ΣΧΟΛΗ. Ν. ΔΟΚΙΜΩΝ

ΜΑΘΗΜΑ
ΘΕΩΡΗΤΙΚΟΣ και ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΟΣ
ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ

ΣΧΟΛΙΑ – ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ
ΓΙΑ ΤΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ MAXWELL
(N. FARADAY, N. AMPERE – MAXWELL)

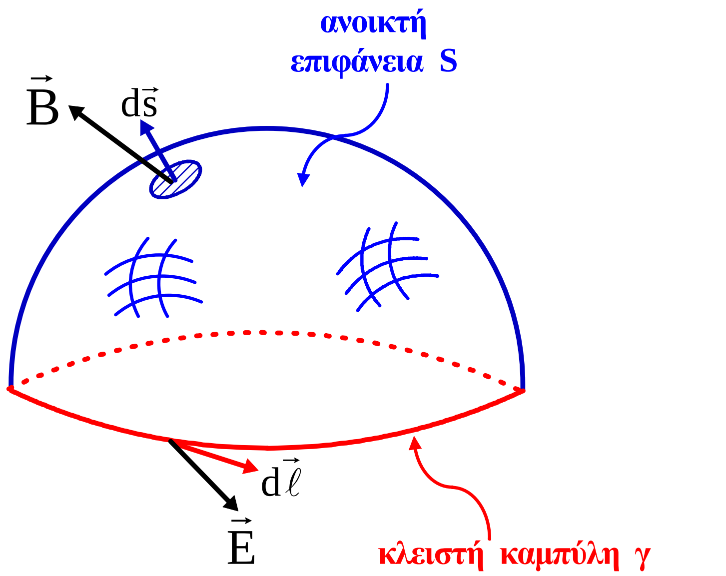
Δρ. Α. Μαγουλάς

Νοέμβριος 2016

α) Νόμος Faraday

Ο Michael Faraday μετά από μια μακρά σειρά πειραμάτων που έκανε ανακάλυψε την «*παραγωγή ηλεκτρικών φαινομένων που οφείλονται σε μαγνητικές δράσεις*». Θα ήταν πολύ ενδιαφέρον να μελετήσει κανείς τα γραφόμενα του Faraday όπως δημοσιεύθηκαν στο βιβλίο του "Experimental Reasearches in Electricity" (1839). Το βιβλίο αυτό πρέπει να υπάρχει ελεύθερο στο internet.

Παρακάτω θα αναφέρουμε την τελική διατύπωση του Νόμου της Ηλεκτρομαγνητικής Επαγωγής (Νόμος Faraday) όπως διαμορφώθηκε από τον Maxwell.



Σχ. 1

Θεωρούμε μια ανοικτή επιφάνεια **S** η οποία έχει όριο την κλειστή καμπύλη **γ.** Με $d\vec{s}$ συμβολίζουμε το κάθετο διάνυσμα σε κάθε σημείο της **S,** και με $d\vec{\ell}$ το εφαπτομενικό διάνυσμα σε κάθε σημείο της **γ.** Τα δύο αυτά διανύσματα συνδέονται, ως γνωστόν, με τον κανόνα της δεξιάς χειρός.

Έστω τώρα ότι στο χώρο που ευρίσκεται η επιφάνεια **S** υπάρχει ένα μαγνητικό πεδίο με μαγνητική επαγωγή $\vec{B}$. Σε κάθε σημείο επί της **S** θα υπάρχει ένα διάνυσμα $\vec{B}$ το οποίο θα σχηματίζει μια γωνία με το κάθετο διάνυσμα $d\vec{s}$.

Η μαγνητική ροή Ψ_m δια της επιφανείας **S** θα είναι:

$$\Psi_m = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

Έστω τώρα ότι η ροή Ψ_m **μεταβάλλεται χρονικά** δηλαδή ισχύει $\dfrac{d\,\Psi_m}{d\,t} \neq 0$

Σύμφωνα με τον Νόμο Faraday η χρονική μεταβολή της μαγνητικής ροής Ψ_m δια της **S** έχει σαν συνέπεια την ανάπτυξη ενός ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ στον χώρο!

