άσκηση 4.3 Επαληθεύστε τα αποτελέσματα στα παραπάνω παραδείγματα. (*Υπόδειξη:* Πάρτε τις παραγώγους τους, και δείξτε ότι ισούνται με τις υπό ολοκλήρωση συναρτήσεις σε κάθε περίπτωση.)

Άσκηση 4.4 Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα και επαληθεύστε τα αποτελέσματά σας:

(1) $\int \frac{dx}{x\ln x}$ $(x>1)$ (2) $\int \frac{e^{1/x^2}}{x^3}\,dx$ (3) $\int \frac{x\ln(x^2+1)}{x^2+1}\,dx$

(4) $\int \frac{dx}{\tan x\,\cos^2 x}$ $(0<x<\pi/2)$ (5) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}\cos(e^{\sqrt{x}})}{\sqrt{x}}\,dx$ (6) $\int \frac{dx}{x^2+5}$

(7) $\int \frac{dx}{x^2-6x+18}$ (*Υπόδειξη:* Γράψτε τον παρονομαστή σαν άθροισμα τετραγώνων)

4.5 Ολοκλήρωση κατά Παράγοντες (Παραγοντική Ολοκλήρωση)

Με τη μέθοδο της παραγοντικής ολοκλήρωσης αντιμετωπίζουμε περιπτώσεις ολοκληρωμάτων της μορφής:

$$I = \int u(x)\, v'(x)\, dx = \int u(x)\, dv(x) \;\; ,$$

όταν η μέθοδος της αντικατάστασης (αλλαγής μεταβλητής) αποτυγχάνει.

Θεώρημα: Έστω συναρτήσεις $u=u(x)$ και $v=v(x)$. Ισχύει η παρακάτω ισότητα *συνόλων*:

$$\int u(x)\, v'(x)\, dx \;=\; u(x)\, v(x) - \int v(x)\, u'(x)\, dx \quad \Leftrightarrow$$

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du \;\; .$$

(Προσοχή στη σωστή ερμηνεία των σχέσεων: και τα δύο μέλη παριστούν *σύνολα* απείρων όρων!)

Απόδειξη: Όπως αναφέραμε στην Παρ.4.2, το «διαφορικό» του ολοκληρώματος μοιράζεται κοινές ιδιότητες με το σύνηθες διαφορικό συναρτήσεων. Έτσι,

$$d(uv) = u\, dv + v\, du \;\Rightarrow\; u\, dv = d(uv) - v\, du \;\Rightarrow\; \int u\, dv = \int d(uv) - \int v\, du \quad \Rightarrow$$

$$\int u\, dv = (uv + C) - \int v\, du = uv - \left(\int v\, du - C\right) = uv - \int v\, du \;\; ,$$

δοθέντος ότι τα άπειρα *σύνολα* $\int v\, du$ και $(\int v\, du - C)$ ταυτίζονται.

Μέθοδος: Έστω ότι μας δίνεται ένα ολοκλήρωμα της μορφής: $I = \int f(x)\, g(x)\, dx$, το οποίο δεν μπορεί να αντιμετωπιστεί με τη μέθοδο της αντικατάστασης. Δοκιμάζουμε να δουλέψουμε ως εξής: Αναζητούμε μία παράγουσα $h(x)$ της $g(x)$, και γράφουμε:

$$I = \int f(x)\, h'(x)\, dx = \int f(x)\, d\, h(x) = f(x)\, h(x) - \int h(x)\, d\, f(x)$$

$$= f(x)\, h(x) - \int h(x)\, f'(x)\, dx \; .$$

Αν ο μετασχηματισμός αυτός δεν οδηγήσει σε έναν απλούστερο υπολογισμό σε σχέση με το αρχικά δοσμένο ολοκλήρωμα, αναζητούμε, εναλλακτικά, μία παράγουσα της $f(x)$ και εργαζόμαστε όμοια. Σε κάποιες περιπτώσεις, δύο διαδοχικές παραγοντικές ολοκληρώσεις οδηγούν σε μία αλγεβρική εξίσωση με άγνωστο το I, η οποία επιλύεται εύκολα.

Παραδείγματα:

1. $I = \int x e^x dx$.

Αν επιλέξουμε να βάλουμε το x μέσα στο διαφορικό και να εφαρμόσουμε παραγοντική ολοκλήρωση, θα καταλήξουμε σε ένα ακόμα πιο δύσκολο ολοκλήρωμα που θα περιέχει x^2 στη θέση τού x! Δοκιμάζουμε, λοιπόν, να βάλουμε μέσα στο διαφορικό τον εκθετικό παράγοντα:

$$I=\int x\,d\,(e^x)=xe^x-\int e^x dx=x\,e^x-(e^x+C')=(x-1)\,e^x+C\ .$$

2. $I=\int \ln x\,dx$.

Έχουμε: $I=x\ln x-\int x\,d\,(\ln x)=x\ln x-\int x\frac{1}{x}dx=x\ln x-(x+C')\ \Rightarrow$

$$\boxed{\int \ln x\,dx=x\,(\ln x-1)+C}$$

3. $I=\int x\ln x\,dx$.

Θέτουμε το x μέσα στο διαφορικό: $I=\frac{1}{2}\int \ln x\,d\,(x^2)\ \Rightarrow$

$$2I=\int \ln x\,d\,(x^2)=x^2\ln x-\int x^2 d(\ln x)=x^2\ln x-\int x\,dx=x^2\ln x-(\frac{x^2}{2}+C')\ \Rightarrow$$

$$I=\frac{x^2}{2}(\ln x-\frac{1}{2})+C\ .$$

4. $I=\int x^2\cos x\,dx$.

Θέτουμε τον τριγωνομετρικό όρο μέσα στο διαφορικό:

$I=\int x^2 d\,(\sin x)=x^2\sin x-2\int x\sin x\,dx=x^2\sin x-2\,I_1$, όπου

$I_1=\int x\sin x\,dx=-\int x\,d(\cos x)=-x\cos x+\int \cos x\,dx=-x\cos x+\sin x+C'$. Άρα,

$$I=(x^2-2)\sin x+2x\cos x+C\ .$$

5. $I=\int e^x\cos x\,dx$.

Θέτουμε τον εκθετικό όρο μέσα στο διαφορικό:

$I=\int \cos x\,d\,(e^x)=e^x\cos x-\int e^x d(\cos x)=e^x\cos x+I_1$, όπου

$$I_1=\int e^x\sin x\,dx=\int \sin x\,d(e^x)=e^x\sin x-\int e^x d(\sin x)=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx$$
$$=e^x\sin x-I\ .$$

Άρα, $I=e^x\cos x+e^x\sin x-I\ \Rightarrow\ 2I=e^x(\cos x+\sin x)+C'\ \Rightarrow$

$$I=\frac{e^x}{2}(\cos x+\sin x)+C\ .$$

Σχόλιο: Γιατί ήταν απαραίτητο να προσθέσουμε τη σταθερά C' στην έκφραση για το $2I$; (Θυμηθείτε ότι το I είναι *σύνολο*!)

Άσκηση 4.5 Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

(1) $\int x^2 e^x \, dx$ (2) $\int e^x \sin x \, dx$

(3) $\int \sin^2 x \, dx$ (*χωρίς* τριγωνομετρικό μετασχηματισμό τού $\sin^2 x$!)

(4) $\int \cos^2 x \, dx$ (ομοίως)

Κάποια προβλήματα ολοκλήρωσης είναι *σύνθετα*: μία αλλαγή μεταβλητής ανάγει το δοσμένο ολοκλήρωμα σε μορφή ολοκληρώσιμη κατά παράγοντες.

Παραδείγματα:

1. $I = \int x^5 e^{x^3} dx$.

Γράφουμε: $I = \int x^3 e^{x^3} x^2 dx = \frac{1}{3}\int x^3 e^{x^3} d(x^3)$ (θετουμε $u = x^3$) $= \frac{1}{3}\int u\, e^u du$,
που είναι ολοκληρώσιμο κατά παράγοντες (Παράδ.1). Βρίσκουμε:
$I = \frac{1}{3}(x^3 - 1)\, e^{x^3} + C$.

2. $I = \int e^{\sqrt{x}} dx$.

Γράφουμε: $I = \int \sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\int \sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}} d(\sqrt{x})$ (θετουμε $u = \sqrt{x}$) $= 2\int u\, e^u du$,
που είναι ολοκληρώσιμο κατά παράγοντες (Παράδ.1). Βρίσκουμε:
$I = 2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}} + C$.

Άσκηση 4.6 Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(1) $\int \frac{e^{\sqrt{x}} \cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$

(2) $\int \sin 2x \, \ln(\sin x)\, dx$ $(0 < x < \pi/2)$

4.6 Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων

Μία (*γνήσια*) *ρητή συνάρτηση* είναι συνάρτηση της μορφής $R(x)=P(x)/Q(x)$, όπου τα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι πολυώνυμα και ο βαθμός τού $P(x)$ είναι *μικρότερος* από τον βαθμό τού $Q(x)$. (Στην αντίθετη περίπτωση γράφουμε: $P(x)/Q(x)=S(x)+P_1(x)/Q(x)$, όπου τα $S(x)$ και $P_1(x)$ είναι πολυώνυμα και ο βαθμός τού $P_1(x)$ είναι μικρότερος από αυτόν του $Q(x)$. Αυτή την περίπτωση δεν θα τη θεωρήσουμε εδώ.)

Ας υποθέσουμε ότι $\deg[Q(x)]=n$ (όπου "deg" σημαίνει «βαθμός»). Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου x^n στο $Q(x)$ είναι 1. Δηλαδή, $Q(x)\equiv x^n+b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_1x+b_0$. Αν $\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_n$ είναι οι ρίζες τού $Q(x)$ (όχι κατ' ανάγκη όλες διάφορες μεταξύ τους), τότε: $Q(x)\equiv(x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_n)$. Αν μία ρίζα, ας πούμε η ρ_1, είναι μιγαδική, τότε και η μιγαδική συζυγής της επίσης θα είναι ρίζα (ας πούμε, η $\rho_2=\overline{\rho_1}$). Έτσι, δοθέντος ότι το $x\in R$, $(x-\rho_1)(x-\rho_2)=(x-\rho_1)\overline{(x-\rho_1)}\equiv x^2+px+q$, όπου $p^2-4q<0$. Αν η ρ_1 έχει πολλαπλότητα l, τότε στο $Q(x)$ θα εμφανίζεται η έκφραση: $(x-\rho_1)^l(x-\rho_2)^l=(x^2+px+q)^l$. Έτσι, τελικά, το $Q(x)$ θα έχει τη μορφή:

$$Q(x)\equiv(x-a)^k\cdots(x^2+px+q)^l\cdots \qquad (a\in R,\ \ p^2-4q<0)$$

όπου a πραγματική ρίζα πολλαπλότητας k, και όπου η εξίσωση $x^2+px+q=0$ έχει μιγαδικές συζυγείς ρίζες.

Θεώρημα: Η ρητή συνάρτηση $R(x)=P(x)/Q(x)$, όπου $\deg[P(x)]<\deg[Q(x)]$, μπορεί να αναλυθεί σε άθροισμα *μερικών κλασμάτων*, ως εξής:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)}\equiv{}&\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k}+\cdots+\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\\&+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{B_lx+C_l}{(x^2+px+q)^l}+\cdots\end{aligned}$$

όπου A_i, B_i, C_i σταθερές που θα πρέπει να προσδιορίσουμε.

Παράδειγμα: Έστω ότι $Q(x)\equiv(x^2-4)(x+1)^2(x^2+1)^2$. Γράφουμε:

$$Q(x)\equiv(x-2)(x+2)(x+1)^2(x^2+1)^2\ .$$

Έστω ότι $\deg[P(x)]<8$. Τότε,

$$\frac{P(x)}{Q(x)}\equiv\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{(x+1)^2}+\frac{Ex+F}{x^2+1}+\frac{Gx+H}{(x^2+1)^2}\ .$$

Μέθοδος: Έστω ότι μας δίνεται ένα ολοκλήρωμα της μορφής $I=\int R(x)dx$, όπου $R(x)=P(x)/Q(x)$ μία (γνήσια) ρητή συνάρτηση. Η $R(x)$ μπορεί να αναπτυχθεί σε άθροισμα μερικών κλασμάτων της μορφής $A/(x-a)^k$ και $(Bx+C)/(x^2+px+q)^l$. Έτσι, το ολοκλήρωμα I ανάγεται σε άθροισμα ολοκληρωμάτων μερικών κλασμάτων, της μορφής $\int dx/(x-a)^k$, $\int dx/(x^2+px+q)^l$ και $\int xdx/(x^2+px+q)^l$.

