ΣΧΟΛΗ. Ν. ΔΟΚΙΜΩΝ

ΜΑΘΗΜΑ: ΘΕΩΡΙΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ ΙΙ – ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ Σ.Α.Ε.

ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ Δ.Ε. ΜΕ ΚΡΟΥΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΓΕΡΣΕΙΣ

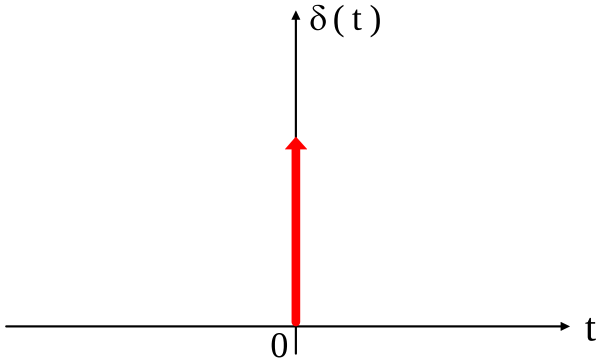
Δρ. Α. Μαγουλάς

Οκτώβριος 2014

<u>Η συνάρτηση δ (t) και η παράγωγός της</u>

Ορίζεται ως εξής: $$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{για} \quad t \neq 0 \\ \text{ανωμαλο σημειο} & \text{για} \quad t = 0 \end{cases}$$

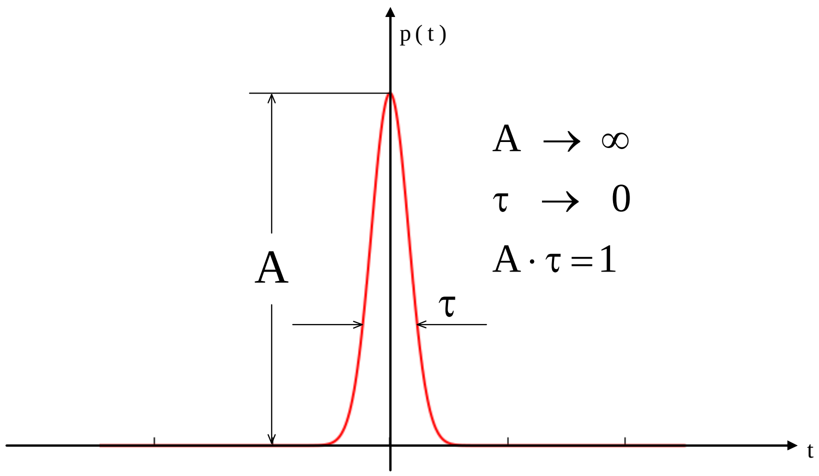
συμβολισμός της δ (t)



βασική ιδιότητα $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1$ ή $\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(t)\,dt = 1$ $(\varepsilon > 0)$

Το ολοκλήρωμα αυτό λέγεται και **«ισχύς»** της κρουστικής συναρτήσεως

Πρακτική προσέγγιση της δ (t) :

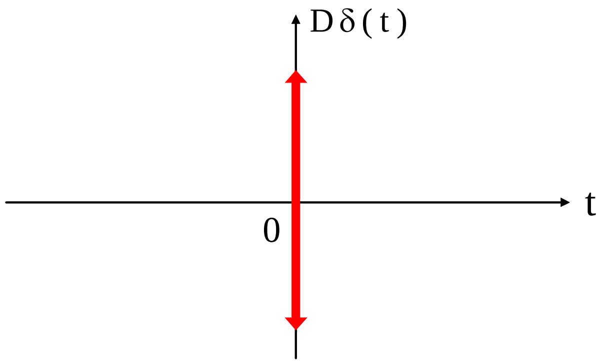


Έχουμε ένα στενό παλμό στον οποίο αυξάνει το ύψος A και μειώνεται η διάρκεια τ. Ο παλμός αυτός οριακά τείνει στην δ (t) η οποία έχει:

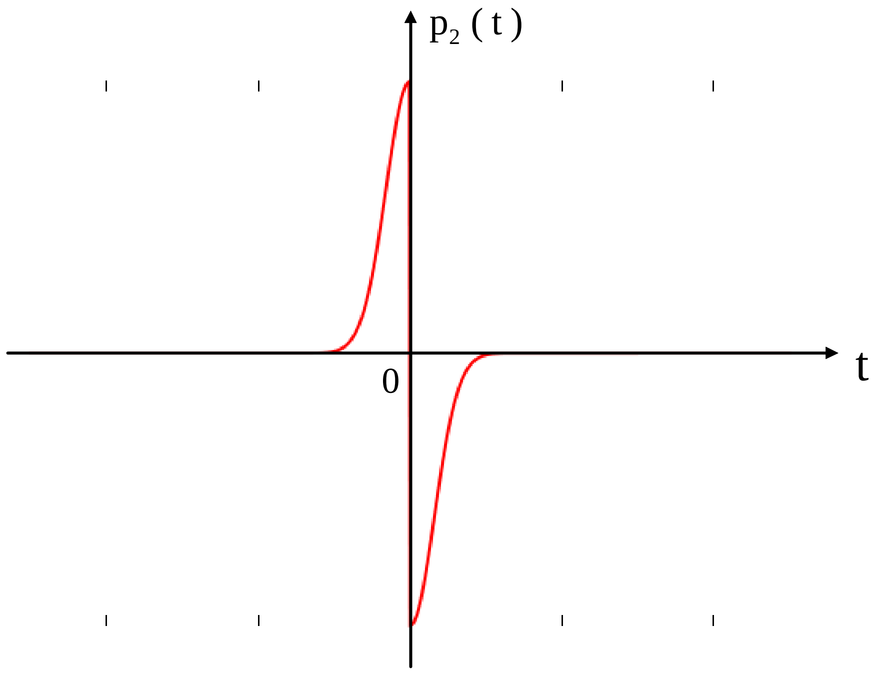
- Μηδενική διάρκεια τ
- Άπειρο ύψος A
- Ισχύει πάντα Aτ = 1

Η παράγωγος της δ (t) λέγεται κρουστικό ζεύγος

Συμβολισμός της D δ (t)



Πρακτική προσέγγιση της D δ (t)

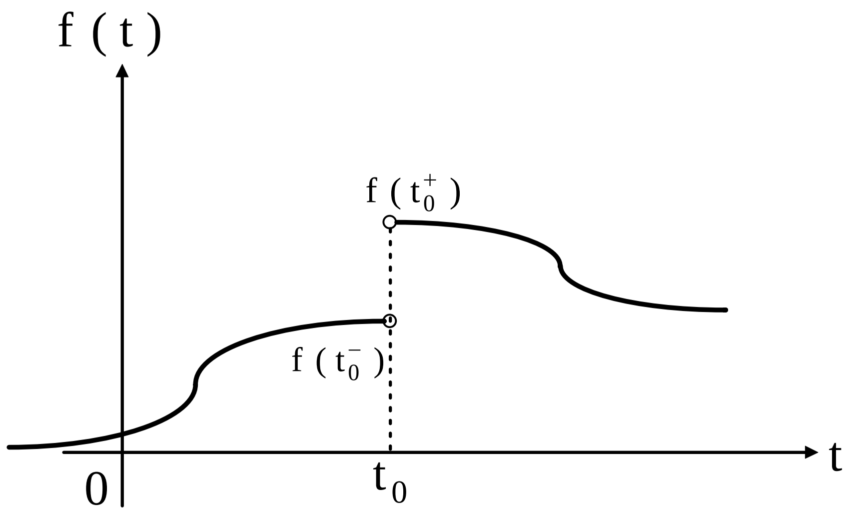


Είναι δύο διαδοχικοί στενοί παλμοί

- ένας προς τα επάνω
- ένας προς τα κάτω.