Η ακριβής μαθηματική σχέση που περιγράφει το φαινόμενο είναι:

$$\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \;=\; -\frac{d}{d\,t} \iint_{S} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του $\vec{E}$ **στο όριο της ανοικτής επιφάνειας S (κλειστή καμπύλη γ)**

μαγνητική ροή Ψ_m δια της ανοικτής επιφάνειας S

Η μαθηματική διατύπωση του Νόμου είναι εδώ σε **ολοκληρωτική μορφή** και συνδέει ολοκληρώματα των δύο πεδιακών μεγεθών $\vec{B}$ και $\vec{E}$ σε διαφορετικές περιοχές του χώρου (κλειστό επικαμπύλιο στην **γ** για το $\vec{E}$ και επιφανειακό στην **S** για το $\vec{B}$)

<u>Παρατήρηση</u>

Η χρονική μεταβολή της μαγνητικής ροής Ψ_m μπορεί να γίνεται με πολλούς τρόπους. Ένας από αυτούς είναι να έχουμε χρονική μεταβολή της μαγνητικής επαγωγής $\vec{B} = \vec{B}(t)$

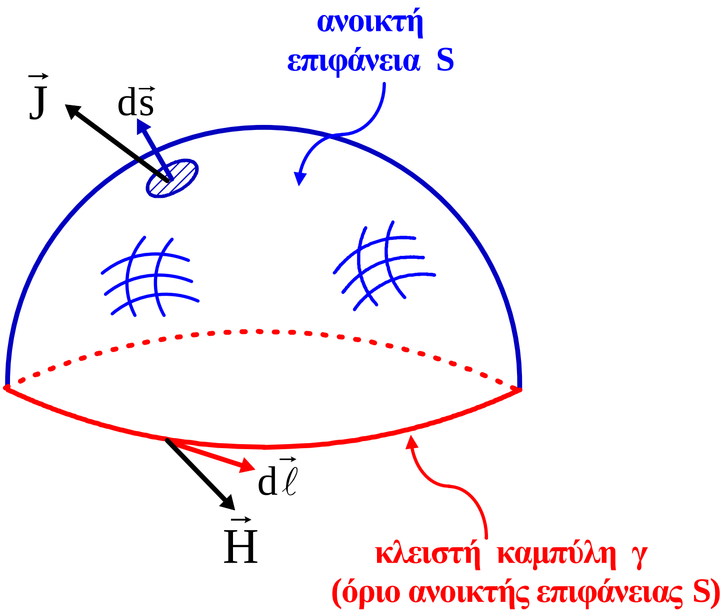
Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να πούμε:

«Ένα χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο $\vec{H}(t)$ (άρα και $\vec{B}(t)$) δημιουργεί ένα επίσης χρονικά μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}(t)$»

β) Νόμος Ampere – Maxwell

Αρχικά αναφέρουμε τον Νόμο Ampere, ο οποίος διατυπώθηκε σχεδόν την ίδια χρονική περίοδο με τον Νόμο Biot – Savart, και αναφέρεται στη δημιουργία μαγνητικού πεδίου από το συνεχές (χρονικά σταθερό) ηλεκτρικό ρεύμα.

Έχουμε και πάλι μια ανοικτή επιφάνεια **S** η οποία έχει όριο την κλειστή καμπύλη **γ.** Με $d\vec{s}$ συμβολίζουμε το κάθετο διάνυσμα σε κάθε σημείο της **S,** και με $d\vec{\ell}$ το εφαπτομενικό διάνυσμα σε κάθε σημείο της **γ.**



Σχ. 2

Έστω ότι δια της ανοικτής επιφάνειας **S** διέρχεται χρονικά σταθερό ηλεκτρικό ρεύμα με πυκνότητα ρεύματος $\vec{J}$. Δηλαδή σε κάθε σημείο επί της **S** θα υπάρχει ένα διάνυσμα $\vec{J}$ το οποίο θα σχηματίζει μια γωνία με το κάθετο διάνυσμα $d\vec{s}$.

Το συνολικό ηλεκτρικό ρεύμα i δια της επιφανείας **S** θα είναι:

$$i = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

Το χρονικά σταθερό αυτό ρεύμα δημιουργεί ένα χρονικά σταθερό (στατικό) μαγνητικό πεδίο $\vec{H}$ στο χώρο!

Η ακριβής μαθηματική σχέση που περιγράφει το φαινόμενο είναι: (Νόμος Ampere)

$$\underbrace{\oint_{\gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell}}_{\substack{\text{επικαμπύλιο} \\ \text{ολοκλήρωμα του } \vec{H} \\ \text{στο όριο της} \\ \text{ανοικτής επιφάνειας S} \\ \text{(κλειστή καμπύλη γ)}}} = \underbrace{\iint_{S} \vec{J} \cdot d\vec{s}}_{\substack{\text{ηλεκτρικό ρεύμα i} \\ \text{δια της ανοικτής} \\ \text{επιφάνειας S}}} = i$$

Η μαθηματική διατύπωση του Νόμου είναι, όπως και πριν, σε **ολοκληρωτική μορφή**

Ένα σημαντικό ερώτημα που μπορεί να τεθεί εδώ είναι:

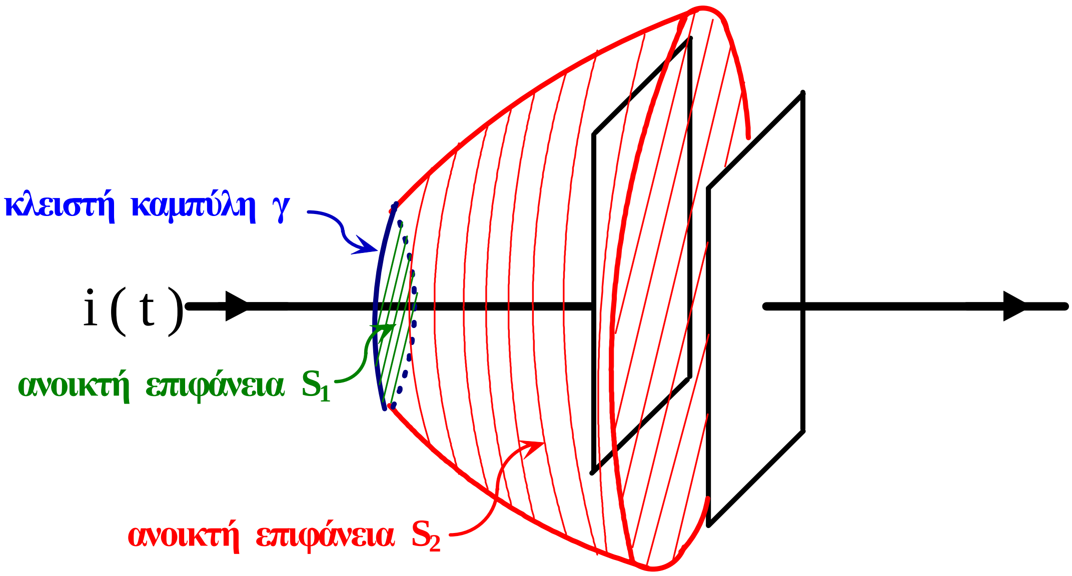
- Τι συμβαίνει όταν το ρεύμα i δεν είναι χρονικά σταθερό;

Απάντηση: Η ανωτέρω σχέση που περιγράφει το Νόμο συνεχίζει να ισχύει αλλά με την προσθήκη ενός επί πλέον όρου τον οποίο εισήγαγε ο Maxwell.

Παρακάτω θα εξεταστεί με αρκετή λεπτομέρεια το θέμα αυτό κάνοντας χρήση ενός απλού αλλά πολύ σημαντικού παραδείγματος

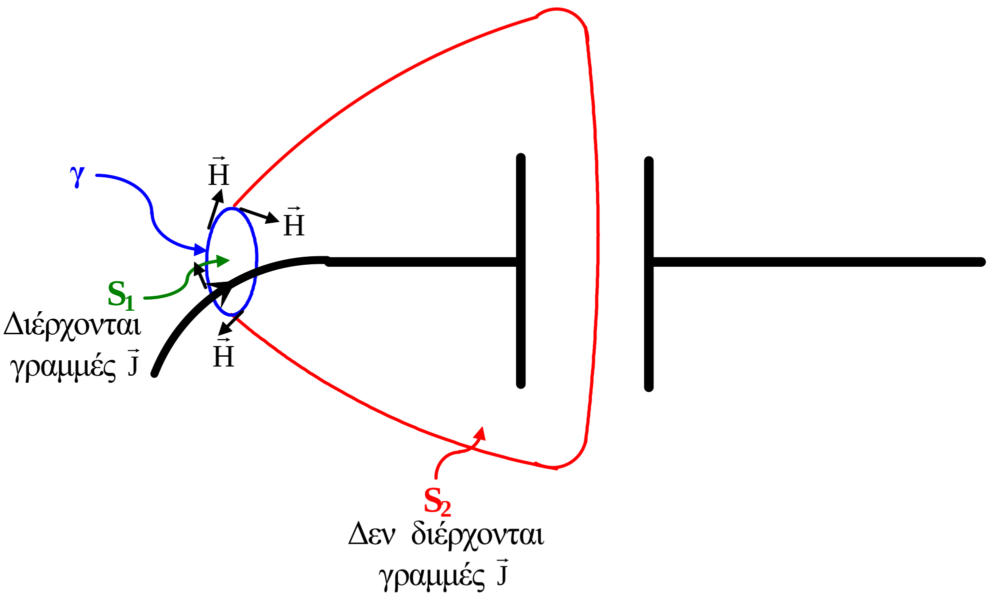
<u>Περίπτωση φόρτισης (ή εκφόρτισης) ενός πυκνωτή</u>

Ας δούμε πως εφαρμόζεται ο Νόμος Ampere περίπτωση που έχουμε έναν πυκνωτή στη διαδικασία φόρτισης (η εκφόρτισης) του.