Παραδείγματα:

1. $I=\int \frac{x-5}{x^3-3x^2+4}\,dx \quad (x>2)$. [*Υπόδειξη:* $x^3-3x^2+4=(x+1)(x-2)^2$]

Γράφουμε: $\frac{x-5}{x^3-3x^2+4}=\frac{x-5}{(x+1)(x-2)^2}\equiv\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}$.

Οι σταθεροί συντελεστές ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$A+B=0$, $C-4A-B=1$, $4A-2B+C=-5 \;\Rightarrow\; A=-2/3$, $B=2/3$, $C=-1$. Έτσι,

$$I=-\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x-2}-\int\frac{dx}{(x-2)^2}=\frac{2}{3}\ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right)+\frac{1}{x-2}+C\ .$$

2. $I=\int \frac{x+1}{x^3-x^2+x-1}\,dx \quad (x>1)$. [*Υπόδειξη:* $x^3-x^2+x-1=(x-1)(x^2+1)$]

Γράφουμε: $\frac{x+1}{x^3-x^2+x-1}=\frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)}\equiv\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$.

Οι σταθεροί συντελεστές ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$A+B=0$, $C-B=1$, $A-C=1 \;\Rightarrow\; A=1$, $B=-1$, $C=0$. Έτσι,

$$I=\int\frac{dx}{x-1}-\int\frac{xdx}{x^2+1}=\ln\left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}\right)+C\ .$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

5.1 Ορισμός και Ιδιότητες

Έστω συνάρτηση $f(x)$, και έστω $F(x)$ τυχαία παράγουσά της: $F'(x)=f(x)$. Όπως γνωρίζουμε, το *άπειρο σύνολο* όλων των παραγουσών τής $f(x)$ δίνεται από το *αόριστο ολοκλήρωμα*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad (C \in R)\ .$$

Τώρα, έστω πραγματικές σταθερές a, b. Ορίζουμε το *ορισμένο ολοκλήρωμα* της $f(x)$ από a έως b, ως τον πραγματικό *αριθμό* που δίνεται από την έκφραση:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \equiv F(b) - F(a) \equiv [F(x)]_a^b}$$

Οι σταθερές a και b καλούνται *όρια* (*κάτω* και *άνω*, αντίστοιχα) της ολοκλήρωσης.

Παραδείγματα:

1. $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = \sin(\pi/2) - \sin 0 = 1$.

Όμοια,

$$\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = -\cos(\pi/2) + \cos 0 = 1\ .$$

Αλλά,

$$\int_0^{\pi/2} \cos 2x\,dx = [\frac{1}{2}\sin 2x]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\sin\pi - \frac{1}{2}\sin 0 = 0\ .$$

2. $\int_a^b \frac{dx}{x} = [\ln x]_a^b = \ln b - \ln a = \ln(b/a) \quad (a > 0,\ \ b > 0)$.

Άσκηση 5.1 Για $0 < a < \pi/2$ και $0 < b < \pi/2$, δείξτε ότι:

(1) $\int_a^b \cot x\,dx = \ln\left(\frac{\sin b}{\sin a}\right)$ (2) $\int_a^b \tan x\,dx = \ln\left(\frac{\cos a}{\cos b}\right)$

Ιδιότητες ορισμένου ολοκληρώματος:

1. Η τιμή του ολοκληρώματος είναι ανεξάρτητη από την επιλογή της παράγουσας $F(x)$ της $f(x)$. Πράγματι, αν $G(x)=F(x)+C$ είναι μια άλλη παράγουσα, τότε

$$[G(x)]_a^b = G(b)-G(a) = \big(F(b)+C\big)-\big(F(a)+C\big) = F(b)-F(a) = [F(x)]_a^b \ .$$

2. Η τιμή του ολοκληρώματος δεν εξαρτάται από το όνομα της μεταβλητής της ολοκλήρωσης:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du = \cdots$$

Για παράδειγμα, $\int_0^a x^2\,dx = \int_0^a u^2\,du = [x^3/3]_0^a = [u^3/3]_0^a = a^3/3$.

3. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

4. $\int_a^b c\, f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx \quad (c = \sigma\tau\alpha\theta.)$

5. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \ , \qquad \int_a^a f(x)\,dx = 0$

6. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \quad (c \in R)$ (αποδείξτε το!)

7. $\int_a^b d\, f(x) = \int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$ (*τύπος των Newton-Leibniz*)

5.2 Ολοκλήρωση με Αντικατάσταση

Θεωρούμε ορισμένο ολοκλήρωμα $I = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$. Υποθέτουμε ότι μπορούμε να βρούμε έναν μετασχηματισμό της μορφής: $u=\varphi(x)$, τέτοιον ώστε η αόριστη ολοκλήρωση ως προς u να είναι απλούστερη αυτής ως προς x. Συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι

$$\int f(x)\,dx = \int g(u)\,du = G(u) + C \qquad (1)$$

[όπου $G(u)$ παράγουσα της $g(u)$]. Μπορούμε να δουλέψουμε με δύο τρόπους:

1. Βρίσκουμε πρώτα το *αόριστο* ολοκλήρωμα $\int f(x)dx$, κάνοντας την αντικατάσταση $u=\varphi(x)$. Με βάση τη σχέση (1),

$$\int f(x)\,dx = G[\varphi(x)] + C \equiv F(x) + C$$

[όπου $F(x)$ παράγουσα της $f(x)$]. Τότε, το δοσμένο *ορισμένο* ολοκλήρωμα I θα ισούται με

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = [F(x)]_{x_1}^{x_2} = F(x_2) - F(x_1) \ .$$

2. Μετασχηματίζουμε απευθείας το *ορισμένο* ολοκλήρωμα I σε ολοκλήρωμα ως προς u, λαμβάνοντας υπόψη ότι *μια αλλαγή μεταβλητής* $u=\varphi(x)$ *συνοδεύεται από αλλαγή στα όρια ολοκλήρωσης*:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \int_{u_1}^{u_2} g(u)\,du \ = \ [G(u)]_{u_1}^{u_2} = G(u_2) - G(u_1)$$
$$\textit{οπου} \quad u_1 = \varphi(x_1) \ , \ \ u_2 = \varphi(x_2) \ .$$

Παραδείγματα:

1. $I = \int_0^2 x e^{x^2} dx$.

Ένας τρόπος επίλυσης είναι να υπολογίσουμε πρώτα το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2} d(x^2) \ \ (\text{θετουμε } \ u = x^2) \ = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2} e^u + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C \, .$$

Τότε, $I = \dfrac{1}{2}[e^{x^2}]_0^2 = \dfrac{1}{2}(e^4 - 1)$.

Εναλλακτικά (και αυτό τον τρόπο θα χρησιμοποιούμε στο εξής), δουλεύουμε απευθείας με το ορισμένο ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^2 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^2 e^{x^2} d(x^2) \ .$$

Θέτουμε $u=x^2$ και μετασχηματίζουμε το ολοκλήρωμα ως προς x σε ολοκλήρωμα ως προς u, *μη λησμονώντας να αναπροσαρμόσουμε και τα όρια της ολοκλήρωσης:*

$\int_0^2 dx \to \int_0^4 du$. Έτσι, $I = \dfrac{1}{2}\int_0^4 e^u du = \dfrac{1}{2}[e^u]_0^4 = \dfrac{1}{2}(e^4 - 1)$.

2. $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$.

Γράφουμε: $I = -\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d(\cos x)}{1+\cos^2 x}$. Κάνουμε τον μετασχηματισμό:

$u = \cos x$, $\int_0^{\pi/2} dx \to \int_1^0 du$. Τότε,

$$I=-\int_1^0 \frac{du}{1+u^2}=\int_0^1 \frac{du}{1+u^2}=[\arctan u]_0^1=\frac{\pi}{4}-0 \;\Rightarrow$$

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx=\frac{\pi}{4}}$$

3. $I=\int_0^2 \frac{x\ln(x^2+1)}{x^2+1}\,dx$.

Γράφουμε: $I=\frac{1}{2}\int_0^2 \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}\,d(x^2+1)$. Κάνουμε τον μετασχηματισμό:

$u=x^2+1$, $\int_0^2 dx \to \int_1^5 du$. Τότε, $I=\frac{1}{2}\int_1^5 \frac{\ln u}{u}\,du=\frac{1}{2}\int_1^5 \ln u\, d(\ln u)$.

Θέτουμε: $w=\ln u$, $\int_1^5 du \to \int_0^{\ln 5} dw$. Τότε, $I=\frac{1}{2}\int_0^{\ln 5} w\,dw=\frac{1}{4}(\ln 5)^2$.

Άσκηση 5.2 Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

(1) $\int_0^2 \frac{x}{1+x^2}\,dx$ (2) $\int_0^{\pi/6} \cos x\, e^{\sin x}\,dx$ (3) $\int_1^e \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\ln x\right)}{x}\,dx$

5.3 Ολοκληρώματα Άρτιων, Περιττών και Περιοδικών Συναρτήσεων

Έστω ολοκλήρωμα της μορφής:

$$I=\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$$

σε κάποιο «συμμετρικό» διάστημα ολοκλήρωσης $[-a\,,\,a]$ (υποθέτουμε ότι $a>0$). Γράφουμε:

$$I=\int_{-a}^{0} f(x)\,dx+\int_0^a f(x)\,dx \equiv I_1+I_2 \quad .$$

Το ολοκλήρωμα I_1 γράφεται: $I_1=\int_{-a}^{0} f(x)\,dx=-\int_{-a}^{0} f\left(-(-x)\right)d(-x)$.

Κάνουμε τον μετασχηματισμό: $u=-x$, $\int_{-a}^{0} dx \to \int_a^0 du$:

$$I_1=-\int_a^0 f(-u)\,du=\int_0^a f(-u)\,du \quad .$$

Όπως έχουμε πει, η τιμή ενός *ορισμένου* ολοκληρώματος δεν αλλάζει αν δώσουμε διαφορετικό όνομα στη μεταβλητή ολοκλήρωσης. Έτσι, μπορούμε τώρα να θέσουμε x στη θέση τού u:

$$I_1 = \int_0^a f(-x)\,dx \ .$$

Τελικά, $I = \int_0^a f(-x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx \ \Rightarrow$

$$\boxed{\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_0^a [\, f(-x) + f(x)]\,dx}$$

Η σχέση αυτή έχει *γενική ισχύ*, για *κάθε* συνάρτηση $f(x)$ ορισμένη στο διάστημα $[-a\,,\,a]$. Μία τέτοια συνάρτηση, φυσικά, δεν είναι απαραίτητα άρτια ή περιττή! Αν, όμως, ανήκει σε κάποια από αυτές τις κατηγορίες, τότε, όπως γνωρίζουμε (Παρ.1.8),

$$\begin{aligned} f(-x) + f(x) &= 2\,f(x) \quad \text{αν η } f(x) \text{ είναι } \textit{άρτια}\,, \\ &= \ 0 \qquad\quad \text{αν η } f(x) \text{ είναι } \textit{περιττή}\,. \end{aligned}$$

Έτσι,

$$\boxed{\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x)\,dx &= 2\int_0^a f(x)\,dx \quad \text{αν η } f(x) \text{ ειναι } \textit{αρτια} \\ &= \qquad 0 \qquad\qquad\ \text{αν η } f(x) \text{ ειναι } \textit{περιττη} \end{aligned}}$$

Άσκηση 5.3 Επαληθεύστε τα παρακάτω:

(1) $\int_{-a}^a \sin(kx)\,dx = 0 \quad (a\,,\,k \in R)$

(2) $\int_{-a}^a \cos(kx)\,dx = 2\int_0^a \cos(kx)\,dx$

(3) $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} x^3 \tan x \sin(x^5 - 2x^3 + 6x)\,dx = 0$

(4) $\int_{-1}^1 x^4 \ln\left(\dfrac{2-x}{2+x}\right) e^{2x^2-1}\,dx = 0$

Έστω τώρα *περιοδική* συνάρτηση $f(x)$, με περίοδο T:

$$f(x+T) = f(x) \qquad (1)$$

Ισχύει ότι, για κάθε $A \in R$,

$$\boxed{\int_0^T f(x)\,dx = \int_A^{A+T} f(x)\,dx} \qquad (2)$$

Δηλαδή, *το ολοκλήρωμα μιας περιοδικής συνάρτησης σε διάστημα μίας περιόδου έχει πάντα την ίδια τιμή, ανεξάρτητα από το κάτω όριο του διαστήματος.*

Πράγματι: $\int_A^{A+T} f(x)\,dx = \int_A^0 f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx + \int_T^{A+T} f(x)\,dx \;\Rightarrow$

$$\int_A^{A+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx + \int_T^{A+T} f(x)\,dx - \int_0^A f(x)\,dx \qquad (3)$$

Αλλά, λόγω της (1), $\int_0^A f(x)\,dx = \int_0^A f(x+T)\,dx = \int_0^A f(x+T)\,d(x+T)$.