Παράγωγος ασυνεχούς συναρτήσεως

Ας θεωρήσουμε μια πραγματική συνάρτηση $f(t)$ η οποία όμως είναι ασυνεχής σε ένα σημείο t_0 δηλ. ισχύει $f(t_0^+) \neq f(t_0^-)$ και έστω ότι η διαφορά αυτή είναι πεπερασμένη



η παράγωγος της συναρτήσεως αυτής στο σημείο ασυνέχειας t_0 ορίζεται ως εξής:

$$\left.\frac{df(t)}{dt}\right|_{t=t_0} = \left(f(t_0^+) - f(t_0^-)\right)\delta(t - t_0)$$

Δηλαδή η παράγωγος στο σημείο ασυνέχειας, περιέχει μια κρουστική συνάρτηση με «ισχύ» ίση με το άλμα της ασυνέχειας $\left(f(t_0^+) - f(t_0^-)\right) = \alpha$**, όπου α ένας πραγματικός αριθμός**
Η πρόταση αυτή θα μας χρησιμεύσει πολύ στα επόμενα!

Επίλυση γραμμικής Δ. Ε. 1ης Τάξεως με κρουστική διέγερση

Έχουμε το πρόβλημα:

Προσοχή!
Εδώ θα μπορούσε να υπάρχει και ο όρος $b_1 D\delta(t)$

$$\left\{ \begin{array}{c} a_1 D y(t) + a_0 y(t) = b_0 \delta(t) \\ y(0^-) = 0 \end{array} \right\}$$

για $t > 0$ έχουμε:

$$\left\{ \begin{array}{c} a_1 D y(t) + a_0 y(t) = 0 \\ y(0^+) = \ldots\text{αγνωστο} \end{array} \right\}$$

Διότι η κρουστική συνάρτηση $\delta(t) = 0 \quad t \neq 0$

Επίσης αποκλείεται να έχουμε $y(0^+) = 0$ γιατί τότε ΔΕΝ υπάρχει απόκριση $y(t)$, δηλαδή $y(t) = 0$ για κάθε t. Άρα οπωσδήποτε $y(0^+) \neq y(0^-)$.

Έχουμε τον ακόλουθο πίνακα:

για $\boxed{\mathbf{t = 0}}$ **ΑΚΡΙΒΩΣ**

Δ.Ε.: $\mathbf{a_1 D y(t) + a_0 y(t) = b_0 \delta(t)}$

α' μέλος (τι υπάρχει ;)	**β' μέλος (** τι υπάρχει ;)
$D y(t)$ $y(t)$	$\delta(t)$

Οι συντελεστές a_1, a_0, b_0 δεν έχουν ιδιαίτερη σημασία εδώ.

Υπόθεση 1
Έστω $y(t) = k\delta(t) \quad (k \in R)$
τότε $D y(t) = k D\delta(t)$.
αλλά η συνάρτηση $D\delta(t)$ ΔΕΝ υπάρχει στο β' μέλος
Επομένως η υπόθεση $y(t) = k\delta(t)$ <u>δεν ευσταθεί</u>

Υπόθεση 2
Έστω $D y(t) = k\delta(t) \quad (k \in R)$
η υπόθεση αυτή <u>ευσταθεί</u> διότι δεν καταλήγει σε κάτι άτοπο.