Σχ. 3

Στο ανωτέρω σχ. 3 φαίνεται ένας πυκνωτής ο οποίος φορτίζεται. Προφανώς το ρεύμα i (t) **δεν** μπορεί να είναι χρονικά σταθερό. Θα εφαρμόσουμε τον Νόμο Ampere χρησιμοποιώντας δύο διαφορετικές ανοικτές επιφάνειες $\mathbf{S_1}$ (πράσινη διαγράμμιση) και $\mathbf{S_2}$ (κόκκινη διαγράμμιση) πού όμως έχουν κοινό όριο την κλειστή καμπύλη **γ**



Σχ. 4

Παρατηρούμε αμέσως τα ακόλουθα:

- Δια της επιφανείας **S_1** προφανώς διέρχονται δυναμικές γραμμές $\vec{J}$ (δηλαδή απλά διέρχεται ηλεκτρικό ρεύμα)

- Δια της επιφανείας **S_2** , η οποία όπως φαίνεται αναπτύσσεται και στον χώρο μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή, **<u>δεν</u>** διέρχονται δυναμικές γραμμές $\vec{J}$ (δηλαδή απλά **<u>δεν</u>** διέρχεται ηλεκτρικό ρεύμα)

Στα σημεία της κλειστής καμπύλης **γ** (κοινό όριο των **S_1** και **S_2)** θα παίρνει τιμές το, παραγόμενο από το ρεύμα i, μαγνητικό πεδίο $\vec{H}$ και το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_\gamma \vec{H}\cdot d\vec{\ell}$ θα είναι, προφανώς, διάφορο του μηδενός.

Συμπεραίνουμε λοιπόν τα ακόλουθα:

- Η εφαρμογή του Ν. Ampere στην ανοικτή επιφάνεια **S_1** με όριο την κλειστή καμπύλη **γ** δεν παρουσιάζει κανένα πρόβλημα.

$$\oint_\gamma \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = \iint_{S1} \vec{J}\cdot d\vec{s} = i$$

- Η εφαρμογή, όμως, του Ν. Ampere στην ανοικτή επιφάνεια **S_2** με όριο **την ίδια** κλειστή καμπύλη **γ** παρουσιάζει σημαντικότατο πρόβλημα διότι.

$$\oint_\gamma \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = \iint_{S2} \vec{J}\cdot d\vec{s} = 0$$

Δηλαδή υπάρχει εδώ η αντίφαση:

αριστερός όρος : $\oint_\gamma \vec{H}\cdot d\vec{\ell} \neq 0$ οπωσδήποτε

δεξιός όρος $\iint_{S2} \vec{J}\cdot d\vec{s} = 0$ διότι δεν διέρχονται γραμμές του $\vec{J}$

Τίθεται επομένως θέμα κατάρρευσης του Νόμου του Ampere!!

Εδώ ακριβώς βρίσκεται η συμβολή του Maxwell ο οποίος προσέθεσε έναν επί πλέον όρο στην αρχική εξίσωση του Νόμου του Ampere.

Στα επόμενα αναπτύσσεται το θέμα αυτό.

Ο Νόμος του Ampere συμπληρωμένος από τον Maxwell γράφεται ως εξής:

$$\underbrace{\oint_{\gamma} \vec{H}\cdot d\vec{\ell}}_{\substack{\text{επικαμπύλιο} \\ \text{ολοκλήρωμα του } \vec{H} \\ \text{στο όριο της} \\ \text{ανοικτής επιφάνειας S} \\ \text{(κλειστή καμπύλη γ)}}} = \underbrace{\iint_{S} \vec{J}\cdot d\vec{s}}_{\substack{\text{ηλεκτρικό ρεύμα i} \\ \text{δια της ανοικτής} \\ \text{επιφάνειας S} \\ \text{(όρος Ampere)}}} + \underbrace{\frac{d}{dt}\iint_{S} \vec{D}\cdot d\vec{s}}_{\substack{\text{ρεύμα μετατοπίσεως} \\ \text{(όρος Maxwell)}}}$$

Βλέπουμε ότι ο Maxwell προσέθεσε τον όρο $\frac{d}{dt}\iint_{S} \vec{D}\cdot d\vec{s}$ τον οποίο ονόμασε «ρεύμα μετατοπίσεως» (displacement current)

Ο όρος αυτός έχει προφανώς διαστάσεις ηλεκτρικού ρεύματος (Amps) και εμφανίζεται μόνον στις περιπτώσεις που έχουμε **χρονικά μεταβαλλόμενα ηλεκτρικά πεδία** ($\vec{E}$ και $\vec{D}$) όπως ακριβώς συμβαίνει στο πεδίο, μεταξύ των πλακών, ενός φορτιζόμενου ή εκφορτιζόμενου πυκνωτή. Σύμφωνα λοιπόν με τον Maxwell **το ρεύμα μετατοπίσεως δημιουργεί μαγνητικό πεδίο ακριβώς όπως και το ρεύμα αγωγιμότητας**.