Κάνουμε τον μετασχηματισμό: $u = x+T$, $\int_0^A dx \to \int_T^{A+T} du$. Τότε,

$$\int_0^A f(x)\,dx = \int_T^{A+T} f(u)\,du = \int_T^{A+T} f(x)\,dx \qquad (4)$$

Από τις (3) και (4) έπεται αμέσως η (2).

Παραδείγματα:

1. $\int_0^{2\pi} \cos x\,dx = [\sin x]_0^{2\pi} = 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\,dx = [\sin x]_{-\pi}^{\pi} = 0$.

2. $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = -[\cos x]_0^{2\pi} = 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\,dx = -[\cos x]_{-\pi}^{\pi} = 0$.

3. $\int_0^{\pi} \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}[\sin 2x]_0^{\pi} = 0$, $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}[\sin 2x]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0$.

4. $\int_0^{\pi} \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}[\cos 2x]_0^{\pi} = 0$, $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}[\cos 2x]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0$.

5.4 Ολοκληρώματα με Μεταβλητά Όρια

Όπως γνωρίζουμε, το *αόριστο* ολοκλήρωμα μίας συνάρτησης παριστά το *άπειρο σύνολο* των παραγουσών της συνάρτησης, ενώ το *ορισμένο* ολοκλήρωμα της συνάρτησης, με *σταθερά* όρια (άνω και κάτω), δεν είναι παρά ένας πραγματικός αριθμός. Τι γίνεται, όμως, αν επιτρέψουμε σε ένα από τα όρια ενός ορισμένου ολοκληρώματος (π.χ., το άνω όριο) να είναι *μεταβλητό*; Σε αυτή την περίπτωση το ολοκλήρωμα παύει να έχει σταθερή τιμή, αφού η τιμή του γίνεται συνάρτηση της τιμής του μεταβλητού του ορίου!

Αλλάζοντας λίγο τα προηγούμενα σύμβολά μας, θα θέσουμε t στη θέση τού x και θα συμβολίσουμε με x το μεταβλητό άνω όριο του ολοκληρώματος. Έτσι, για δοσμένη συνάρτηση $f(t)$ ορίζουμε την εξής συνάρτηση του x:

$$I(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad (1)$$

Θεώρημα: Η συνάρτηση $I(x)$ είναι *παράγουσα* της συνάρτησης $f(x)$:

$$\boxed{I'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)}$$

Απόδειξη: Έστω $F(x)$ τυχαία παράγουσα της $f(x)$: $F'(x)= f(x)$. Προφανώς, τότε, η $F(t)$ θα είναι παράγουσα της $f(t)$: $F'(t)= f(t)$. Έτσι,

$$I(x) = \int_a^x f(t)\,dt = [F(t)]_a^x = F(x) - F(a) \;\Rightarrow\; I'(x) = F'(x) - 0 = f(x) \;.$$

Παρατήρηση: Η συνάρτηση $I(x)$ *δεν εξαρτάται* από την επιλογή της παράγουσας $F(x)$. Πράγματι, αν $G(x)=F(x)+C$ είναι μία άλλη παράγουσα της $f(x)$, τότε

$$I(x) = [F(t)]_a^x = [F(t)+C]_a^x = [G(t)]_a^x = G(x) - G(a) \;.$$

Παράδειγμα: Έστω $f(x) = x^2 \;\Rightarrow\; f(t) = t^2$. Ορίζουμε:

$$I(x) = \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^x t^2 dt = [t^3/3]_a^x = (x^3/3) - (a^3/3) \;.$$

Τότε, $I'(x) = x^2 = f(x)$.

Τώρα, ας κάνουμε ένα βήμα ακόμα: ας υποθέσουμε ότι και το *κάτω* όριο a ενός ορισμένου ολοκληρώματος είναι επίσης μεταβλητό. Σε αυτή την περίπτωση το $I(x)$ στη σχέση (1) δεν παριστά απλά μία παράγουσα της $f(x)$ αλλά ένα *άπειρο σύνολο* παραγουσών, που κάθε μία αντιστοιχεί σε μία τιμή του κάτω ορίου. Με άλλα λόγια, το $I(x)$ στη σχέση (1) είναι ένα *αόριστο ολοκλήρωμα*! Γράφουμε, συμβολικά (παραλείποντας το σύμβολο του κάτω ορίου, αφού το όριο αυτό δεν είναι καθορισμένο):

$$I(x) = \int^x f(t)\,dt \equiv \int f(x)\,dx = F(x) + C \;, \quad \text{όπου } F'(x)= f(x) \;.$$

5.5 Γενικευμένα Ολοκληρώματα: Άπειρα Όρια

Ένα ορισμένο ολοκλήρωμα καλείται *γνήσιο* αν (α) το διάστημα ολοκλήρωσης $[a, b]$ είναι *κλειστό* και *πεπερασμένο* (κανένα από τα a και b δεν είναι άπειρο), και (β) η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση λαμβάνει *πεπερασμένες τιμές* παντού μέσα στο διάστημα ολοκλήρωσης. Αν έστω και μία από αυτές τις συνθήκες δεν ικανοποιείται, το ολοκλήρωμα καλείται *γενικευμένο*. Ξεκινούμε τη μελέτη γενικευμένων ολοκληρωμάτων με την περίπτωση ενός άπειρου διαστήματος ολοκλήρωσης. Ορίζουμε:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \equiv \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \equiv \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \equiv \lim_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}} \int_a^b f(x)\,dx$$

Αν το όριο *υπάρχει* και είναι *πεπερασμένο*, λέμε ότι το αντίστοιχο γενικευμένο ολοκλήρωμα *συγκλίνει* (ή, είναι *συγκλίνον*). Αν το όριο είτε *δεν υπάρχει*, είτε υπάρχει αλλά είναι *άπειρο*, το αντίστοιχο ολοκλήρωμα *αποκλίνει* (είναι *αποκλίνον*).

Έστω $F(x)$ παράγουσα της $f(x)$. Τότε,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \ .$$

Παρατηρούμε τα εξής:

* $$I = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a) \ .$$

Το I συγκλίνει αν υπάρχει και είναι πεπερασμένο το όριο της $F(b)$.

* $$I = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a) \ .$$

Το I συγκλίνει αν υπάρχει και είναι πεπερασμένο το όριο της $F(a)$.

* $$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a) \ .$$

Το I συγκλίνει αν υπάρχουν και είναι πεπερασμένα τα όρια τόσο της $F(a)$, όσο και της $F(b)$. (Αν έστω και ένα από αυτά τα όρια είτε δεν υπάρχει, είτε δεν είναι πεπερασμένο, το I αποκλίνει.) Εναλλακτικά, μπορούμε να γράψουμε, π.χ.,

$$I = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f(-x)\,dx + \int_0^{+\infty} f(x)\,dx \ .$$

(Προσέξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{0} f\big(-(-x)\big)\,d(-x) = -\int_{+\infty}^{0} f(-u)\,du = \int_0^{+\infty} f(-x)\,dx \ ,$$

όπου στο τελευταίο βήμα απλώς μετονομάσαμε τη μεταβλητή ολοκληρώσεως από *u* σε *x*.) Το *I* συγκλίνει αν συγκλίνουν και τα δύο ολοκληρώματα των οποίων αποτελεί το άθροισμα. (Αν έστω και ένα από αυτά αποκλίνει, τότε το *I* αποκλίνει.)

Προσοχή! Είναι *λάθος*, γενικά, να ορίσουμε:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{l \to +\infty} \int_{-l}^{+l} f(x)\,dx = \lim_{l \to +\infty} [F(l) - F(-l)] \quad (\textit{λάθος}\,!!!)$$

Ο λόγος είναι ο εξής: Για να συγκλίνει το *I* θα πρέπει να υπάρχουν, *ξεχωριστά,* τα όρια της $F(l)$ τόσο στο $+\infty$, όσο *και* στο $-\infty$ [ή, αν προτιμάτε, τα όρια της $F(l)$ *και* της $F(-l)$ στο $+\infty$]. Τώρα, φανταστείτε, π.χ., ότι η $F(l)$ είναι άρτια συνάρτηση η οποία απειρίζεται στο $\pm\infty$. Προφανώς, το *I αποκλίνει*. Από την άλλη, επειδή η $F(l)$ είναι άρτια, ισχύει ότι $F(l) - F(-l)=0$. Έτσι, αν υιοθετούσαμε τον παραπάνω *λανθασμένο* ορισμό, θα συμπεραίναμε *λανθασμένα* ότι $I=0$, δηλαδή ότι το *I* συγκλίνει!

Παραδείγματα:

1. $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2}$.

Έχουμε: $\int_a^b \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}[\ln(1+x^2)]_a^b = \frac{1}{2}\{\ln(1+b^2) - \ln(1+a^2)\}$. Τότε,

$I = \frac{1}{2}\{\lim_{b\to+\infty}[\ln(1+b^2)] - \lim_{a\to-\infty}[\ln(1+a^2)]\}$. Και τα δύο όρια απειρίζονται, άρα το *I αποκλίνει*.

2. $I = \int_0^{+\infty} \cos x\,dx$.

Έχουμε: $I = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \cos x\,dx = \lim_{b\to+\infty} (\sin b)$.

Παρατηρούμε ότι, καθώς το *b* τείνει στο άπειρο, το $\sin b$ «ταλαντώνεται» αδιάκοπα ανάμεσα στο -1 και το $+1$, χωρίς ποτέ να αποκτά μία σταθερή τιμή! Έτσι, το όριο του $\sin b$ δεν υφίσταται, και το *I αποκλίνει.*

3. $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Έχουμε:

$$I = \lim_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}} \int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}} [\arctan x]_a^b = \lim_{b\to+\infty} (\arctan b) - \lim_{a\to-\infty} (\arctan a) = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) \Rightarrow$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi}$$

Άσκηση 5.4 Έστω $I = \int_0^{+\infty} e^{ax} dx$. Δείξτε ότι το *I αποκλίνει για* $a \geq 0$ και *συγκλίνει για* $a < 0$. Στην περίπτωση που συγκλίνει, δείξτε ότι

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-kx} dx = \frac{1}{k} \quad (k > 0)}$$

Άσκηση 5.5 Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ax} dx$ *αποκλίνει* για *όλες* τις τιμές τού a. (*Υπόδειξη:* Γράψτε το *I* σαν άθροισμα δύο ολοκληρωμάτων από 0 έως +∞, και παρατηρήστε ότι ένα εξ αυτών οπωσδήποτε αποκλίνει.)

Άσκηση 5.6 Έστω $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^k}$. Δείξτε ότι το *I συγκλίνει για* $k > 1$ και *αποκλίνει για* $k \leq 1$.

Θεώρημα (Κριτήριο Σύγκρισης): Έστω τα ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int_a^{+\infty} f(x)\, dx\ , \quad I_2 = \int_a^{+\infty} g(x)\, dx \quad (a \in R), \text{ οπου } \ 0 \leq f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, +\infty).$$

Τότε:

1. Αν το I_2 *συγκλίνει*, τότε και το I_1 επίσης *συγκλίνει*.
2. Αν το I_1 *αποκλίνει*, τότε και το I_2 επίσης *αποκλίνει*.

Παραδείγματα:

1. Έστω $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Επειδή η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση είναι άρτια, έχουμε: $I = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Όμως, $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$, όπου το πρώτο ολοκλήρωμα προφανώς συγκλίνει. Μένει να εξετάσουμε το δεύτερο.

Θεωρούμε τα ολοκληρώματα $I_1 = \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$, $I_2 = \int_1^{+\infty} e^{-x} dx$.

Στο διάστημα [1, +∞) ισχύει ότι $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ (δείξτε το!). Επιπλέον, το I_2 συγκλίνει και ισούται με $I_2 = 1/e$ (δείξτε το!). Άρα, το I_1 συγκλίνει, και, τελικά, το δοσμένο ολοκλήρωμα *I συγκλίνει*. Όπως αποδεικνύεται,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \ .$$

2. Έστω $I = \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x}\, dx$.

Στο διάστημα ολοκλήρωσης (δηλαδή, για $x \geq 1$) ισχύει ότι $\frac{\sqrt{x}}{1+x} > \frac{\sqrt{x}}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Από την άλλη, το ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1/2}}$ αποκλίνει (βλ. Άσκ.5.6).

Συμπέρασμα: το δοσμένο ολοκλήρωμα I *αποκλίνει.*

Θεώρημα (Απόλυτη Σύγκλιση): Θεωρούμε τα ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int_a^{+\infty} f(x)\, dx \ , \quad I_2 = \int_a^{+\infty} |\, f(x)\,|\, dx \quad (a \in R) \ .$$

Αν το I_2 *συγκλίνει*, τότε και το I_1 επίσης *συγκλίνει*. (Το αντίστροφο *δεν* ισχύει, γενικά.) Λέμε ότι το I_1 είναι *απόλυτα συγκλίνον*.