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε στην Δ.Ε.

$$a_1 D y(t) + a_0 y(t) = b_0 \delta(t)$$

μόνον τους όρους που περιέχουν κρουστική συνάρτηση $\delta(t)$. Δηλαδή:

$a_1 D y(t) = a_1 k \delta(t)$

$a_0 y(t)$ δεν περιέχει $\delta(t)$

και στο β' μέλος υπάρχει ο όρος $b_0 \delta(t)$

άρα για t = 0 ακριβώς: $a_1 k \delta(t) = b_0 \delta(t) \Rightarrow k = \dfrac{b_0}{a_1}$

Συνεπώς καταλήγουμε ότι: $D y(t) = \dfrac{b_0}{a_1} \delta(t)$

Δηλαδή: η παράγωγος της $y(t)$ (για $t = 0$) είναι μια κρουστική συνάρτηση. Αυτό σημαίνει ότι η $y(t)$ θα είναι **ασυνεχής** (για $t = 0$) και θα ισχύει:

$$\left.\frac{d\,y(t)}{d\,t}\right|_{t=0} = (y(0^+) - y(0^-))\,\delta(t) = \frac{b_0}{a_1}\delta(t)$$

άρα: $y(0^+) - y(0^-) = \dfrac{b_0}{a_1}$

(σύμφωνα με την πρόταση που έχει διατυπωθεί σχετικά με την παράγωγο ασυνεχούς συναρτήσεως)

και επειδή: $y(0^-) = 0$ προκύπτει η ζητούμενη Αρχική Συνθήκη:

$$\boxed{y(0^+) = \frac{b_0}{a_1}}$$

Συνοψίζουμε λοιπόν για $t > 0$

$$\left\{ \begin{array}{c} a_1 D y(t) + a_0 y(t) = 0 \\ y(0^+) = \dfrac{b_0}{a_1} \end{array} \right\}$$

Η **ομογενής** αυτή Δ.Ε. επιλύεται εύκολα:

χαρακτ. εξίσωση: $a_1 s + a_0 = 0 \Rightarrow s_1 = -\dfrac{a_0}{a_1}$ (ρίζα)

άρα $y(t) = C e^{-\frac{a_0}{a_1}t}$

και από Α.Σ. $y(0^+) = C = \dfrac{b_0}{a_1}$

άρα τελικά: $y_{\text{κρουστικη}}(t) = \dfrac{b_0}{a_1} e^{-\frac{a_0}{a_1}t}$

Επίλυση γραμμικής Δ. Ε. $2^{ας}$ Τάξεως με κρουστική διέγερση

Έχουμε το πρόβλημα:

Προσοχή!
Εδώ θα μπορούσαν να υπάρχουν
και οι όροι $b_1 D\delta(t)$ και $b_2 D^2 \delta(t)$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2 D^2 y(t) + a_1 D y(t) + a_0 y(t) = b_0 \delta(t) \\ \quad y(0^-) = 0, \quad D y(0^-) = 0 \end{array} \right\}$$

για $t > 0$ έχουμε:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2 D^2 y(t) + a_1 D y(t) + a_0 y(t) = 0 \\ \quad y(0^+) = ...\alpha\gamma\nu\omega\sigma\tau o, \quad D y(0^+) = ...\alpha\gamma\nu\omega\sigma\tau o \end{array} \right\}$$

Αποκλείεται να έχουν τα $y(0^+)$, $D y(0^+)$, και τα δύο , την τιμή 0. Είναι όμως δυνατό το ένα από τα δύο να είναι ίσο με το 0 (ποιο;)

Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία όπως προηγουμένως (Δ.Ε. 1ης Τάξεως)
Έχουμε τον ακόλουθο πίνακα:

για $\boxed{t = 0}$ **ΑΚΡΙΒΩΣ**

Δ.Ε.: $\mathbf{a_2 D^2 y(t) + a_1 D y(t) + a_0 y(t) = b_0 \delta(t)}$

α' μέλος (τι υπάρχει ;)	**β' μέλος** (τι υπάρχει ;)
$D^2 y(t)$ $D y(t)$ $y(t)$	$\delta(t)$

Οι συντελεστές a_2 , a_1 , a_0 , b_0 δεν έχουν ιδιαίτερη σημασία εδώ.