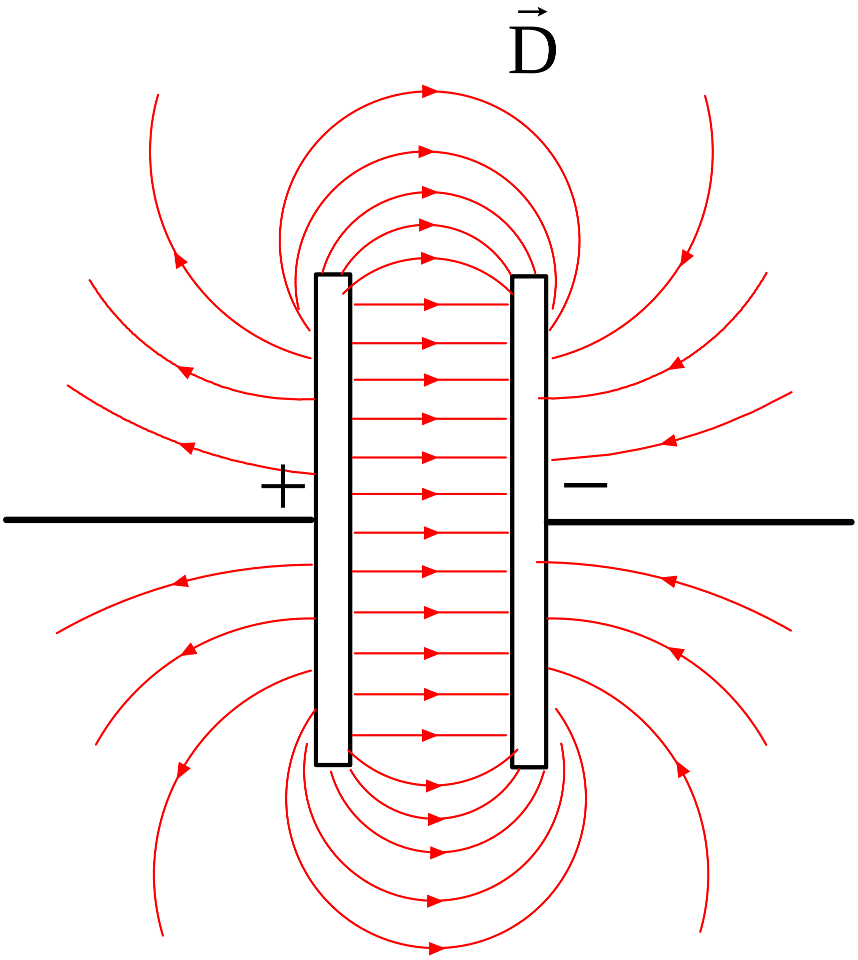
Σήμερα ο όρος «ρεύμα μετατοπίσεως» θεωρείται αδόκιμος και δεν χρησιμοποιείται πλέον, διότι το ρεύμα αυτό δεν σχετίζεται με την μεταφορά ηλεκτρικών φορτίων (όπως συμβαίνει με το ρεύμα αγωγιμότητας).

Η ορθότερη άποψη, που επικρατεί σήμερα, για το θέμα αυτό είναι:

«Ένα χρονικά μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}(t)$ **(άρα και** $\vec{D}(t)$ **) δημιουργεί ένα επίσης χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο** $\vec{H}(t)$ »

(**<u>Προσοχή εδώ!</u>** Αν τα $\vec{E}$ και $\vec{D}$ είναι **χρονικά σταθερά** και μεταβάλλεται με κάποιο τρόπο η ηλεκτρική ροή $\Psi_e = \iint_{S} \vec{D}\cdot d\vec{s}$ δεν δημιουργείται κανένα μαγνητικό πεδίο. Για να παραχθεί μαγνητικό πεδίο απαιτείται οπωσδήποτε χρονική μεταβολή του ηλεκτρικού πεδίου)

Στο σχ.5 φαίνεται ο πυκνωτής, κατά τη διαδικασία φόρτισης, και έχουν σημειωθεί οι δυναμικές γραμμές του πεδίου $\vec{D}$ μεταξύ των οπλισμών του αλλά και έξω από αυτούς (όπως πραγματικά συμβαίνει). Σημειώνεται ότι επειδή ο πυκνωτής **φορτίζεται** το μέτρο του $\vec{D}$ **αυξάνει** σε κάθε σημείο.