Παράδειγμα: Θα δείξουμε ότι το $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\, dx$ *συγκλίνει.*

Αρκεί να δείξουμε ότι είναι απολύτως συγκλίνον, δηλαδή, ότι το $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{|\cos x|}{1+x^2}\, dx$ συγκλίνει. Πράγματι, ισχύει ότι $\frac{|\cos x|}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$, καθώς και ότι

$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_0^{+\infty} = \pi/2 - 0 = \pi/2$ (συγκλίνει).

Άρα, το I_1 συγκλίνει, με βάση το κριτήριο σύγκρισης.

Άσκηση 5.7 Δείξτε, όμοια, ότι το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2}\, dx$ *συγκλίνει.*

Παρατήρηση: Το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} |\cos x|\, dx$ απειρίζεται, άρα αποκλίνει. Όπως είδαμε νωρίτερα, το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} \cos x\, dx$ επίσης αποκλίνει, αλλά με διαφορετικό τρόπο (εξηγήστε).

5.6 Γενικευμένα Ολοκληρώματα: Απειριζόμενη Συνάρτηση

Μία διαφορετική περίπτωση γενικευμένου ολοκληρώματος είναι εκείνη όπου η περιοχή ολοκλήρωσης $[a,\ b]$ είναι *πεπερασμένη*, όμως η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση απειρίζεται σε ένα από τα όρια a, b (ή και στα δύο).

Ορισμός:

1. Έστω ότι η $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a,\ b)$ και απειρίζεται για $x \to b$. Τότε,

$$\int_a^b f(x)\,dx \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \quad (\varepsilon > 0)$$

υπό την προϋπόθεση ότι το όριο αυτό υπάρχει.

2. Έστω ότι η $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $(a,\ b]$ και απειρίζεται για $x \to a$. Τότε,

$$\int_a^b f(x)\,dx \equiv \lim_{\delta \to 0} \int_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx \quad (\delta > 0)$$

υπό την προϋπόθεση ότι το όριο αυτό υπάρχει.

3. Έστω ότι η $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $(a,\ b)$ και απειρίζεται για $x \to a$ και για $x \to b$. Τότε,

$$\int_a^b f(x)\,dx \equiv \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \delta \to 0}} \int_{a+\delta}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \quad (\varepsilon > 0,\ \delta > 0)$$

υπό την προϋπόθεση ότι τα όρια αυτά υπάρχουν.

4. Έστω ότι η $f(x)$ είναι συνεχής στα διαστήματα $[a,\ c)$ και $(c,\ b]$, και απειρίζεται για $x \to c$ $(a < c < b)$. Γράφουμε:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \equiv I_1 + I_2 \ .$$

Το I θα συγκλίνει αν συγκλίνουν τα I_1 και I_2.

Σε κάθε περίπτωση όπου το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει, γράφουμε:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \ ,$$

όπου $F(x)$ παράγουσα της $f(x)$.

Παραδείγματα:

1. $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x}} = [2\sqrt{x}]_0^a = 2\sqrt{a} \quad (a > 0)$,
παρά τον απειρισμό της υπό ολοκλήρωση συνάρτησης στο κάτω όριο.

2. $\int_0^1 \frac{dx}{1-x} = [-\ln(1-x)]_0^1 \Rightarrow$ απειρίζεται για $x \to 1$. Άρα, το ολοκλήρωμα αποκλίνει.

3. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\arcsin x]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi$,
παρά τον απειρισμό της υπό ολοκλήρωση συνάρτησης και στα δύο όρια.

4. $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} + \int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = [3\sqrt[3]{x}]_{-1}^{0} + [3\sqrt[3]{x}]_{0}^{2} = 3 + 3\sqrt[3]{2}$.

5. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2}$ (και τα δύο ολοκληρώματα αποκλίνουν) .

Άσκηση 5.8 Δείξτε ότι τα ολοκληρώματα

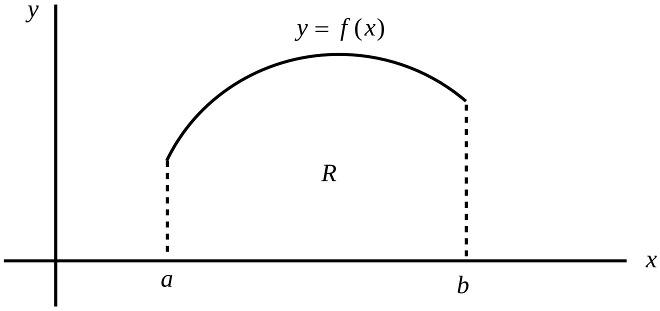
$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^k} \quad \text{και} \quad \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^k}$$

συγκλίνουν για $k < 1$ και *αποκλίνουν για* $k \geq 1$.

5.7 Το Ορισμένο Ολοκλήρωμα ως Εμβαδόν στο Επίπεδο

Μία σημαντική εφαρμογή του ορισμένου ολοκληρώματος είναι στον υπολογισμό εμβαδών περιοχών του επιπέδου *xy*, οι οποίες οριοθετούνται από γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων.

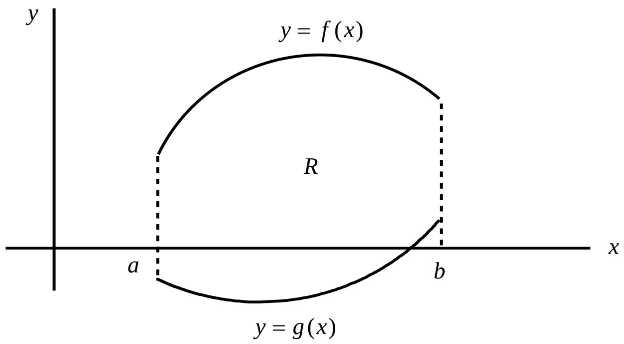
Θεώρημα 1: Έστω $f(x)$ συνεχής στο διάστημα $[a\,,\,b]$, με $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a\,,\,b]$. Τότε, το εμβαδόν της περιοχής *R* που οριοθετείται από την γραφική παράσταση της *f* και τον άξονα *x*, και βρίσκεται ανάμεσα στις γραμμές *x*=*a* και *x*=*b*,



δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$\boxed{A = \int_a^b f(x)\,dx}$$

Θεώρημα 2: Έστω $f(x)$ και $g(x)$ συνεχείς στο διάστημα $[a\,,\,b]$, με $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in [a\,,\,b]$. Τότε, το εμβαδόν της περιοχής R που οριοθετείται από τις γραφικές παραστάσεις των f και g, και βρίσκεται ανάμεσα στις γραμμές $x=a$ και $x=b$,



δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$\boxed{A = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx}$$

(Προσέξτε ότι, για $g(x) \equiv 0$, η γραφική παράσταση της $g(x)$ είναι τμήμα του άξονα x, και το Θεώρημα 2 ανάγεται στο Θεώρημα 1.)

Πόρισμα: Το μεταβλητό εμβαδόν

$$A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

είναι *παράγουσα* της $f(x)$: $A'(x) = f(x)$. (Εξηγήστε.)

Παρατήρηση 1: Αν η $g(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a\,,\,b]$, με $g(x) \leq 0$ $\forall x \in [a\,,\,b]$, τότε, το εμβαδόν της περιοχής R που οριοθετείται από την γραφική παράσταση της g και τον άξονα x, και βρίσκεται ανάμεσα στις γραμμές $x=a$ και $x=b$, είναι:

$$A = -\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b |\,g(x)\,|\,dx \quad .$$

Παρατήρηση 2: Το εμβαδόν της περιοχής που οριοθετείται από τις γραφικές παραστάσεις των $f(x)$ και $g(x)$ για $a \leq x \leq b$, είναι:

$$A = \int_a^b |\,f(x) - g(x)\,|\,dx \quad ,$$

ανεξάρτητα από το πρόσημο της διαφοράς $f(x) - g(x)$ για τις διάφορες τιμές τού x!

Παράδειγμα: Βρείτε το εμβαδόν της περιοχής που οριοθετείται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3$ και τον άξονα x, για $-1 \le x \le 1$.

Λύση: Παρατηρούμε ότι $f(x) \le 0$ για $x \in [-1\,,\,0]$, και $f(x) \ge 0$ για $x \in [0\,,\,1]$. Έτσι,

$$A = \int_{-1}^{1} |\, x^3 \,|\, dx \;=\; \int_{-1}^{0} |\, x^3 \,|\, dx + \int_{0}^{1} |\, x^3 \,|\, dx \;=\; -\int_{-1}^{0} x^3 dx + \int_{0}^{1} x^3 dx$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \;=\; \frac{1}{2} \;.$$

Άσκηση 5.9 Φανταστείτε ότι το τμήμα καμπύλης στο σχήμα του Θεωρήματος 1 μετατοπίζεται προς τα δεξιά κατά $\Delta x = c$. Δείξτε ότι το εμβαδόν της νέας περιοχής R', μεταξύ της νέας καμπύλης και του άξονα x, θα παραμείνει αμετάβλητο και ίσο με το εμβαδόν της περιοχής R. [*Υπόδειξη:* Παρατηρήστε ότι η νέα καμπύλη εκτείνεται από $a+c$ έως $b+c$ και αντιστοιχεί στη συνάρτηση $y=h(x)=f(x-c)$.]

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΣΕΙΡΕΣ

6.1 Σειρά Σταθερών Όρων

Έστω $a_n = a_1, a_2, a_3, \ldots,$ μία άπειρη ακολουθία πραγματικών αριθμών. Η έκφραση

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

καλείται (*αριθμητική*) *σειρά*. Ο αριθμός a_n καλείται *γενικός όρος* της σειράς. Η σειρά προσδιορίζεται πλήρως αν μας δοθεί ένας κανόνας f σύμφωνα με τον οποίο $a_n = f(n)$ (n=1,2,3,...).

Παραδείγματα:

1. Για $a_n = f(n) = \dfrac{1}{2^n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \cdots$.
2. Για $a_n = f(n) = \dfrac{1}{n!} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} + \cdots$.

Το άθροισμα των πρώτων n όρων: $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, καλείται *n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς*. Για n=1,2,3,..., τα μερικά αθροίσματα σχηματίζουν κι αυτά μία άπειρη ακολουθία:

$$S_1 = a_1 \;,\quad S_2 = a_1 + a_2 \;,\; \ldots \;,\quad S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \;,\; \ldots$$

Αν η ακολουθία αυτή συγκλίνει σε ένα πεπερασμένο όριο s καθώς $n \to \infty$, δηλαδή, αν $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s \in R$, τότε λέμε ότι η σειρά *συγκλίνει* (είναι *συγκλίνουσα*) και ότι ο αριθμός s αποτελεί το *άθροισμα της σειράς*. Γράφουμε:

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots$$

Αν το όριο της ακολουθίας S_n είναι άπειρο ή δεν υφίσταται καν, τότε η σειρά *αποκλίνει* (είναι *αποκλίνουσα*).

Παράδειγμα: Η *γεωμετρική σειρά* γράφεται:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha q^{n-1} = \alpha + \alpha q + \alpha q^2 + \cdots \quad (\alpha \neq 0) \ .$$

Δηλαδή, $a_1 = \alpha$, $a_2 = \alpha q$, $a_3 = \alpha q^2$, ... , $a_n = \alpha q^{n-1}$, ... Το n-οστό μερικό άθροισμα είναι:

$$\begin{aligned} S_n = \alpha + \alpha q + \alpha q^2 + \cdots + \alpha q^{n-1} &= \alpha \, \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{αν} \quad q \neq 1 \\ &= n\alpha \qquad \text{αν} \quad q = 1 \, . \end{aligned}$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. Αν $|q| > 1$, το $q^n \to \pm\infty$, το S_n απειρίζεται, και η σειρά *αποκλίνει*.

2. Αν $q = 1$, τότε $S_n = n\alpha \to \infty$, και η σειρά *αποκλίνει*.

3. Αν $q = -1$, το S_n παίρνει εναλλάξ τις τιμές α και 0 καθώς το $n \to \infty$, δηλαδή δεν τείνει σε κανένα συγκεκριμένο όριο. Έτσι, η σειρά *αποκλίνει*.

4. Αν $|q| < 1$ (δηλαδή, $-1 < q < 1$) , το $q^n \to 0$ και το $S_n \to \alpha/(1-q)$, που είναι πεπερασμένο όριο. Έτσι, η σειρά *συγκλίνει* και το άθροισμά της είναι

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha q^{n-1} = \frac{\alpha}{1-q} \qquad (|q| < 1)}$$

Ανακεφαλαιώνοντας:

Η γεωμετρική σειρά συγκλίνει για $|q| < 1$ *και αποκλίνει για* $|q| \geq 1$.