Υπόθεση 1
Έστω $y(t) = k\delta(t)$ $(k \in R)$
τότε $D y(t) = k D\delta(t)$, $D^2 y(t) = k D^2 \delta(t)$
αλλά οι συναρτήσεις $D\delta(t)$, $D^2\delta(t)$, ΔΕΝ υπάρχουν στο β' μέλος
Επομένως η υπόθεση $y(t) = k\delta(t)$ <u>δεν ευσταθεί</u>

Υπόθεση 2
Έστω $D y(t) = k\delta(t)$ $(k \in R)$
τότε $D^2 y(t) = k D\delta(t)$
αλλά οι συνάρτηση $D\delta(t)$ ΔΕΝ υπάρχει στο β' μέλος
Επομένως η υπόθεση $D y(t) = k\delta(t)$ <u>δεν ευσταθεί</u>

Υπόθεση 3
Έστω $D^2 y(t) = k\,\delta(t) \quad (k \in R)$
η υπόθεση αυτή <u>ευσταθεί</u> διότι δεν καταλήγει σε κάτι άτοπο.

΄Αρα συνοψίζουμε:

$y(t) \rightarrow$ **δεν περιέχει** $\delta(t)$

$D\,y(t) \rightarrow$ **δεν περιέχει** $\delta(t)$

$D^2 y(t) \rightarrow$ **περιέχει** $\delta(t)$

Η έκφραση $D\,y(t) \rightarrow$ **δεν περιέχει** $\delta(t)$ μας εξασφαλίζει ότι:

- Εφ' όσον η παράγωγος της $y(t)$, για $t = 0$, **δεν περιέχει** $\delta(t)$, αυτό σημαίνει ότι η $y(t)$ είναι **συνεχής** συνάρτηση για $t = 0$.
Δηλαδή ισχύει:

$$\boxed{y(0^+) = y(0^-)}$$

(1η Αρχική Συνθήκη)

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε στην Δ.Ε.

$$a_2 D^2 y(t) + a_1 D\,y(t) + a_0 y(t) = b_0\,\delta(t)$$

μόνον τους όρους που περιέχουν κρουστική συνάρτηση $\delta(t)$. Δηλαδή:

$a_2 D^2 y(t) = a_2 k\,\delta(t)$

$a_1 D\,y(t)$ δεν περιέχει $\delta(t)$

$a_0 y(t)$ δεν περιέχει $\delta(t)$

και στο β' μέλος υπάρχει ο όρος $b_0\,\delta(t)$

άρα για $t = 0$ ακριβώς: $\quad a_2 D^2 y(t) = b_0\,\delta(t)$

ή $\quad a_2 k\,\delta(t) = b_0\,\delta(t) \Rightarrow k = \dfrac{b_0}{a_2}$

Συνεπώς καταλήγουμε ότι: $\quad D^2 y(t) = \dfrac{b_0}{a_2}\,\delta(t)$

Η συνάρτηση $D^2 y(t)$, η οποία προφανώς είναι παράγωγός της $D\,y(t)$, περιέχει κρουστικό όρο(για $t = 0$). Επομένως η $D\,y(t)$ (για $t = 0$) θα είναι **ασυνεχής** και θα ισχύει:

$$\left.\frac{d^2 y(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \left(D\,y(0^+) - D\,y(0^-)\right)\delta(t) = \frac{b_0}{a_2}\,\delta(t)$$

άρα: $\quad D\,y(0^+) - D\,y(0^-) = \dfrac{b_0}{a_2}$

και επειδή: $Dy(0^-)=0$ προκύπτει και η 2^{η} ζητούμενη Αρχική Συνθήκη:

$$\boxed{Dy(0^+) = \frac{b_0}{a_2}}$$

Συνοψίζουμε λοιπόν για $t > 0$

$$\left\{ \begin{array}{c} a_2 D^2 y(t) + a_1 D y(t) + a_0 y(t) = 0 \\ y(0^+) = 0, \quad D y(0^+) = \dfrac{b_0}{a_2} \end{array} \right\}$$

και προχωράμε κανονικά στην επίλυση της Δ.Ε. ανάλογα με τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης.