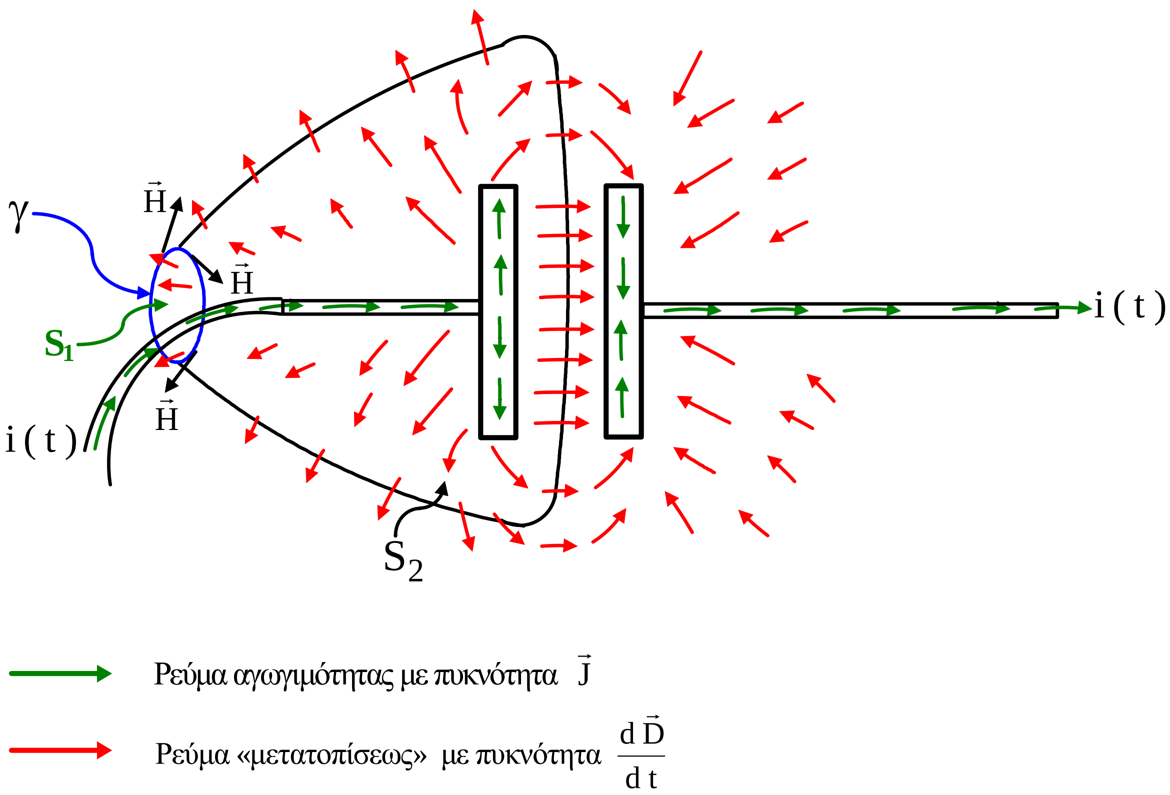


Σχ. 5

Στο σχ. 6 φαίνεται πάλι ο πυκνωτής (στη διαδικασία φόρτισης πάντα) οι δύο ανοικτές επιφάνειες $\mathbf{S_1}$ και $\mathbf{S_2}$, με κοινό όριο την κλειστή καμπύλη **γ** και έχουν σημειωθεί με βέλη το ρεύμα αγωγιμότητας και το «ρεύμα μετατοπίσεως».

Το ρεύμα αγωγιμότητας (πράσινα βέλη) ρέει προφανώς μέσα στους αγωγούς που τροφοδοτούν τον πυκνωτή και βέβαια στους μεταλλικούς οπλισμούς του.

Το «ρεύμα μετατοπίσεως» (κόκκινα βέλη) είναι ανάλογο της παραγώγου $\frac{d\vec{D}}{dt}$ και επειδή, όπως είπαμε, το $\vec{D}$ **αυξάνει** η φορά του είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα.



Σχ. 6

Ξαναγράφουμε εδώ τον Ν. Ampere – Maxwell

$$\oint_\gamma \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = \iint_S \vec{J}\cdot d\vec{s} + \frac{d}{dt}\iint_S \vec{D}\cdot d\vec{s} \quad \text{ή} \quad \oint_\gamma \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = \iint_S \vec{J}\cdot d\vec{s} + \iint_S \frac{d\vec{D}}{dt}\cdot d\vec{s}$$

Παρατηρούμε ότι για τον υπολογισμό του $\oint_\gamma \vec{H}\cdot d\vec{\ell}$ στην κλειστή καμπύλη γ:

- Αν χρησιμοποιηθεί η ανοικτή επιφάνεια $\mathbf{S_2}$ συνεισφέρει μόνον ο όρος $\iint_{S2} \frac{d\vec{D}}{dt}\cdot d\vec{s}$