Θεώρημα (αναγκαία συνθήκη σύγκλισης):

Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, *τότε* $\boxed{\lim_{n \to \infty} a_n = 0}$.

Προσοχή: Η συνθήκη είναι μόνο *αναγκαία*, όχι ικανή! Δηλαδή, το γεγονός και μόνο ότι $a_n \to 0$ *δεν σημαίνει απαραίτητα* ότι η σειρά συγκλίνει!

Πόρισμα: Αν $\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$, τότε η σειρά *αποκλίνει*.

Παραδείγματα:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{100n+1} = \frac{1}{101}+\frac{2}{201}+\frac{3}{301}+\cdots$.

Έχουμε: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{100n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{100+\frac{1}{n}} = \frac{1}{100} \neq 0 \;\Rightarrow$ η σειρά *αποκλίνει*.

2. *Αρμονική Σειρά:* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$.

Η σειρά αυτή *αποκλίνει* (το άθροισμά της απειρίζεται), παρά το γεγονός ότι το $a_n = 1/n \to 0$ (!)

Σημείωση: Η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+\cdots$$

συγκλίνει για $\alpha > 1$ και *αποκλίνει για* $\alpha \leq 1$.

6.2 Σειρές με Θετικούς Όρους

Θα θεωρήσουμε τώρα σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ όπου $a_n > 0$, $\forall n$ (*σειρές με θετικούς όρους*).

Θεώρημα (τεστ σύγκρισης):

Έστω σειρές $A \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $B \equiv \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ με $0 < a_n \leq b_n$, $\forall n$. Τότε:

1. Αν η *B συγκλίνει*, τότε και η *A συγκλίνει*.
2. Αν η *A αποκλίνει*, τότε και η *B αποκλίνει*.

Παραδείγματα:

1. Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots$.

Παρατηρούμε ότι, για $n > 1$, $\sqrt{n} < n \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$.

Επιπλέον, η αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει. Άρα, η δοσμένη σειρά *αποκλίνει*.

2. Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \cdots$.

Παρατηρούμε ότι $\frac{1}{n \cdot 2^n} < \frac{1}{2^n}$. Επιπλέον, η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ συγκλίνει (γιατί;). Άρα, η δοσμένη σειρά *συγκλίνει*.

Θεώρημα (κριτήριο D'Alembert):

Έστω σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ όπου $a_n > 0$, $\forall\, n$. Καλούμε: $\rho = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Τότε:

1. Αν $\rho < 1$, η σειρά *συγκλίνει*.
2. Αν $\rho > 1$, η σειρά *αποκλίνει*.
3. Αν $\rho = 1$, το κριτήριο δεν οδηγεί σε συμπέρασμα.

Παράδειγμα: Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \cdots$.

Έχουμε: $a_n = \frac{n}{2^n}$, $a_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \to \infty}{\to} \frac{1}{2} < 1$.

Άρα, η δοσμένη σειρά *συγκλίνει*.

6.3 Απόλυτα Συγκλίνουσες Σειρές

Η σειρά $A \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ λέγεται *απολύτως συγκλίνουσα* αν η αντίστοιχη σειρά θετικών ό-ρων $A' \equiv \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ είναι συγκλίνουσα.

Θεώρημα: *Αν μία σειρά είναι απολύτως συγκλίνουσα, τότε είναι και συγκλίνουσα.* (Δηλαδή, αν η σειρά απολύτων όρων *Α΄* συγκλίνει, τότε και η σειρά *Α* συγκλίνει.)

Το αντίστροφο του θεωρήματος *δεν* ισχύει: μία συγκλίνουσα σειρά *δεν είναι απαραίτητα* και απολύτως συγκλίνουσα! Για παράδειγμα, η σειρά

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

συγκλίνει, ενώ η (αρμονική) σειρά

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

αποκλίνει.

Παράδειγμα: Έστω $A \equiv \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\cdots$.

Η αντίστοιχη σειρά απολύτων όρων: $A' \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

είναι μία *συγκλίνουσα* γεωμετρική σειρά (γιατί;). Άρα, η δοσμένη σειρά *Α*, ως απολύτως συγκλίνουσα, *συγκλίνει*.

Άσκηση 6.1 Δείξτε ότι η σειρά απολύτων όρων *Α΄* συγκλίνει, χρησιμοποιώντας το κριτήριο του D'Alembert.

Άσκηση 6.2 Υπολογίστε τα αθροίσματα των σειρών *Α* και *Α΄* του παραπάνω παραδείγματος. (*Υπόδειξη:* Παρατηρήστε ότι και οι δύο σειρές είναι γεωμετρικές.)

6.4 Συναρτησιακές Σειρές

Σειρές των οποίων οι όροι είναι *συναρτήσεις* και όχι σταθεροί αριθμοί, καλούνται *συναρτησιακές σειρές*. Η γενική μορφή μιας συναρτησιακής σειράς είναι:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = a_1(x) + a_2(x) + \cdots \ .$$

Η σειρά αυτή είναι δυνατό να συγκλίνει για κάποιες τιμές τού x και να αποκλίνει για κάποιες άλλες. Ένα σημείο $x=x_0$ στο οποίο η *αριθμητική* σειρά $a_1(x_0) + a_2(x_0) + \ldots$ συγκλίνει, καλείται *σημείο σύγκλισης* της σειράς. Το σύνολο όλων των σημείων σύγκλισης καλείται *περιοχή σύγκλισης* της σειράς. Το *άθροισμα* μιας συναρτησιακής σειράς είναι συνάρτηση του x, η οποία ορίζεται στην περιοχή σύγκλισης της σειράς:

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = a_1(x) + a_2(x) + \cdots \ .$$

Παράδειγμα: Έστω η *γεωμετρική σειρά*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \cdots \ .$$

Η σειρά αυτή *συγκλίνει στο διάστημα* $(-1\,,\,1)$ γιατί, για κάθε $x=x_0$ στο διάστημα αυτό, η αντίστοιχη αριθμητική σειρά $1 + x_0 + x_0^2 + \ldots$ συγκλίνει. Το άθροισμα της σειράς στην περιοχή σύγκλισης είναι:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x} \quad , \quad x \in (-1, 1)}$$

Για $x \notin (-1\,,\,1)$, η σειρά *αποκλίνει* και το άθροισμά της δεν ορίζεται.

Παράδειγμα: Θα βρούμε την περιοχή σύγκλισης της σειράς

$$A \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} = \sin x + \frac{\sin 2x}{2^2} + \frac{\sin 3x}{3^2} + \cdots$$

Θεωρούμε την σειρά των απολύτων όρων: $A' \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin nx|}{n^2}$. Παρατηρούμε ότι $\frac{|\sin nx|}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$, $\forall x \in R$. Λαμβάνοντας υπόψη ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, συμπεραίνουμε ότι η σειρά A' συγκλίνει $\forall x \in R$. Αυτό σημαίνει ότι η αρχική σειρά A είναι απολύτως συγκλίνουσα, άρα και *συγκλίνουσα,* $\forall x \in R$. Προφανώς, η περιοχή σύγκλισής της είναι ολόκληρο το R.

Παράδειγμα: Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad (1)$$

συγκλίνει για όλα τα $x \in R$. Με βάση αυτό το αποτέλεσμα, δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \ , \quad \forall x \in R \qquad (2)$$

Λύση: Θεωρούμε την σειρά των απολύτων όρων: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}$. Θέτοντας $a_n = |x|^n / n!$, παρατηρούμε ότι $a_{n+1}/a_n = |x|/(n+1) \to 0 < 1$, $\forall x \in R$. Έτσι, με βάση το κριτήριο του D'Alembert, η σειρά αυτή συγκλίνει $\forall x \in R$. Τούτο σημαίνει ότι η δοσμένη σειρά (1) είναι απολύτως συγκλίνουσα, άρα και *συγκλίνουσα*, $\forall x \in R$. Η σχέση (2) εκφράζει την ικανοποιούμενη αναγκαία συνθήκη σύγκλισης για την σειρά (1).

Άσκηση 6.3 Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots$$

συγκλίνει για $|x| < 1$ $(-1 < x < 1)$. [*Υπόδειξη:* Θεωρήστε την σειρά των απολύτων όρων, και χρησιμοποιήστε το κριτήριο του D'Alembert για να δείξετε ότι συγκλίνει στο διάστημα $(-1, 1)$] .

6.5 Ανάπτυξη Συνάρτησης σε Δυναμοσειρά

Ως *δυναμοσειρά* ορίζεται μία συναρτησιακή σειρά της μορφής

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1 (x-x_0) + a_2 (x-x_0)^2 + \cdots \qquad (1)$$

Οι σταθερές a_n καλούνται *συντελεστές* της δυναμοσειράς. Ειδικά, για $x_0 = 0$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \qquad (2)$$

Σημειώνουμε ότι *κάθε* δυναμοσειρά μπορεί να γραφεί σ' αυτή τη μορφή αν κάνουμε την αντικατάσταση $x - x_0 = x'$.

Θεωρούμε μία δυναμοσειρά της μορφής (2). Υποθέτουμε ότι υπάρχει αριθμός r, τέτοιος ώστε η σειρά να συγκλίνει για $|x| < r$ και να αποκλίνει για $|x| > r$ (η σειρά μπορεί να συγκλίνει ή να αποκλίνει για $x = \pm r$). Ο αριθμός r καλείται *ακτίνα σύγκλισης* της δυναμοσειράς, ενώ το διάστημα $(-r, r)$ καλείται *διάστημα σύγκλισης* της σειράς. Ειδικά, αν $r = 0$, η σειρά αποκλίνει για κάθε $x \neq 0$, ενώ αν $r = \infty$, η σειρά συγκλίνει για κάθε $x \in R$. Για σειρά της γενικότερης μορφής (1), το διάστημα σύγκλισης γράφεται $(x_0 - r,\ x_0 + r)$.

Παράδειγμα: Για την *γεωμετρική σειρά*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots$$

(προσέξτε ότι $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$) το διάστημα σύγκλισης είναι $(-1, 1)$ και η ακτίνα σύγκλισης είναι $r = 1$.

Πρόβλημα: Δοθείσης μίας συνάρτησης $f(x)$, είναι δυνατόν να την εκφράσουμε σαν το άθροισμα μίας συγκλίνουσας δυναμοσειράς; Ένα παράδειγμα θα μας βοηθήσει να προσεγγίσουμε το θέμα: Ας θυμηθούμε ότι

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots \quad , \quad \forall x \in (-1, 1)} \qquad (3)$$

Παρατηρούμε ότι, *στο διάστημα* $(-1, 1)$ (δηλαδή, για $|x| < 1$) και *μόνο* σ' αυτό, η συνάρτηση $(1-x)^{-1}$ ισούται με το άθροισμα της γεωμετρικής σειράς (με την έννοια ότι, για κάθε x στο διάστημα αυτό, η συνάρτηση και η σειρά παίρνουν τις ίδιες τιμές). Για $|x| \geq 1$, όμως, η γεωμετρική σειρά *αποκλίνει*, ενώ η συνάρτηση $(1-x)^{-1}$ *εξακολουθεί να ορίζεται* (εκτός από το μοναδικό σημείο $x = 1$)! Σε κάθε περίπτωση, η σειρά και η συνάρτηση *δεν* αποκτούν κοινές τιμές για $|x| \geq 1$.

Γενικά μιλώντας, αν είναι εφικτή η *ανάπτυξη μιας συνάρτησης* $f(x)$ *σε δυναμοσειρά:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \cdots \qquad (4)$$

ή

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \qquad (5)$$

θα πρέπει να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί να προσδιορίσουμε το διάστημα D όπου η ανάπτυξη αυτή έχει νόημα. Στο διάστημα αυτό, η συνάρτηση πρέπει να *ορίζεται* και η σειρά πρέπει να *συγκλίνει* (δηλαδή, το D να είναι υποσύνολο τόσο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης, όσο και του διαστήματος σύγκλισης της σειράς). Η ίδια η συνάρτηση $f(x)$, όμως, μπορεί να *εξακολουθεί να ορίζεται* και για $x \notin D$, σε σημεία όπου η σειρά *αποκλίνει*!

Θεώρημα (Taylor): Υποθέτουμε ότι η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x)$ μπορεί να αναπτυχθεί σε δυναμοσειρά της μορφής (4), σε μία γειτονιά $D=(x_0-l\,,\,x_0+l\,)$ του σημείου x_0. Τότε, οι συντελεστές a_n της σειράς δίνονται από τον τύπο:

$$\boxed{a_n = \frac{1}{n!}\, f^{(n)}(x_0)}$$

όπου $f^{(n)}$ συμβολίζει την n-οστή παράγωγο της f. Έτσι, η σειρά (4) γράφεται:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots}$$

και καλείται *σειρά Taylor* της $f(x)$ ως προς το σημείο $x{=}x_0$.