Ακολουθούν παραδείγματα:

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1)</u> Να λυθεί η Δ.Ε.

$$(5D+3)\,y(t) = 2\,\delta(t)$$
$$y(0^-)=0$$

Λύση: για $t>0$ έχουμε:

$$(5D+3)\,y(t) = 0$$
$$y(0^+)=?$$

Προφανώς (για $t=0$)

$$y(t) \rightarrow \text{δεν περιέχει } \delta(t)$$

$$Dy(t)=k\,\delta(t)$$

άρα:

$$5Dy(t)+3\cancel{y}(t)=2\delta(t)$$

δεν περιέχει
δ (t)

ή

$$5k\,\delta(t)=2\,\delta(t) \Rightarrow k=\frac{2}{5}$$

άρα:

$$\left.\frac{d\,y(t)}{d\,t}\right|_{t=0} = (y(0^+)-y(0^-))\,\delta(t)=\frac{2}{5}\,\delta(t)$$

συνεπώς

$$y(0^+)-y(0^-)=\frac{2}{5}$$

και επειδή $y(0^-)=0$ προκύπτει τελικά:

$$y(0^+)=\frac{2}{5}$$

Συνοψίζουμε για $t>0$

Δ.Ε. $\quad (5D+3)\,y(t) = 0$

Α.Σ. $\quad y(0^+)=\dfrac{2}{5}$

χαρακτ. εξίσωση $\quad 5s+3=0 \Rightarrow s_1=-\dfrac{3}{5}$

άρα:

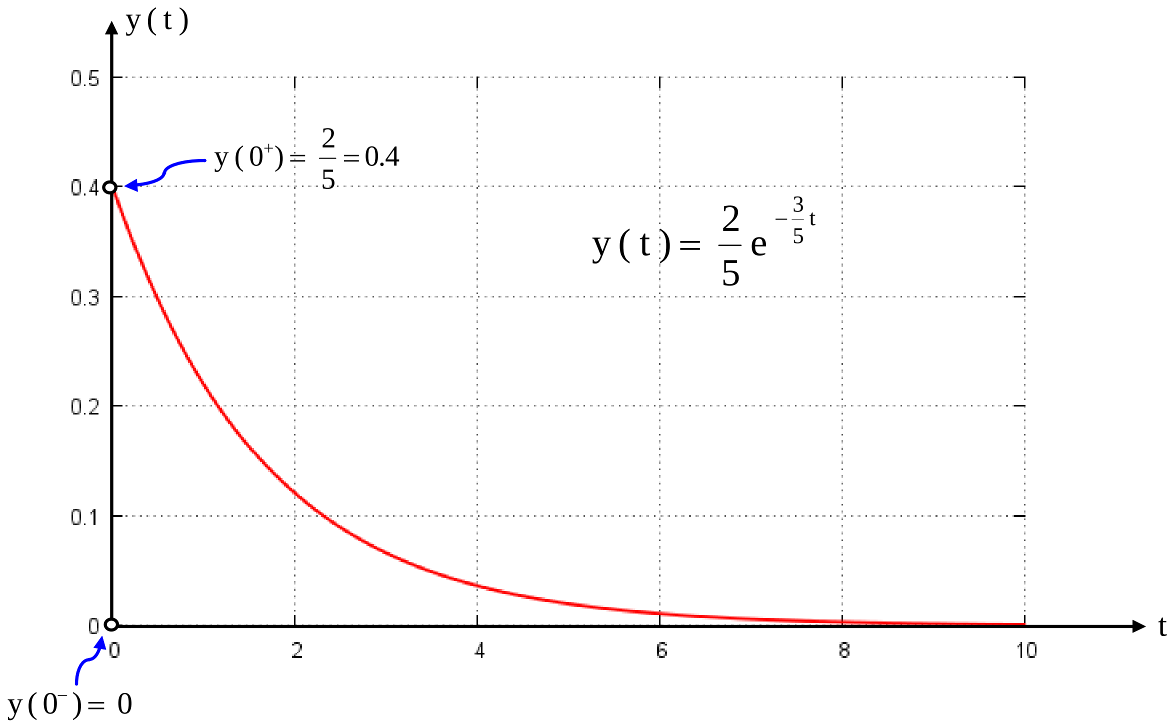
$$y(t)=C\,e^{-\frac{3}{5}t}$$

και από Α.Σ. $y(0^+)=\dfrac{2}{5}$ προκύπτει αμέσως $y(0^+)=C=\dfrac{2}{5}$

άρα η λύση (κρουστική απόκριση) είναι:

$$\boxed{y(t)=\frac{2}{5}\,e^{-\frac{3}{5}t}}$$

ακολουθεί γραφική παράσταση της λύσης



ΑΣΚΗΣΗ

Να λυθούν οι Δ.Ε.

i) $(D + 1)\, y (t) = 2\, \delta (t)$

ii) $(2 D + 2)\, y (t) = \delta (t)$

iii) $(10 D + 8)\, y (t) = 10\, \delta (t)$

Σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $y (0^-) = 0$

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2)</u> Να λυθεί η Δ.Ε.

$$(3D^2 + 5D + 2)\,y(t) = \delta(t)$$
$$y(0^-) = 0, \quad Dy(0^-) = 0$$

Λύση: για $t > 0$ έχουμε:

$$(3D^2 + 5D + 2)\,y(t) = 0$$
$$y(0^+) = ?, \quad Dy(0^+) = ?$$

Προφανώς (για $t = 0$)

$$y(t) \rightarrow \text{δεν περιέχει } \delta(t)$$

$$Dy(t) \rightarrow \text{δεν περιέχει } \delta(t)$$
$$\text{άρα: } y(0^-) = y(0^+) = 0$$

$$D^2 y(t) = k\,\delta(t)$$

αντικαθιστώ στην Δ.Ε

$$3D^2y(t) + 5\underbrace{\cancel{Dy(t)}}_{\text{δεν περιέχει } \delta(t)} + 2\underbrace{\cancel{y(t)}}_{\text{δεν περιέχει } \delta(t)} = \delta(t)$$

η
$$3k\,\delta(t) = \delta(t) \;\Rightarrow\; k = \frac{1}{3}$$

άρα:
$$\left.\frac{d^2 y(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = (Dy(0^+) - Dy(0^-))\,\delta(t) = \frac{1}{3}\,\delta(t)$$

συνεπώς
$$Dy(0^+) - Dy(0^-) = \frac{1}{3}$$

και επειδή $Dy(0^-) = 0$ προκύπτει τελικά:

$$Dy(0^+) = \frac{1}{3}$$

Συνοψίζουμε για $t > 0$

$$\text{Δ. Ε.} \quad (3D^2 + 5D + 2)\,y(t) = 0$$
$$\text{Α.Σ.} \quad y(0^+) = 0, \quad Dy(0^+) = \frac{1}{3}$$

προχωρούμε κατά τα γνωστά στη επίλυση:

χαρακτ. εξίσωση
$$3s^2 + 5s + 2 = 0 \;\Rightarrow\; s_1 = -\frac{2}{3}, \quad s_2 = -1$$

άρα:
$$y(t) = C_1 e^{-\frac{2}{3}t} + C_2 e^{-t}$$

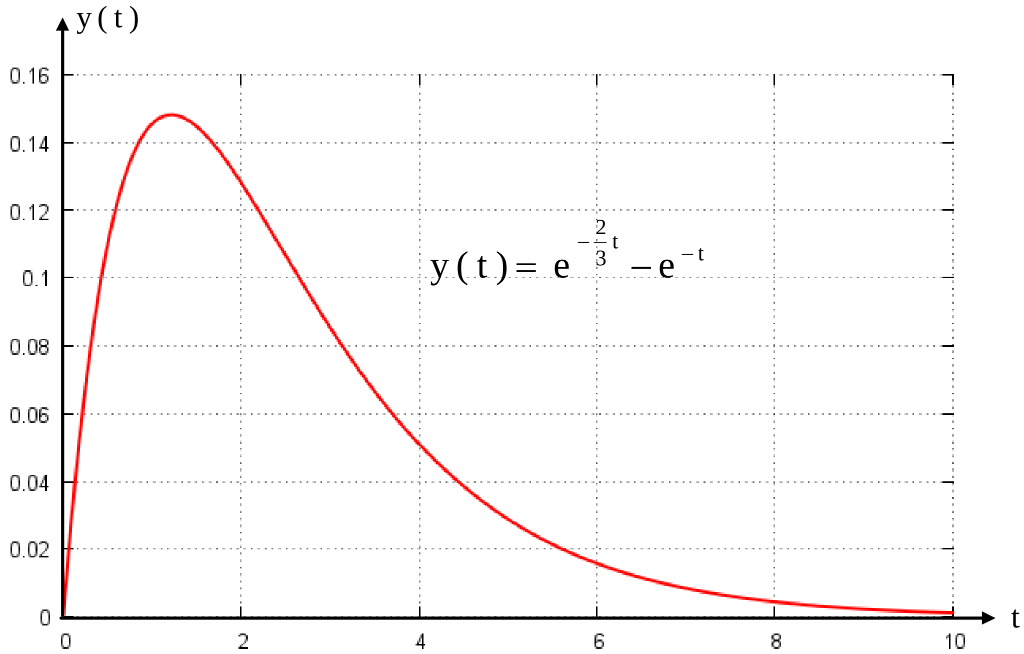
και από Α.Σ.
$$y(0^+) = C_1 + C_2 = 0$$
$$Dy(0^+) = -\frac{2}{3}C_1 - C_2 = \frac{1}{3}$$

από την επίλυση του συστήματος προκύπτουν οι τιμές: $C_1 = 1$, $C_2 = -1$

άρα η λύση (κρουστική απόκριση) είναι:

$$\boxed{y(t) = e^{-\frac{2}{3}t} - e^{-t}}$$

ακολουθεί γραφική παράσταση της λύσης



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3) Να λυθεί η Δ.Ε.

$$(D^2 + 2D + 5)\,y(t) = 3\,\delta(t)$$
$$y(0^-) = 0, \quad Dy(0^-) = 0$$

Λύση: για $t > 0$ έχουμε:

$$(D^2 + 2D + 5)\,y(t) = 0$$
$$y(0^+) = ?, \quad Dy(0^+) = ?$$

Με όμοια συλλογιστική με το προηγούμενο **Παράδειγμα 2** καταλήγουμε στα ακόλουθα:

$$y(0^+) = y(0^-) = 0$$
$$D\,y(0^+) - D\,y(0^-) = 3 \qquad (\text{γιατί;})$$

άρα για $t > 0$

$$\text{Δ. Ε.} \quad (D^2 + 2D + 5)\,y(t) = 0$$
$$\text{Α.Σ.} \quad y(0^+) = 0, \quad Dy(0^+) = 3$$

χαρακτ. εξίσωση $\quad s^2 + 2s + 5 = 0 \;\Rightarrow\; s_{1,2} = -1 \pm j2$

άρα: $\quad y(t) = e^{-t}\,(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)$

εφαρμόζουμε Α.Σ.

$y(0^+) = C_1 = 0$

$D\,y(0^+) = -C_1 + 2C_2 = 3$ (γιατί;)

άρα $C_1 = 0, \quad C_2 = \dfrac{3}{2}$

άρα η λύση (κρουστική απόκριση) είναι:

$$\boxed{y(t) = \frac{3}{2} e^{-t} \sin 2t}$$

ακολουθεί γραφική παράσταση της λύσης