- Αν χρησιμοποιηθεί η ανοικτή επιφάνεια $\mathbf{S_1}$ συνεισφέρουν και οι δύο όροι

$\iint_{S1} J\cdot d\vec{s}$ και $\iint_{S1} \frac{d\vec{D}}{dt}\cdot d\vec{s}$, αλλά για βραδεία χρονική μεταβολή του $\vec{D}(t)$,

πρακτικά συνεισφέρει μόνον ο πρώτος όρος

Ο όρος $\frac{d\vec{D}}{dt}$ γίνεται σημαντικός μόνον σε περιπτώσεις ταχύτατης μεταβολής του $\vec{D}(t)$

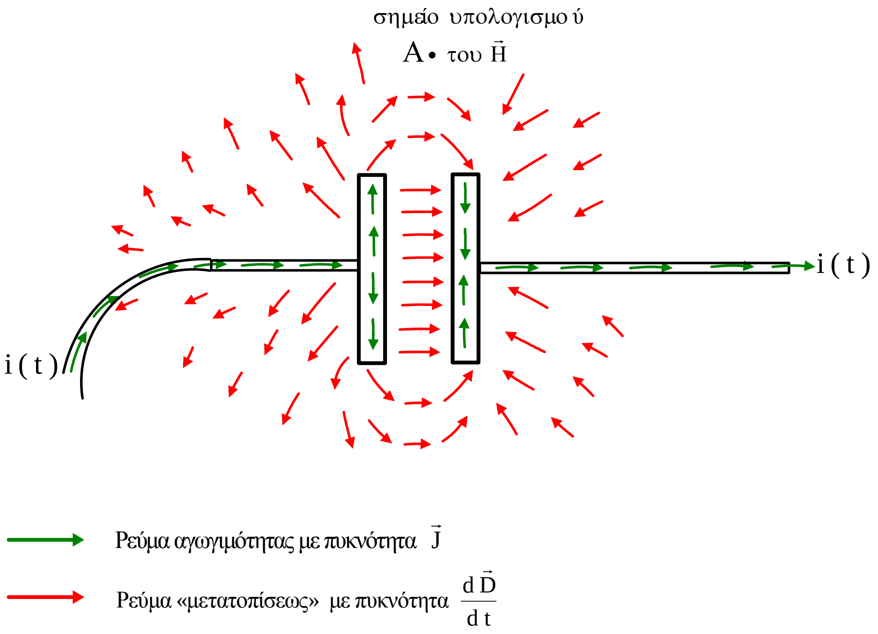
- Τι σημαίνει αυτό;

Έστω f η συχνότητα με την οποία μεταβάλλεται το $\vec{D}(t)$. Αυτή αντιστοιχεί σε ένα μήκος κύματος $\lambda = c / f$ (c = ταχ. του φωτός). Αν το μήκος λ είναι συγκρίσιμο με τις φυσικές διαστάσεις του πυκνωτή τότε, ο όρος $\frac{d\vec{D}}{dt}$ γίνεται σημαντικός.

Αν το λ είναι πολύ μεγαλύτερο των φυσικών διαστάσεων του πυκνωτή ο όρος $\frac{d\vec{D}}{dt}$ μπορεί να αγνοηθεί.

Ας προσέξουμε εδώ ότι μιλάμε για τον όρο $\frac{d\vec{D}}{dt}$ και όχι για το ολοκλήρωμα $\iint_S \frac{d\vec{D}}{dt}\cdot d\vec{s} = \frac{d}{dt}\iint_S \vec{D}\cdot d\vec{s}$. Όπως είδαμε προηγουμένως ο όρος $\frac{d}{dt}\iint_S \vec{D}\cdot d\vec{s}$ είναι ο μόνος που συνεισφέρει αν ληφθεί η ανοικτή επιφάνεια S_2 για τον υπολογισμό του $\oint_\gamma \vec{H}\cdot d\vec{\ell}$.

Ένα ενδιαφέρον θέμα είναι ο υπολογισμός του μαγνητικού πεδίου από τα ρεύματα αγωγιμότητας και μετατοπίσεως, κάνοντας χρήση του Νόμου Biot – Savart. Ας δούμε το παρακάτω σχ. 7.