Στην (συνήθη) περίπτωση που $x_0 = 0$, έτσι ώστε $D=(-l\,,\,l\,)$, η σειρά Taylor ως προς $x{=}0$ καλείται *σειρά Maclaurin* και γράφεται:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, f^{(n)}(0)\, x^n = f(0) + f'(0)\, x + \frac{1}{2!} f''(0)\, x^2 + \cdots}$$

Μία χρήσιμη εναλλακτική μορφή της σειράς Taylor βρίσκεται ως εξής: Στην πρωταρχική μορφή της σειράς, το x_0 είναι σταθερό ενώ το x είναι μεταβλητό. Η διαφορά $h = x - x_0$ είναι μεταβλητή ποσότητα και μπορεί να θεωρηθεί ως νέα μεταβλητή στη θέση τού x. Θέτοντας $x = x_0 + h$, γράφουμε τη σειρά Taylor ως εξής:

$$\boxed{f(x_0+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, f^{(n)}(x_0)\, h^n = f(x_0) + f'(x_0)\, h + \frac{1}{2!} f''(x_0)\, h^2 + \cdots}$$

Για $x_0 = 0$, η παραπάνω σειρά γράφεται:

$$f(h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, f^{(n)}(0)\, h^n = f(0) + f'(0)\, h + \frac{1}{2!} f''(0)\, h^2 + \cdots$$

και συμπίπτει με τη σειρά Maclaurin με h στη θέση τού x.

Σειρές Maclaurin μερικών συναρτήσεων *

$$e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad , \quad D = R$$

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad , \quad D = R$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \quad , \quad D = R$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \quad , \quad D = R$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \quad , \quad D = (-1\,,\,1)$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \quad , \quad D = (-1\,,\,1)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \quad , \quad D = (-1,\,1)$$

* Συμβολίζουμε με D το διάστημα στο οποίο ισχύει η ανάπτυξη.

Άσκηση 6.4 Αποδείξτε τη σχέση:

$$\boxed{e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots}$$

Άσκηση 6.5 Αναπτύξτε σε δυναμοσειρά τις συναρτήσεις $\sin(-x)$ και $\cos(-x)$. Δείξτε ότι τα αποτελέσματά σας συμφωνούν με την ιδιότητα του $\sin x$ να είναι περιττή και του $\cos x$ να είναι άρτια συνάρτηση.

Άσκηση 6.6 Με δεδομένο τον τύπο ανάπτυξης της συνάρτησης $(1+x)^{-1}$, αποδείξτε τον τύπο ανάπτυξης της συνάρτησης $\ln(1+x)$. *Υπόδειξη:* Παρατηρήστε ότι

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} \quad .$$

Άσκηση 6.7 Θεωρούμε μία πολυωνυμική συνάρτηση:

$$f(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots + b_n x^n \quad .$$

Δείξτε ότι η ανάπτυξη Maclaurin της συνάρτησης συμπίπτει με την ίδια τη συνάρτηση.

Άσκηση 6.8 Για $|x| << 1$ μπορούμε να κάνουμε την προσέγγιση: $x^n \approx 0$ για $n > 1$. (Δηλαδή, οι δυνάμεις x^2, x^3, x^4, … , θεωρούνται αμελητέες για πολύ μικρές τιμές τού $|x|$.) Δείξτε ότι, για κάθε συνάρτηση $f(x)$ ορισμένη σε ένα διάστημα $(-a\,,\,a)$, ισχύει η προσεγγιστική σχέση:

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)\,x\,, \quad \text{για } |x| << 1 \quad .$$

Σαν εφαρμογή, δείξτε ότι, για $|x| << 1$,

$$e^x \approx 1 + x \ , \qquad \sin x \approx x \ , \qquad \cos x \approx 1 \quad .$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

7.1 Δύο Βασικές Προτάσεις

Πριν αναφερθούμε στις διαφορικές εξισώσεις, θα ήταν χρήσιμο να διατυπώσουμε δύο βασικές προτάσεις που θα παίξουν σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη του θέματος:

Πρόταση 1: Έστω ότι ισχύει η διαφορική ισότητα:

$$f(x)\,dx = g(y)\,dy \quad \text{όπου} \quad y=\varphi(x)\ .$$

Τότε,

$$\int f(x)\,dx = \int g(y)\,dy\ .$$

(Προσέξτε ότι η σχέση αυτή εκφράζει ισότητα *συνόλων* με άπειρα στοιχεία!)

Απόδειξη: Έχουμε ότι $dy = d\varphi(x) = \varphi'(x)\,dx$. Έτσι,

$$f(x)\,dx = g(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx \;\Rightarrow\; f(x) = g(\varphi(x))\,\varphi'(x) \;\Rightarrow$$

$$\int f(x)\,dx = \int g(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx\ .$$

Όμως, όπως είδαμε στην Παρ.4.2, το σύμβολο "d" μέσα στο ολοκλήρωμα έχει τις ίδιες ιδιότητες με το διαφορικό μιας συνάρτησης. Έτσι, μπορούμε να γράψουμε: $\varphi'(x)\,dx = d\,\varphi(x)$ και $\int f(x)\,dx = \int g(\varphi(x))\,d\,\varphi(x) = \int g(y)\,dy$.

Πρόταση 2: Έστω ότι ισχύει η διαφορική ισότητα:

$$f(x)\,dx = g(y)\,dy \quad \text{όπου} \quad y=\varphi(x)\ .$$

Υποθέτουμε, επιπλέον, ότι

$$\varphi(x_0)=y_0 \quad (\text{δηλαδή,}\ \ y=y_0\ \ \text{για}\ \ x=x_0\ ).$$

Τότε,

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \int_{y_0}^{y} g(u)\,du\ .$$

Απόδειξη: Όπως είδαμε νωρίτερα, $\int f(x)\,dx = \int g(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx$.

Μετονομάζουμε τη μεταβλητή x σε t, και ολοκληρώνουμε από x_0 έως x:

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} g(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} g(\varphi(t))\,d\varphi(t)\ .$$

Κάνουμε τώρα την αντικατάσταση $u=\varphi(t)$, και μετασχηματίζουμε το δεξί ολοκλήρωμα (που είναι εκφρασμένο ως προς t) σε ολοκλήρωμα ως προς u . Για να βρούμε τα όρια του νέου ολοκληρώματος, σκεφτόμαστε ως εξής:

$$\text{Για } t=x_0 \;\Rightarrow\; u=\varphi(x_0)=y_0 \;.$$
$$\text{Για } t=x \;\Rightarrow\; u=\varphi(x)=y \;.$$

Έτσι, $\int_{x_0}^{x} dt \to \int_{y_0}^{y} du$, $\int_{x_0}^{x} g(\varphi(t))\,d\varphi(t)=\int_{y_0}^{y} g(u)\,du$,

και συνεπώς, $\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt=\int_{y_0}^{y} g(u)\,du$.

Σημείωση: Συχνά, για να απλουστεύσουμε τη γραφή μας, γράφουμε (με κάποιο ρίσκο σύγχυσης των ρόλων των συμβόλων!):

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx=\int_{y_0}^{y} g(y)\,dy \;.$$

Προσέξτε όμως ότι, αν και τα σύμβολα είναι ίδια, οι ρόλοι τους είναι διαφορετικοί: καθένα από τα δύο ολοκληρώματα είναι *συνάρτηση του άνω ορίου του*, άσχετα από το όνομα που δίνουμε στη μεταβλητή ολοκλήρωσης!

7.2 Διαφορική Εξίσωση Πρώτης Τάξης

Ξεκινάμε με μία σύντομη ματιά στους διάφορους τύπους εξισώσεων που συναντούμε στα μαθηματικά:

1. Μία *αλγεβρική εξίσωση* είναι εξίσωση της μορφής

$$F(x)=0 \;.$$

Η *λύση* της είναι το σύνολο των τιμών τού x (*ρίζες*) που την επαληθεύουν. Οι ρίζες μιας αλγεβρικής εξίσωσης μπορεί να είναι πραγματικές ή/και μιγαδικές. *Παράδειγμα:* $F(x)\equiv ax^2+bx+c=0$.

2. Μία *συνάρτηση* ορίζεται με εξίσωση της μορφής

$$F(x,y)=0 \;.$$

Συχνά, η σχέση αυτή μπορεί να λυθεί ως προς μία εκ των μεταβλητών συναρτήσει της άλλης: $y=f(x)$. Σε κάθε τιμή τού x αντιστοιχεί μία μοναδική τιμή τού y.

3. Μία *διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης* είναι εξίσωση της μορφής

$$F(x,y,y')=0 \quad \text{όπου} \quad y=y(x) \quad \text{και} \quad y'=dy/dx \;.$$

Συχνά, η σχέση αυτή μπορεί να λυθεί ως προς την παράγωγο: $y'=f(x,y)$.

Η *γενική λύση* μίας διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης είναι ένα *άπειρο σύνολο συναρτήσεων* που την επαληθεύουν. Η γενική λύση εμπεριέχει μία *αυθαίρετη σταθερή παράμετρο C*, έχει δηλαδή τη μορφή

$$y = \varphi(x, C) \ .$$

Για μία συγκεκριμένη τιμή $C=C_0$ της σταθεράς, έχουμε μία *ειδική λύση* της διαφορικής εξίσωσης:

$$y = \varphi(x, C_0) \ .$$

Για τον προσδιορισμό μιας ειδικής λύσης, εκτός από την διαφορική εξίσωση καθαυτή πρέπει να μας δοθεί και μία *αρχική συνθήκη*, στη μορφή

$$y = y_0 \quad \text{όταν} \quad x = x_0 \quad \Leftrightarrow \quad y(x_0) = y_0 \ .$$

Τότε, θέτοντας $y_0 = \varphi(x_0, C_0)$ στη γενική λύση, μπορούμε να προσδιορίσουμε τη σταθερά C_0 ως προς τα x_0 και y_0 και να βρούμε τη ζητούμενη ειδική λύση.

Η διαδικασία εύρεσης της (γενικής ή ειδικής) λύσης μίας διαφορικής εξίσωσης καλείται *ολοκλήρωση* της διαφορικής εξίσωσης.

7.3 Μερικές Ειδικές Περιπτώσεις

Ας δούμε τώρα κάποιες ειδικές περιπτώσεις εφαρμογής της σχέσης $y' = f(x, y)$:

1. Η διαφορική εξίσωση

$$y' = f(x) \tag{1}$$

$$\text{με αρχική συνθήκη} \quad y = y_0 \ \text{όταν} \ x = x_0 \ . \tag{2}$$

Μπορούμε να εργαστούμε με δύο τρόπους:

Α΄ Τρόπος: Βρίσκουμε πρώτα τη *γενική* λύση τής (1) (η οποία λύση θα εξαρτάται από μία αυθαίρετη σταθερά) και στη συνέχεια εφαρμόζουμε την αρχική συνθήκη (2) για να προσδιορίσουμε την τιμή της σταθεράς και την αντίστοιχη *ειδική* λύση:

Γράφουμε, λαμβάνοντας υπόψη και την *Πρόταση 1*:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \ \Rightarrow \ dy = f(x)\,dx \ \Rightarrow \ \int dy = \int f(x)\,dx \ .$$

Αν $F(x)$ είναι τυχαία παράγουσα της $f(x)$, τότε $y + C_1 = F(x) + C_2 \ \Rightarrow$

$$y(x) = F(x) + C \quad \text{(γενική λύση)} \tag{3}$$

Εφαρμόζουμε τώρα την αρχική συνθήκη (2) στην (3):

$$y_0 = F(x_0) + C \;\;\Rightarrow\;\; C = y_0 - F(x_0) \;.$$

Αντικαθιστώντας την τιμή τής C στην (3), βρίσκουμε: $y = F(x) + y_0 - F(x_0) \;\Rightarrow$

$$\boxed{y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt} \quad \text{(ειδική λύση)} \qquad (4)$$

Β΄ Τρόπος: Βρίσκουμε *απευθείας* την ειδική λύση εφαρμόζοντας εξαρχής την αρχική συνθήκη (2) [χωρίς πρώτα να βρούμε τη γενική λύση (3)], λαμβάνοντας υπόψη και την *Πρόταση 2*:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \;\Rightarrow\; dy = f(x)\,dx \;\Rightarrow\; \int_{y_0}^{y} du = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \;\Rightarrow\; (4)\,,\;\text{όπως πριν}\,.$$

Ο τρόπος αυτός είναι πιο σύντομος και ίσως πιο κατάλληλος για τις εφαρμογές, έχει όμως το μειονέκτημα ότι δεν μας δίνεται η ευκαιρία να βρούμε και τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης, που σε κάποιες περιπτώσεις είναι χρήσιμη.

Άσκηση 7.1 Δείξτε ότι η ειδική λύση (4) επαληθεύει την διαφορική εξίσωση (1) και ικανοποιεί την αρχική συνθήκη (2). (*Υπόδειξη:* Προσέξτε ότι το y είναι συνάρτηση του άνω ορίου x του ολοκληρώματος.)

Σημείωση: Συχνά απλοποιούμε τη γραφή της σχέσης (4), καταργώντας το βοηθητικό σύμβολο t και γράφοντας x στη θέση του:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \qquad (4΄)$$

Αυτή την πρακτική θα ακολουθήσουμε κι εμείς στη συνέχεια. Δεν θα πρέπει, όμως, να ξεχνάμε ότι το y είναι *συνάρτηση του άνω ορίου του ολοκληρώματος*, και *όχι* της μεταβλητής ολοκλήρωσης (στην οποία θα μπορούσαμε να δώσουμε *οποιοδήποτε* όνομα)!

2. Η διαφορική εξίσωση *χωριζόμενων μεταβλητών*:

$$y΄ = f(x)\,g(y) \qquad (5)$$

με αρχική συνθήκη $y = y_0$ όταν $x = x_0$.

Θα εργαστούμε με τον Β΄ τρόπο:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\,g(y) \;\Rightarrow\; \frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx \;\Rightarrow$$

$$\boxed{\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{g(y)} = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx} \quad \text{(ειδική λύση)} \qquad (6)$$

Άσκηση 7.2 Δείξτε ότι η έκφραση (6) όντως επαληθεύει την διαφορική εξίσωση (5). (*Υπόδειξη:* Παραγωγίστε και τα δύο μέλη ως προς x. Προσέξτε ότι στο δεξί ολοκλήρωμα το x είναι άνω όριο, ενώ στο αριστερό ολοκλήρωμα το x υπεισέρχεται στο άνω όριο μέσω του y. Θεωρήστε, έτσι, το αριστερό ολοκλήρωμα σαν σύνθετη συνάρτηση που πρέπει να παραγωγιστεί πρώτα ως προς y και μετά ως προς x.)

Άσκηση 7.3 Βρείτε την έκφραση που δίνει την ειδική λύση για κάθε μία από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις (με την ίδια αρχική συνθήκη όπως πριν):

(1) $y' = g(y)$ (2) $y' = f(x)/g(y)$ (3) $y' = g(y)/f(x)$

7.4 Παραδείγματα

Ας δούμε μερικά παραδείγματα διαφορικών εξισώσεων με αρχικές συνθήκες:

1. $y' = ay \quad | \quad y = y_0$ όταν $x = x_0$.

Βρίσκουμε τη γενική λύση (υποθέτουμε ότι $y > 0$, $\forall x$):

$$\frac{dy}{dx} = ay \;\Rightarrow\; \frac{dy}{y} = adx \;\Rightarrow\; \int \frac{dy}{y} = a\int dx \;\Rightarrow\; \ln y + C_1 = ax + C_2 \;\Rightarrow$$

$$\ln y = ax + C \;\Rightarrow\; y = e^{ax+C} \;\Rightarrow\; y = C e^{ax} \text{ (γενική λύση)}$$

(όπου, στο τελευταίο βήμα, θέσαμε C στη θέση τού e^C). Για να εφαρμόσουμε την αρχική συνθήκη, θέτουμε $x=x_0$ και $y=y_0$ στη γενική λύση και λύνουμε ως προς C. Το αποτέλεσμα είναι: $C = y_0\, e^{-ax_0}$. Έτσι, η ζητούμενη ειδική λύση είναι: $y = y_0\, e^{a(x-x_0)}$.

Την ειδική λύση μπορούμε να τη βρούμε απευθείας (χωρίς, δηλαδή, να μεσολαβήσει η εύρεση της γενικής λύσης), ως εξής:

$$\frac{dy}{y} = a\,dx \;\Rightarrow\; \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{y} = a\int_{x_0}^{x} dx \;\Rightarrow\; \ln\left(\frac{y}{y_0}\right) = a(x-x_0) \;\Rightarrow\; y = y_0\, e^{a(x-x_0)} .$$

2. $y' = 3x^2 y \quad | \quad y = 2$ όταν $x = 0$.

Βρίσκουμε απευθείας την ειδική λύση:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 y \;\Rightarrow\; \frac{dy}{y} = 3x^2 dx \;\Rightarrow\; \int_2^y \frac{dy}{y} = 3\int_0^x x^2 dx \;\Rightarrow\; \ln(y/2) = x^3 \;\Rightarrow\; y = 2e^{x^3} .$$

Άσκηση: Βρείτε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης και δείξτε ότι οδηγεί στην ίδια ειδική λύση που βρήκαμε παραπάνω.

3. $y' = x^3 e^{-y}$ | $y = 0$ όταν $x = 0$.

$$\frac{dy}{dx} = x^3 e^{-y} \Rightarrow e^y dy = x^3 dx \Rightarrow \int_0^y e^y dy = \int_0^x x^3 dx \Rightarrow e^y - 1 = \frac{x^4}{4} \Rightarrow$$

$$y = \ln\left(\frac{x^4}{4} + 1\right) .$$

Άσκηση: Επαληθεύστε ότι η λύση αυτή ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση και την αρχική συνθήκη.

4. $y' = -x^3 / y^3$ (γενική λύση μόνο) .

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^3}{y^3} \Rightarrow y^3 dy = -x^3 dx \Rightarrow \int y^3 dy = -\int x^3 dx \Rightarrow \frac{y^4}{4} = -\frac{x^4}{4} + C_1 \Rightarrow$$

$$y^4 + x^4 + C = 0 .$$

Παρατηρούμε ότι η λύση είναι *πεπλεγμένη* συνάρτηση!

Άσκηση: Δείξτε ότι η λύση αυτή επαληθεύει την δοσμένη διαφορική εξίσωση. (*Υπόδειξη:* Παραγωγίστε τη λύση ως προς x.)

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

I. Τριγωνομετρικοί Τύποι

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \quad , \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad , \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} \quad , \quad \sin^2 x = \frac{1}{1+\cot^2 x} = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$$

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B} \quad , \quad \cot(A \pm B) = \frac{\cot A \cot B \mp 1}{\cot B \pm \cot A}$$

$$\sin 2A = 2\sin A \cos A$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A$$

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} \quad , \quad \cot 2A = \frac{\cot^2 A - 1}{2\cot A}$$

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A - \sin B = 2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = 2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B-A}{2}$$

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)]$$

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}[\sin(A+B) + \sin(A-B)]$$

$$\sin(-A) = -\sin A \quad , \quad \cos(-A) = \cos A$$

$$\tan(-A) = -\tan A \quad , \quad \cot(-A) = -\cot A$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} \pm A) = \cos A \quad , \quad \cos(\frac{\pi}{2} \pm A) = \mp \sin A$$

$$\sin(\pi \pm A) = \mp \sin A \quad , \quad \cos(\pi \pm A) = -\cos A$$

	sin	cos	tan	cot
0	0	1	0	∞
$\pi/6 = 30^{o}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\pi/4 = 45^{o}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\pi/3 = 60^{o}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\pi/2 = 90^{o}$	1	0	∞	0
$\pi = 180^{o}$	0	–1	0	∞

II. Βασικές Τριγωνομετρικές Εξισώσεις

$$\sin x = \sin\alpha \;\Rightarrow\; \begin{cases} x=\alpha+2k\pi \\ x=(2k+1)\pi-\alpha \end{cases} \qquad (k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$$

$$\cos x = \cos\alpha \;\Rightarrow\; \begin{cases} x=\alpha+2k\pi \\ x=2k\pi-\alpha \end{cases} \qquad (k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$$

$$\tan x = \tan\alpha \;\Rightarrow\; x = \alpha + k\pi \qquad (k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$$

$$\cot x = \cot\alpha \;\Rightarrow\; x = \alpha + k\pi \qquad (k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$$

$$\sin x = -\sin\alpha \;\Rightarrow\; \begin{cases} x=2k\pi-\alpha \\ x=\alpha+(2k+1)\pi \end{cases} \qquad (k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$$

$$\cos x = -\cos\alpha \;\Rightarrow\; \begin{cases} x=(2k+1)\pi-\alpha \\ x=\alpha+(2k+1)\pi \end{cases} \qquad (k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$$

III. Ιδιότητες Ανισοτήτων

$$a < b \;\; \kappa\alpha\iota \;\; b < c \;\Rightarrow\; a < c$$

$$a \geq b \;\; \kappa\alpha\iota \;\; b \geq a \;\Rightarrow\; a = b$$

$$a < b \;\Rightarrow\; -a > -b$$

$$0 < a < b \;\Rightarrow\; \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

$$a < b \;\; \kappa\alpha\iota \;\; c \leq d \;\Rightarrow\; a + c < b + d$$

$$0 < a < b \;\; \kappa\alpha\iota \;\; 0 < c \leq d \;\Rightarrow\; a\,c < b\,d$$

$$0 < a < 1 \;\Rightarrow\; a > a^2 > a^3 > \cdots \;, \quad a^n < 1 \;, \quad \sqrt[n]{a} < 1$$

$$a > 1 \;\Rightarrow\; a < a^2 < a^3 < \cdots \;, \quad a^n > 1 \;, \quad \sqrt[n]{a} > 1$$

$$0 < a < b \;\Rightarrow\; a^n < b^n \;, \quad \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$$

IV. Ιδιότητες Αναλογιών

Έστω ότι $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} = \kappa$. Τότε:

$$\alpha\delta = \beta\gamma \;, \qquad \frac{\alpha \pm \gamma}{\beta \pm \delta} = \kappa$$

$$\frac{\alpha \pm \beta}{\beta} = \frac{\gamma \pm \delta}{\delta} \;, \qquad \frac{\alpha}{\beta \pm \alpha} = \frac{\gamma}{\delta \pm \gamma}$$

V. Ιδιότητες Απόλυτων Τιμών Πραγματικών Αριθμών

$$|a| = a, \quad \alpha\nu \ \ a \geq 0$$
$$\quad = -a, \ \ \alpha\nu \ \ a < 0$$

$$|a| \geq 0$$

$$|-a| = |a|$$

$$|a|^2 = a^2$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$|x| \leq \varepsilon \ \Leftrightarrow \ -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon \quad (\varepsilon > 0)$$

$$|x| \geq a > 0 \ \Leftrightarrow \ x \geq a \ \ \eta' \ \ x \leq -a$$

$$\big||a| - |b|\big| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$$

$$|a \cdot b| = |a||b|$$

$$|a^k| = |a|^k \quad (k \in Z)$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0)$$

VI. Ιδιότητες Δυνάμεων και Λογαρίθμων

$$x^0 = 1 \qquad (x \neq 0)$$

$$x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$$

$$\frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$$

$$\frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha}$$

$$\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta}$$

$$(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha \quad , \quad \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}$$

....

$$\ln 1 = 0$$

$$\ln\left(e^\alpha\right) = \alpha \quad (\alpha \in R) \quad , \qquad e^{\ln\alpha} = \alpha \quad (\alpha \in R^+)$$

$$\ln(\alpha\beta) = \ln\alpha + \ln\beta$$

$$\ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \ln\alpha - \ln\beta = -\ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

$$\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -\ln\alpha$$

$$\ln\left(\alpha^k\right) = k\ln\alpha \quad (k \in R)$$

VII. Μιγαδικοί Αριθμοί

Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 +1=0$. Αυτή δεν έχει λύση για $x \in R$. Για το λόγο αυτό, επεκτείνουμε το σύνολο των αριθμών πέρα από τους πραγματικούς, ορίζοντας την *φανταστική μονάδα* i έτσι ώστε

$$i^2 = -1 \quad \text{ή, συμβολικά,} \quad i = \sqrt{-1}$$

Η λύση, λοιπόν, της παραπάνω εξίσωσης είναι $x= \pm\, i$.

Δοθέντων των *πραγματικών* αριθμών x και y, ορίζουμε τον *μιγαδικό αριθμό*

$$z = x + i\, y$$

Συχνά τον παριστούμε στη μορφή διατεταγμένου ζεύγους:

$$z = x + i\, y \equiv (x, y)$$

Το $x= \text{Re}\, z$ καλείται *πραγματικό μέρος* του μιγαδικού αριθμού z, ενώ το $y= \text{Im}\, z$ αποτελεί το *φανταστικό μέρος* τού z. Ειδικά, ο μιγαδικός αριθμός $z = 0$ αντιστοιχεί στις τιμές $x = 0$ και $y = 0$. Γενικότερα, αν $y = 0$, ο αριθμός z είναι *πραγματικός*.

Δοθέντος ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + i\, y$, ο αριθμός

$$\bar{z} = x - i\, y$$

καλείται *μιγαδικός συζυγής* τού z. Επίσης, η *πραγματική* ποσότητα

$$|z| = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

καλείται *μέτρο* τού z. Παρατηρούμε ότι

$$|z| = |\bar{z}|$$

Παράδειγμα: Αν $z = 3+2\, i$, τότε $\bar{z} = 3 - 2\, i$ και $|z| = |\bar{z}| = \sqrt{13}$.

Άσκηση: Δείξτε ότι, αν $z = \bar{z}$, ο z είναι *πραγματικός*, και αντίστροφα.

Άσκηση: Δείξτε ότι, αν $z = x + i\, y$, τότε

$$\text{Re}\, z = x = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad , \quad \text{Im}\, z = y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = x_1 + i\,y_1$ και $z_2 = x_2 + i\,y_2$. Όπως μπορούμε να δείξουμε, το άθροισμα και η διαφορά τους δίνονται από τις σχέσεις

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i\,(y_1 - y_2)$$

Άσκηση: Δείξτε ότι, αν $z_1 = z_2$, τότε $x_1 = x_2$ και $y_1 = y_2$.

Επίσης, λαμβάνοντας υπόψη ότι $i^2 = -1$, βρίσκουμε το γινόμενο

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i\,(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Ειδικά, θέτοντας $z_1 = z = x + i\,y$ και $z_2 = \bar{z} = x - i\,y$, παίρνουμε:

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$$

Για να βρούμε το πηλίκο z_1 / z_2 $(z_2 \neq 0)$ εφαρμόζουμε ένα τέχνασμα:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(x_1 + i\,y_1)(x_2 - i\,y_2)}{x_2{}^2 + y_2{}^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2{}^2 + y_2{}^2} + i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2{}^2 + y_2{}^2}$$

Ειδικά, για $z = x + i\,y$,

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - i\,y}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\,\frac{y}{x^2 + y^2}$$

Ιδιότητες:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \;, \qquad \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$

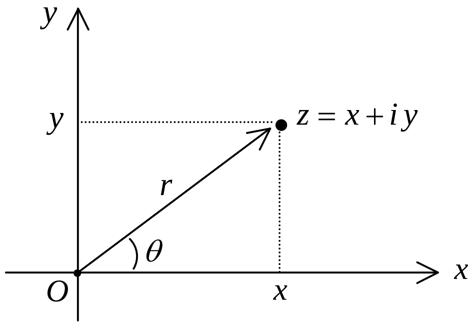
$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\,\bar{z}_2 \;, \qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

$$|\bar{z}| = |z| \;, \qquad z\bar{z} = |z|^2 \;, \qquad |z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$$

$$|z^n| = |z|^n \;, \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

Άσκηση: Δίνονται: $z_1 = 3 - 2\,i$ και $z_2 = -2 + i$. Βρείτε τις ποσότητες $|z_1 \pm z_2|$, $\bar{z}_1 z_2$ και $\overline{z_1 / z_2}$.

Πολική μορφή μιγαδικού αριθμού



Ένας μιγαδικός αριθμός $z = x + i\,y \equiv (x, y)$ αντιστοιχεί σε ένα σημείο του *μιγαδικού επιπέδου* *x*-*y*. Εναλλακτικά, μπορεί να παρασταθεί σαν διάνυσμα από την αρχή *O* των αξόνων ως το σημείο αυτό. Τα *x* και *y* είναι οι *Καρτεσιανές συντεταγμένες* του σημείου, ή, οι *ορθογώνιες συνιστώσες* του διανύσματος. Παρατηρούμε ότι

$$x = r\cos\theta \;, \quad y = r\sin\theta$$

όπου

$$r = |z| = (x^2 + y^2)^{1/2} \quad \text{και} \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

Έτσι, μπορούμε να γράψουμε:

$$\boxed{z = x + i\,y = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

Η παραπάνω έκφραση αποτελεί την *πολική μορφή* του μιγαδικού αριθμού *z*. Προσέξτε ότι $\bar{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta)$.

Έστω $z_1 = r_1\,(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ και $z_2 = r_2\,(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ δύο μιγαδικοί αριθμοί. Όπως αποδεικνύεται,

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\,[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\,[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

Ειδικά, ο αντίστροφος ενός μιγαδικού αριθμού $z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ γράφεται:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r}\,(\cos\theta - i\sin\theta) = \frac{1}{r}\,[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$$

Άσκηση: Χρησιμοποιώντας τις πολικές μορφές, δείξτε αναλυτικά ότι $z\,z^{-1} = 1$.

Εκθετική μορφή μιγαδικού αριθμού

Εισάγουμε τώρα τον συμβολισμό

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

(ο συμβολισμός αυτός δεν είναι τυχαίος αλλά έχει βαθύτερη σημασία, η οποία γίνεται φανερή στο πλαίσιο της θεωρίας των αναλυτικών συναρτήσεων). Προσέξτε ότι

$$e^{-i\theta} = e^{i\,(-\theta)} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta$$

Επίσης, $|e^{i\theta}| = |e^{-i\theta}| = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

Άσκηση: Δείξτε ότι

$$e^{-i\theta} = 1/e^{i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$$

Ο μιγαδικός αριθμός $z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$, όπου $r = |z|$, μπορεί τώρα να γραφεί στην εκθετική μορφή

$$\boxed{z = r\,e^{i\theta}}$$

Ισχύουν τα εξής:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r}\,e^{-i\theta} = \frac{1}{r}\,e^{i\,(-\theta)}, \qquad \bar{z} = r\,e^{-i\theta}$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\,e^{i(\theta_1+\theta_2)}, \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\,e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

όπου $z_1 = r_1\,e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2\,e^{i\theta_2}$. Προσέξτε, ειδικά, ότι το γινόμενο και το πηλίκο εκθετικών όρων υπακούουν στους συνηθισμένους κανόνες που γνωρίζουμε από την άλγεβρα των πραγματικών αριθμών.

Παράδειγμα: Ο μιγαδικός αριθμός $z = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$, με $|z| = r = 2$, γράφεται:

$$z = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = 2\,e^{i\,(-\pi/4)} = 2\,e^{-i\pi/4}$$

Δυνάμεις και ρίζες μιγαδικών αριθμών

Έστω $z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,e^{i\theta}$ ένας μιγαδικός αριθμός, όπου $r = |z|$. Ισχύει τότε ότι

$$z^n = r^n e^{in\theta} = r^n (\cos n\theta + i\sin n\theta) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

Ειδικά, για $z = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ (r=1), βρίσκουμε τον *τύπο του de Moivre*:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

Προσέξτε επίσης ότι, για $z \neq 0$, έχουμε ότι $z^0 = 1$ και $z^{-n} = 1/z^n$.

Δοθέντος ενός μιγαδικού αριθμού $z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$, όπου $r = |z|$, μια *n-οστή ρίζα* του είναι κάθε μιγαδικός αριθμός c που ικανοποιεί την εξίσωση $c^n = z$. Γράφουμε: $c = \sqrt[n]{z}$. Μια n-οστή ρίζα ενός μιγαδικού αριθμού παίρνει n διαφορετικές τιμές που δίνονται από τον τύπο

$$c_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2, \cdots, (n-1)$$

Παράδειγμα: Έστω $z = 1$. Ζητούμε τις 4^{ες} ρίζες της μονάδας, δηλαδή τους μιγαδικούς αριθμούς c που ικανοποιούν την εξίσωση $c^4 = 1$. Γράφουμε:

$$z = 1\,(\cos 0 + i\sin 0) \qquad (r = 1,\ \theta = 0)$$

Τότε,

$$c_k = \cos\frac{2k\pi}{4} + i\sin\frac{2k\pi}{4} = \cos\frac{k\pi}{2} + i\sin\frac{k\pi}{2}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Βρίσκουμε:

$$c_0 = 1, \quad c_1 = i, \quad c_2 = -1, \quad c_3 = -i$$

Παράδειγμα: Έστω $z = i$. Ζητούμε τις τετραγωνικές ρίζες τού i, δηλαδή τους μιγαδικούς αριθμούς c που ικανοποιούν την εξίσωση $c^2 = i$. Έχουμε:

$$z = 1\,[\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)] \qquad (r = 1,\ \theta = \pi/2)$$

$$c_k = \cos\frac{(\pi/2) + 2k\pi}{2} + i\sin\frac{(\pi/2) + 2k\pi}{2}, \quad k = 0, 1$$

$$c_0 = \cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

$$c_1 = \cos(5\pi/4) + i\sin(5\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1.1 (1) $D=R$ (2) $D=[-1,1]$ (3) $D=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ (4) $D=[-1/3,1]$
(5) $D=(-5,2)$ (6) $D=(1,+\infty)$ (7) $D=R-\{k\pi/2+\pi/4\}$ (8) $D=R-\{3k\pi+3\pi/2\}$

1.3 (1) 0 (2) -2 (3) 1

1.5 (1) άρτια (2) περιττή (3) τίποτα από τα δύο (4) άρτια (5) περιττή
(6) περιττή (7) άρτια (8) περιττή (9) άρτια (10) περιττή

1.8 (1) όχι περιοδική (2) $a=12\pi$ (3) $a=\pi$ (4) $a=\pi/\lambda$

2.1 (1) $y'=1/4\sqrt{x}+1/\sqrt{x^3}$ (2) $y'=(x\cos x-\sin x)/x^2$
(3) $y'=(3\sqrt{x}+2\sqrt{x^3})e^x-3(1-\ln x)/x^2$

2.2 (1) $y'=2xy[\sin(3x^2+1)]^{-2/3}\cos(3x^2+1)$
(2) $y'=-2x^5(x^6+1)^{-2/3}\sin\left(2\sqrt[3]{x^6+1}\right)$ (3) $y'=3\sin 2x\,\sin 4x/\cos^2(\sin^3 2x)$
(4) $y'=4x^3/(x^4+1)\ln(x^4+1)$ (5) $y'=x\left(\ln\sqrt{x^2+1}\right)^{-1/2}/2(x^2+1)$
(6) $y'=y[1+\ln(x+1)]$ (7) $y'=xy(1+2\ln x)$
(8) $y'=y[\cos x\cot x-\sin x\ln(\sin x)]$ (9) $y'=1/x$

3.2 (1) 3 (2) 0 (3) $1/\sqrt{e}$ (4) $1/e$

4.1 (1) $-\dfrac{2}{x}-3\ln x+\sqrt{x}+C$ (2) $3x-2\ln x+\dfrac{8}{3}\sqrt{x^3}+C$

4.4 (1) $\ln(\ln x)+C$ (2) $-\dfrac{1}{2}e^{1/x^2}+C$ (3) $\dfrac{1}{4}[\ln(x^2+1)]^2+C$
(4) $\ln(\tan x)+C$ (5) $2\sin(e^{\sqrt{x}})+C$ (6) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\arctan(x/\sqrt{5})+C$
(7) $\dfrac{1}{3}\arctan(\dfrac{x}{3}-1)+C$

4.5 (1) $(x^2-2x+2)e^x+C$ (2) $\dfrac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)+C$
(3) $\dfrac{1}{2}(x-\sin x\cos x)+C=\dfrac{1}{2}(x-\dfrac{\sin 2x}{2})+C$
(4) $\dfrac{1}{2}(x+\sin x\cos x)+C=\dfrac{1}{2}(x+\dfrac{\sin 2x}{2})+C$

4.6 (1) $e^{\sqrt{x}}(\cos\sqrt{x}+\sin\sqrt{x})+C$ (2) $\sin^2 x[\ln(\sin x)-1/2]+C$

5.2 (1) $(\ln 5)/2$ (2) $\sqrt{e}-1$ (3) $2/\pi$

ΕΠΙΛΟΓΕΣ ΑΠΟ ΤΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. A. F. Bermant, I. G. Aramanovich, *Mathematical Analysis* (Mir Publishers, 1975).

2. D. D. Berkey, *Calculus*, 2nd Edition (Saunders College, 1988).

3. M. Spivak, *Calculus*, 3rd Edition (Cambridge University Press, 1994).

4. G. B. Thomas, R. L. Finney, *Calculus and Analytic Geometry*, 9th Edition (Addison-Wesley, 1998).

5. R. Wrede, M. R. Spiegel, *Advanced Calculus*, 2nd Edition (Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 2002).

6. M. D. Greenberg, *Advanced Engineering Mathematics*, 2nd Edition (Prentice-Hall, 1998).

7. O. V. Manturov, N. M. Matveev, *A Course of Higher Mathematics* (Mir Publishers, 1989).

8. L. Elsgolts, *Differential Equations and the Calculus of Variations* (Mir Publishers, 1977).

9. R. V. Churchill, J. W. Brown, *Complex Variables and Applications*, 5th Edition (McGraw-Hill, 1990).

10. Σ. Τραχανά, *Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις* (Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2005).

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΒΑΣΙΚΩΝ ΟΡΩΝ