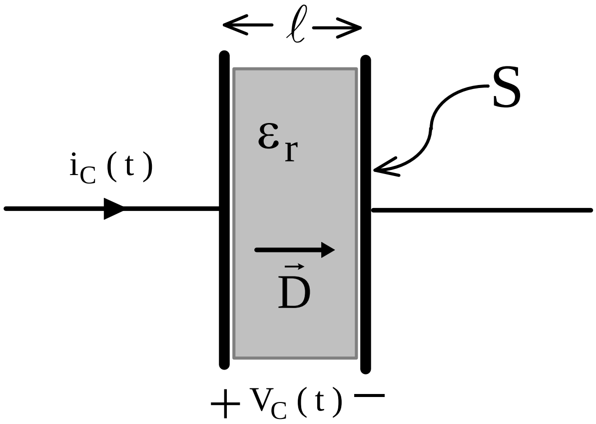


Σχ. 7

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το μαγνητικό πεδίο $\overline{H}$ στο σημείο Α , με χρήση του Νόμου Biot – Savart. Λογικά θα πρέπει να λάβουμε υπ’ όψη και τις δύο μορφές ρευμάτων (αγωγιμότητας και μετατοπίσεως). Από την χωρική κατανομή του ρεύματος μετατοπίσεως προκύπτει ότι για αργές χρονικές μεταβολές η συμβολή του ρεύματος αυτού στον υπολογισμό του $\overline{H}$ είναι πρακτικά αμελητέα. Ο υπολογισμός του $\overline{H}$ μπορεί να γίνει, χωρίς σημαντικό σφάλμα, μόνον από το ρεύμα αγωγιμότητας. Τονίζεται εδώ ότι αναφερόμαστε στον υπολογισμό του $\overline{H}$ **σε ένα σημείο του χώρου** και όχι στον υπολογισμό επικαμπυλίου ολοκληρώματος του $\overline{H}$ σε κάποια κλειστή καμπύλη.

Σχέση τάσεως – ρεύματος πυκνωτή

Παρακάτω θα δούμε πως προκύπτει από τον όρο Maxwell (ρεύμα μετατοπίσεως) η γνωστή από την θεωρία κυκλωμάτων σχέση τάσεως - ρεύματος σε πυκνωτή.



Σχ. 8

Το ρεύμα που διαρρέει τον πυκνωτή στον χώρο μεταξύ των πλακών («ρεύμα μετατοπίσεως») θα είναι ως γνωστόν:

$$i_C\,(t) = i_{μετατοπίσεως}(t) = \frac{d}{dt}\iint_S \vec{D}\cdot d\vec{s}$$

Στο σημείο αυτό δεχόμαστε την παραδοχή, που ισχύει στη θεωρία κυκλωμάτων, ότι:

- Το πεδίο $\vec{D}$ αναπτύσσεται **μόνον** στον χώρο μεταξύ των δυο πλακών του πυκνωτή και είναι ομογενές.

Επομένως το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_S \vec{D}\cdot d\vec{s}$ θα γραφεί απλά ως:

$$\iint_S \vec{D}\cdot d\vec{s} \quad \approx \quad D\,S = \varepsilon_0\ \varepsilon_r\ E\,S$$

όπου S το εμβαδόν μιας πλάκας του πυκνωτή

Επειδή θεωρήσαμε ομογενές πεδίο μπορούμε να γράψουμε για το μέτρο του πεδίου Ε:

$$E(t) = \frac{V_c(t)}{\ell}$$

όπου $V_C(t)$ η τάση μεταξύ των πλακών του πυκνωτή και ℓ η απόσταση μεταξύ τους

Άρα η σχέση για το «ρεύμα μετατοπίσεως» γράφεται:

$$i_C(t) = i_{\mu\varepsilon\tau\alpha\tau o\pi\acute{\iota}\sigma\varepsilon\omega\varsigma}(t) = \frac{d}{dt}\iint_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = \frac{d}{dt}\left(\varepsilon_0\,\varepsilon_r\,\frac{V_C(t)}{\ell}\,S\right) = \varepsilon_0\,\varepsilon_r\,\frac{S}{\ell}\,\frac{dV_C(t)}{dt}$$

αλλά η έκφραση $\varepsilon_0\,\varepsilon_r\,\frac{S}{\ell} = C$ μας δίνει ακριβώς την χωρητικότητα C του πυκνωτή και έτσι μπορούμε να γράψουμε τελικά:

$$i_C(t) = C\,\frac{dV_C(t)}{dt}$$

τη γνωστή σχέση από την θεωρία κυκλωμάτων.

γ) Σύνοψη των δύο Νόμων

Είδαμε στα προηγούμενα ότι:

«Ένα χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο $\vec{H}(t)$ (άρα και $\vec{B}(t)$) δημιουργεί ένα επίσης χρονικά μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}(t)$» (N.Faraday)

και επίσης:

«Ένα χρονικά μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}(t)$ (άρα και $\vec{D}(t)$) δημιουργεί ένα επίσης χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο $\vec{H}(t)$» (N. Ampere – Maxwell)

-Η ταυτόχρονη ισχύς αυτών των δύο προτάσεων οδηγεί στην ύπαρξη των Ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων!