ΣΧΟΛΗ. Ν. ΔΟΚΙΜΩΝ

ΜΑΘΗΜΑ: ΘΕΩΡΙΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ ΙΙ – ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ Σ.Α.Ε.

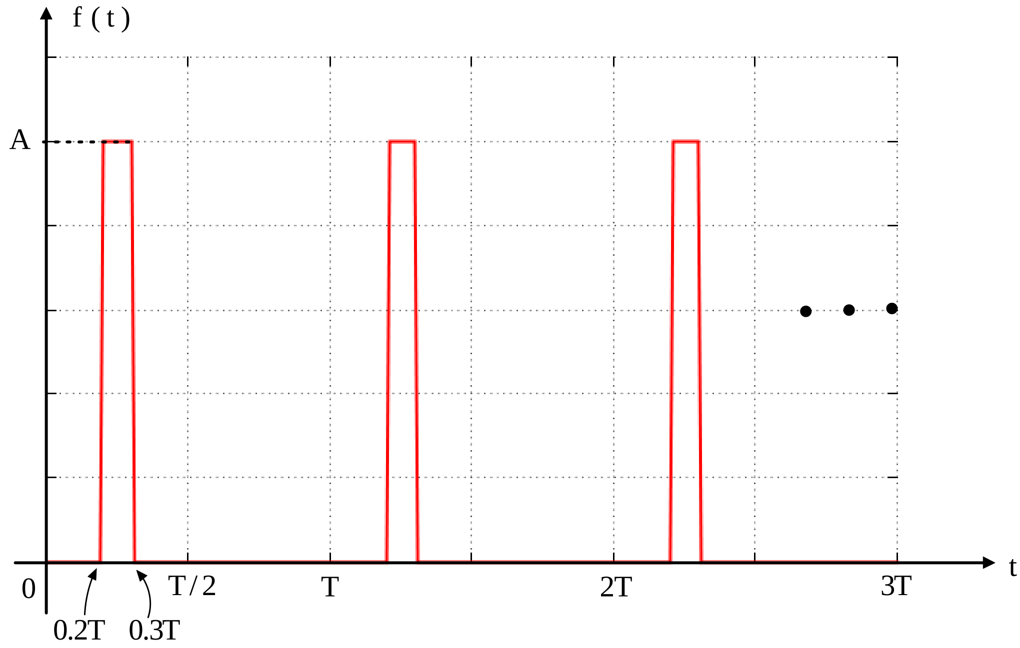
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΑΝΑΠΤΥΞΕΩΣ ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ ΣΕ ΣΕΙΡΑ FOURIER

Δρ. Α. Μαγουλάς

Οκτώβριος 2014

<u>Παράδειγμα 1</u>

Έστω το ακόλουθο περιοδικό σήμα f (t)



1) Ζητείται να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier

Απ/ Παρατηρώντας το **Παράδειγμα 1** (σελ. 162) του βιβλίου, βλέπουμε ότι πρόκειται για το ίδιο σήμα αρκεί να θέσουμε:

$$t_1 = 0.2\,T\,, \qquad t_2 = 0.3\,T$$

το σήμα, για το χρονικό διάστημα μιας περιόδου, γράφεται αναλυτικά :

$$f(t) = \begin{cases} A & \text{για} \quad 0.2T \le t \le 0.3T \\ 0 & \text{αλλου} \end{cases}$$

Η μέση τιμή του σήματος θα είναι:

$$f_\mu = c_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{0.2T}^{0.3T} A\,dt = \frac{A}{T}(0.3T - 0.2T) = 0.1\,A$$

Για να βρούμε το ανάπτυγμα Fourier χρησιμοποιούμε τους τύπους που δίνουν τους συντελεστές a_n και b_n (Μορφή «A» , σελ. 163)

$$a_n = \frac{A}{\pi n}\cdot\left[-\cos(n\omega_1 t_2) + \cos(n\omega_1 t_1)\right] \quad , \qquad b_n = \frac{A}{\pi n}\cdot\left[\sin(n\omega_1 t_2) - \sin(n\omega_1 t_1)\right]$$

όπου $\omega_1 = \dfrac{2\pi}{T}$, $t_1 = 0.2\,T$, $t_2 = 0.3\,T$

άρα θα πάρουμε:

$$a_n = \frac{A}{\pi\, n} \cdot \left[-\cos(n \, \frac{2\,\pi}{T} \, 0.3\,T) + \cos(n \, \frac{2\,\pi}{T} \, 0.2\,T) \right]$$

$$b_n = \frac{A}{\pi\, n} \cdot \left[\sin\,(n \, \frac{2\,\pi}{T} \, 0.3\,T) - \sin\,(n \, \frac{2\,\pi}{T} \, 0.2\,T) \right]$$

ή

$$a_n = \frac{A}{\pi\, n} \cdot \left[-\cos(0.6\pi\, n) + \cos(0.4\pi\, n) \right]$$

$$b_n = \frac{A}{\pi\, n} \cdot \left[\sin\,(0.6\pi\, n) - \sin\,(0.4\pi\, n) \right]$$

Στο σημείο αυτό μπορούμε να κάνουμε χρήση των γνωστών Τριγωνομετρικών ταυτοτήτων:

$$\cos a - \cos b = 2 \sin\,(\frac{a+b}{2}) \sin\,(\frac{b-a}{2})$$

$$\sin a - \sin b = 2 \sin\,(\frac{a-b}{2}) \cos\,(\frac{a+b}{2})$$

έτσι θα πάρουμε:

$$a_n = \frac{A}{\pi\, n} \cdot \left[2 \sin\,(\frac{0.4\pi\, n + 0.6\pi\, n}{2}) \sin\,(\frac{0.6\pi\, n - 0.4\pi\, n}{2}) \right]$$

$$b_n = \frac{A}{\pi\, n} \cdot \left[2 \sin\,(\frac{0.6\pi\, n - 0.4\pi\, n}{2}) \cos\,(\frac{0.6\pi\, n + 0.4\pi\, n}{2}) \right]$$

ή

$$a_n = \frac{2A}{\pi\, n} \cdot \sin\,(0.5\pi\, n) \sin\,(0.1\pi\, n)$$

$$b_n = \frac{2A}{\pi\, n} \cdot \sin\,(0.1\pi\, n) \cos\,(0.5\pi\, n)$$

Επομένως το ανάπτυγμα **σε Μορφή «Α»** γράφεται:

$$\boxed{\begin{aligned} f\,(t) = 0.1\,A + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,A}{\pi\, n} \Big\{ &\sin\,(0.5\pi\, n) \sin\,(0.1\pi\, n) \sin\,(n\, \omega_1\, t) + \\ &+ \sin\,(0.1\pi\, n) \cos\,(0.5\pi\, n) \cos\,(n\, \omega_1\, t) \Big\} \end{aligned}}$$

Θα προσπαθήσουμε τώρα να βρούμε το ανάπτυγμα σε Μορφή «Β»
Όπως είναι γνωστό η Μορφή «Β» γράφεται:

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\,\omega_1 t + \varphi_n)$$

Όπου $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ και $\varphi_n = \tan^{-1}\left(\dfrac{b_n}{a_n}\right)$

άρα:

$$c_n^2 = a_n^2 + b_n^2 =$$

$$= \frac{4A^2}{\pi^2 n^2} \cdot \sin^2(0.5\pi n)\sin^2(0.1\pi n) + \frac{4A^2}{\pi^2 n^2} \cdot \sin^2(0.1\pi n)\cos^2(0.5\pi n)$$

ή

$$c_n^2 = \frac{4A^2}{\pi^2 n^2} \cdot \sin^2(0.1\pi n)\left[\sin^2(0.5\pi n) + \cos^2(0.5\pi n)\right] = \frac{4A^2}{\pi^2 n^2} \cdot \sin^2(0.1\pi n)$$

άρα $$c_n = \frac{2A}{\pi n} \cdot \left|\sin(0.1\pi n)\right|$$

για το $\varphi_n = \tan^{-1}\left(\dfrac{b_n}{a_n}\right)$ έχουμε:

$$\varphi_n = \tan^{-1} = \left(\frac{\cancel{\dfrac{2A}{\pi n}}\cos(0.5\pi n)\cancel{\sin(0.1\pi n)}}{\cancel{\dfrac{2A}{\pi n}}\cancel{\sin(0.1\pi n)}\sin(0.5\pi n)}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\cos(0.5\pi n)}{\sin(0.5\pi n)}\right)$$

παρατηρούμε ότι:
για $n = 1, 3, 5, 7, \ldots$ (n = περιττός) $\cos(0.5\pi n) = 0$

άρα $\varphi_n = \tan^{-1}(0) = 0$ ή $\varphi_n = \tan^{-1}(0) = \pi$

επιλέγεται η τιμή $\varphi_n = 0$ όταν $\sin(0.5\pi n) = 1$ δηλ. $n = 1, 5, 9, 13, \ldots.$
και η τιμή $\varphi_n = \pi$ όταν $\sin(0.5\pi n) = -1$ δηλ. $n = 3, 7, 11, 15, \ldots.$

επίσης για $n = 2, 4, 6, 8, \ldots$ (n = άρτιος) $\sin(0.5\pi n) = 0$

άρα το κλάσμα $\dfrac{\cos(0.5\pi n)}{\sin(0.5\pi n)}$ απειρίζεται!

Προσοχή όμως

για $n = 2, 6, 10, 14, \ldots$ το $\cos(0.5\pi n) = -1$ συνεπώς $\varphi_n = \tan^{-1}(-\infty) = -\dfrac{\pi}{2}$

και για $n = 4, 8, 12, 16, \ldots$ το $\cos(0.5\pi n) = 1$ συνεπώς $\varphi_n = \tan^{-1}(\infty) = \dfrac{\pi}{2}$

Έτσι το ανάπτυγμα σε **Μορφή «Β»** γράφεται:

$$\boxed{f(t) = 0.1A + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A}{\pi n} \left| \sin(0.1\pi n) \right| \sin(n\omega_1 t + \varphi_n)}$$

όπου:

$$c_0 = 0.1\,A$$

$$c_n = \frac{2A}{\pi n} \cdot \left| \sin(0.1\pi n) \right|$$

$$\varphi_n = \begin{cases} 0 & \text{για} \quad n = 1, 5, 9, 13, \ldots \\ \pi & \text{για} \quad n = 3, 7, 11, 15, \ldots \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{για} \quad n = 2, 6, 10, 14, \ldots \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{για} \quad n = 4, 8, 12, 16, \ldots \end{cases}$$

Παρακάτω γίνεται αριθμητικός υπολογισμός των όρων της σειράς Fourier στη **Μορφή «Β»** λαμβάνοντας τιμές

$$A = 10 \;, \qquad T = 1 \text{ sec}$$

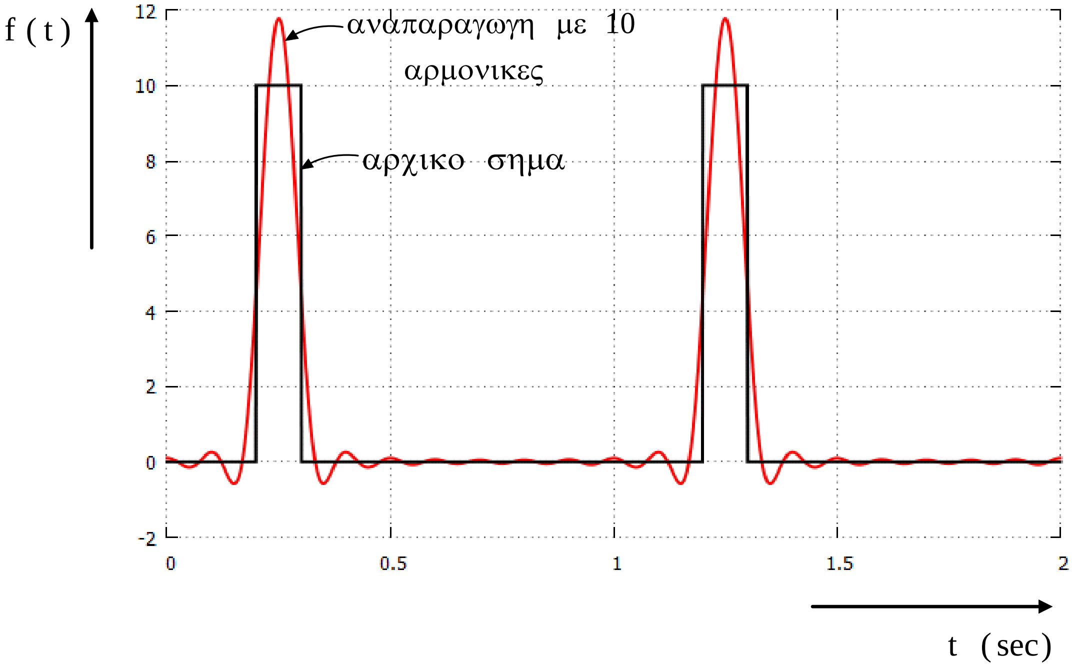
$$\text{άρα} \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T} = 6.2832 \text{ rad / sec}$$

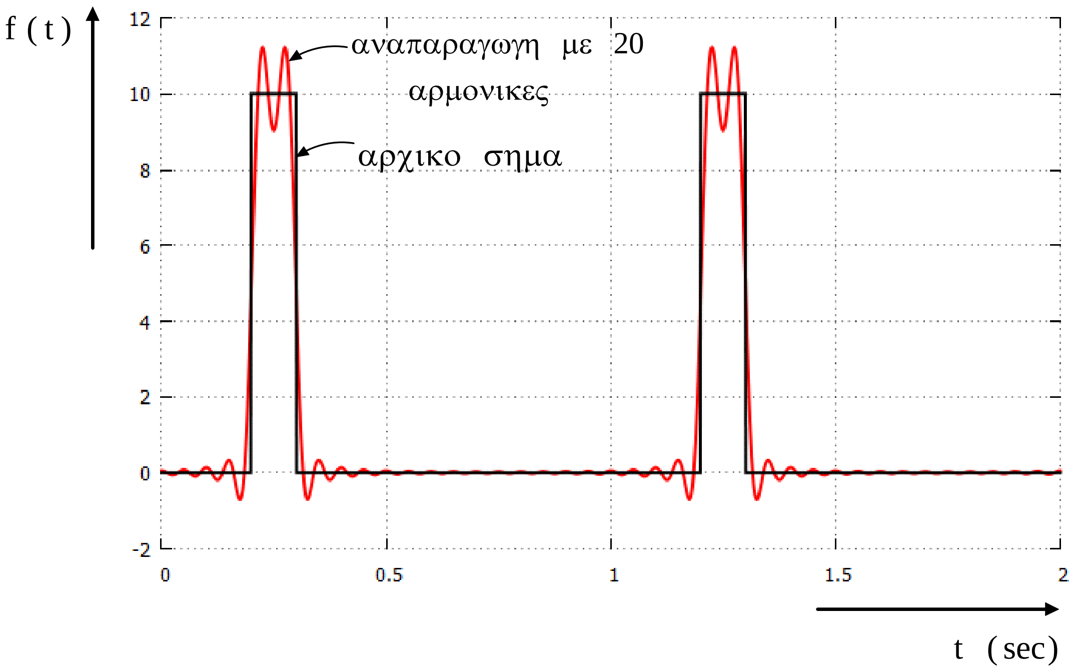
$$f(t) = 1 + 1.967 \sin(\omega_1 t) + 1.871 \sin(2\omega_1 t - \frac{\pi}{2}) + 1.717 \sin(3\omega_1 t + \pi) +$$
$$+ 1.514 \sin(4\omega_1 t + \frac{\pi}{2}) + 1.273 \sin(5\omega_1 t) + 1.009 \sin(6\omega_1 t - \frac{\pi}{2}) +$$
$$+ 0.736 \sin(7\omega_1 t + \pi) + 0.468 \sin(8\omega_1 t + \frac{\pi}{2}) + \ldots$$

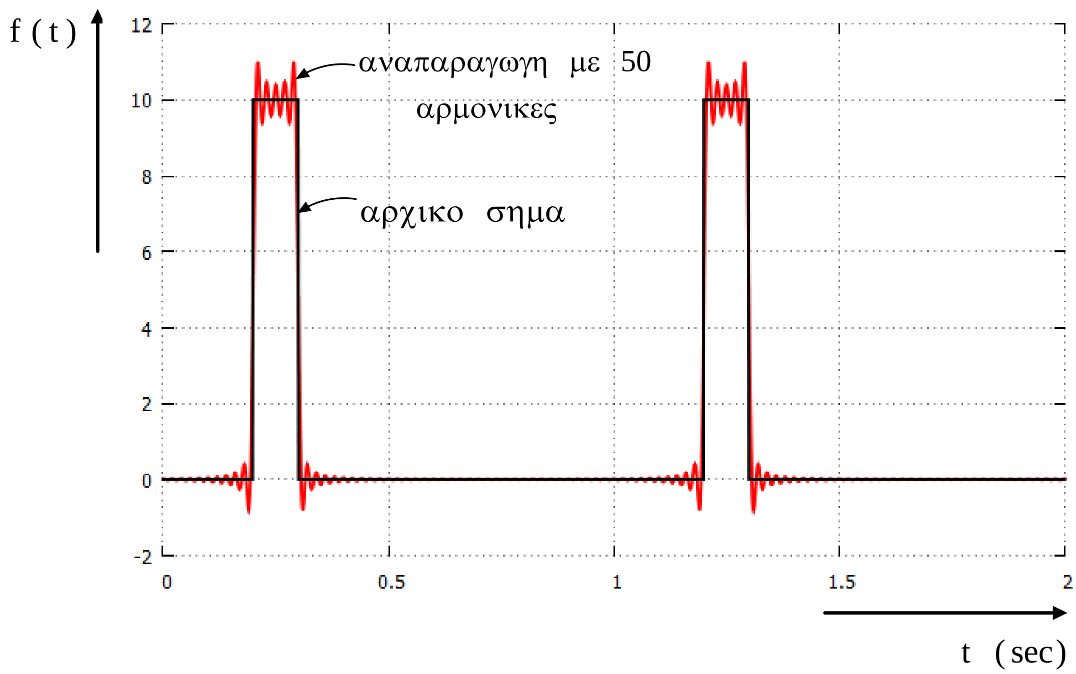
Η σειρά Fourier συγκλίνει αρκετά αργά, πράγμα αναμενόμενο, γιατί το σήμα f (t) έχει ασυνέχειες.

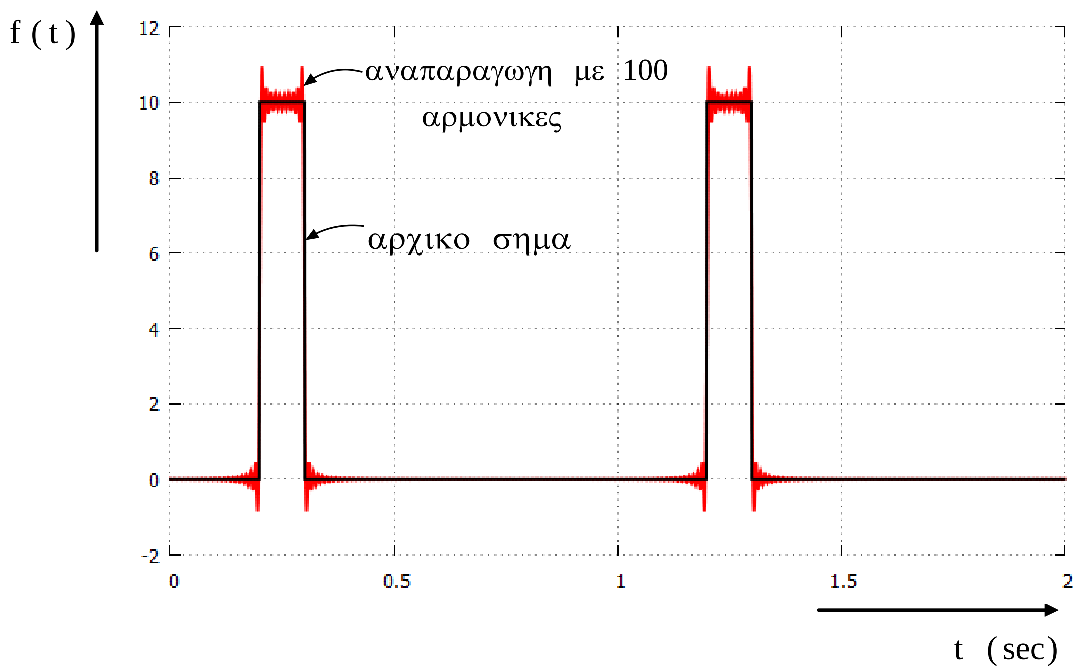
Ακολουθούν γραφικές παραστάσεις του σήματος f (t) , όπως αυτό «συντίθεται» από τις αρμονικές του

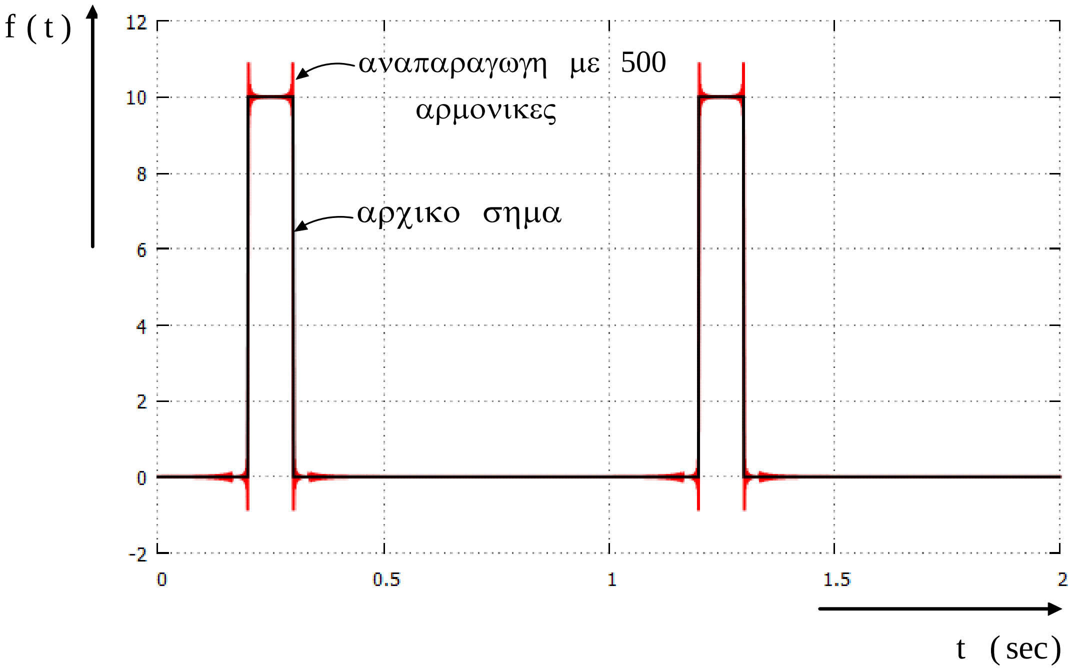
\

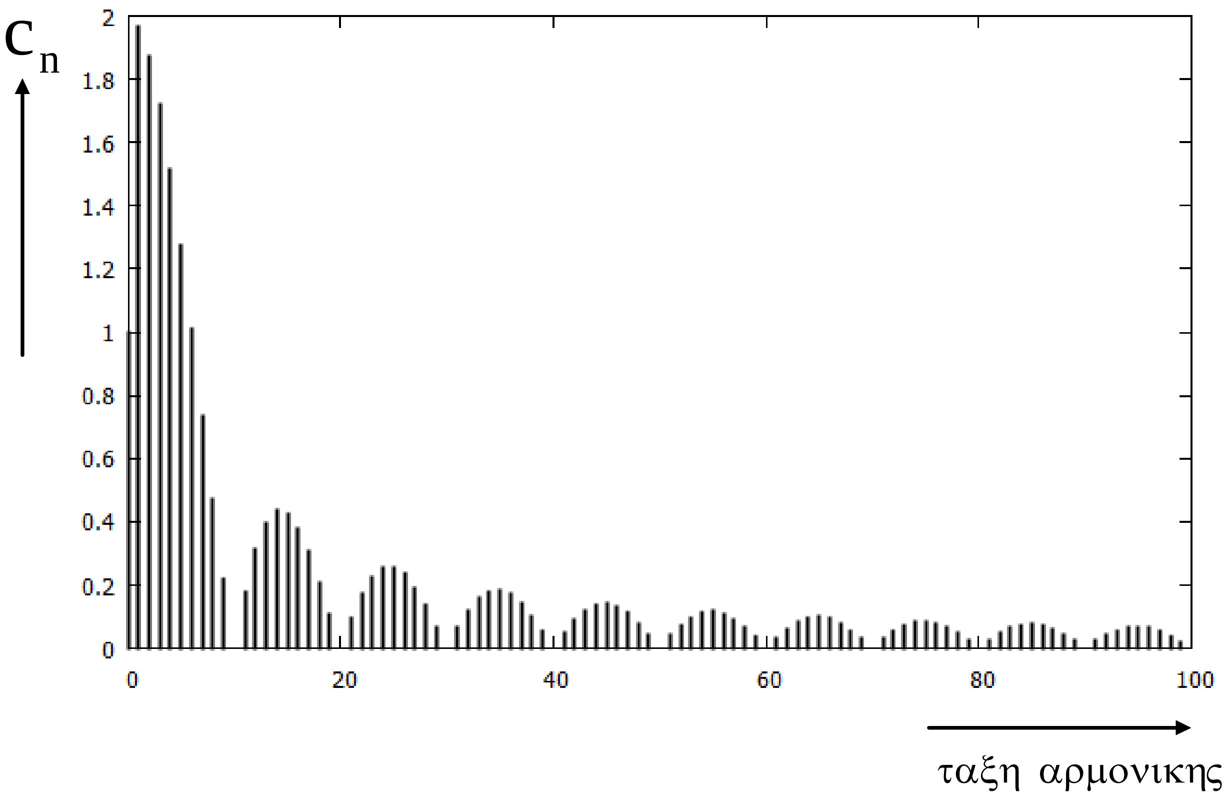

f (t)
αναπαραγωγη με 10
αρμονικες
αρχικο σημα
12
10
8
6
4
2
0
-2
0
0.5
1
1.5
2
t (sec)


f (t)
αναπαραγωγη με 20
αρμονικες
αρχικο σημα
12
10
8
6
4
2
0
-2
0
0.5
1
1.5
2
t (sec)


f (t)
12
10
8
6
4
2
0
-2
0
0.5
1
1.5
2
αναπαραγωγη με 50 αρμονικες
αρχικο σημα
t (sec)


f (t)
12
10
8
6
4
2
0
-2
0
0.5
1
1.5
2
αναπαραγωγη με 100 αρμονικες
αρχικο σημα
t (sec)





Φάσμα πλάτους του σήματος

2) Να υπολογιστεί η ενεργός τιμή του σήματος f (t)
- Ακριβής τιμή (με βάση τον ορισμό)
- Με χρήση του τύπου του Parseval

Απ/ Ο υπολογισμός της ενεργού τιμής του σήματος f (t) (ακριβής τιμή) δεν παρουσιάζει καμιά δυσκολία, λόγω της απλής μορφής του f (t). Έτσι έχουμε:

$$f_{\varepsilon\nu}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{0.2T}^{0.3T} A^2\,dt = \frac{1}{T}\left[A^2 t\right]_{0.2T}^{0.3T} = \frac{1}{T}A^2(0.3T - 0.2T) = 0.1A^2$$

άρα $$f_{\varepsilon\nu} = \sqrt{0.1A^2} = A\sqrt{0.1}$$

και για A = 10 παίρνουμε: $$f_{\varepsilon\nu} = 10\sqrt{0.1} = 3.16228 \quad \text{(ακριβής τιμή)}$$

Αν κάνουμε χρήση του τύπου Parseval θα πρέπει να πάρουμε ένα αρκετά μεγάλο αριθμό όρων, διότι όπως προαναφέρθηκε η σειρά Fourier συγκλίνει αρκετά αργά.

Έτσι:
- για 10 αρμονικές ο τύπος Parseval δίνει

$$f_{\varepsilon\nu,10} = \sqrt{c_0^2 + \sum_{n=1}^{10}\left(\frac{c_n}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

(όπου $c_0 = 0.1A = 1$ και $c_n = \frac{2A}{\pi n}\cdot\left|\sin(0.1\pi n)\right| = \frac{20}{\pi n}\cdot\left|\sin(0.1\pi n)\right|$)

και παίρνουμε: $f_{\varepsilon\nu,10} = 3.005$

- για 20 αρμονικές $$f_{\varepsilon\nu,20} = \sqrt{c_0^2 + \sum_{n=1}^{20}\left(\frac{c_n}{\sqrt{2}}\right)^2} = 3.082$$

- για 50 αρμονικές $f_{\varepsilon\nu,50} = 3.130$

- για 100 αρμονικές $f_{\varepsilon\nu,100} = 3.146$

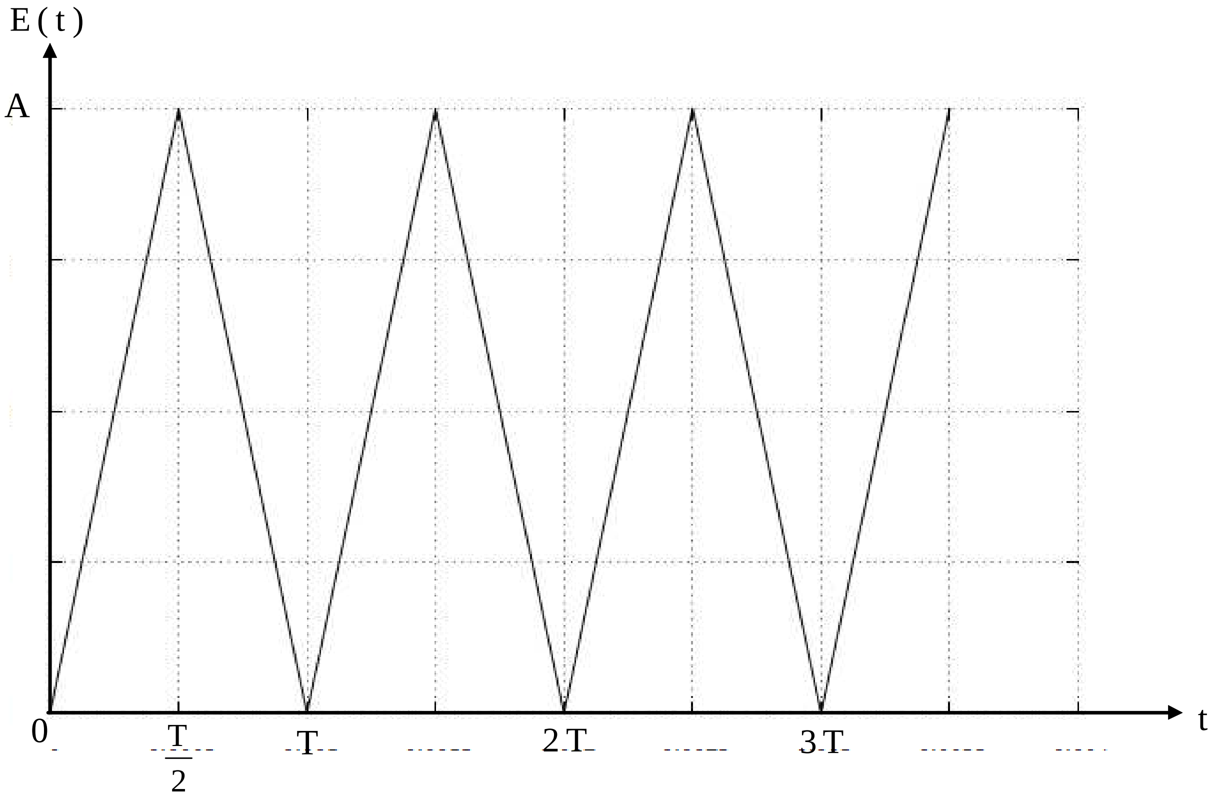
- για 500 αρμονικές $f_{\varepsilon\nu,500} = 3.159$

Υπενθυμίζεται η ακριβής τιμή $f_{\varepsilon\nu}$ = 3. 16228

Παρατηρείται η συνεχής βελτίωση της ακρίβειας καθώς αυξάνει ο αριθμός των όρων…

<u>Παράδειγμα 2</u>

Έστω το περιοδικό σήμα E (t)



Θεωρήστε A = 20 V , T = 0.001 sec

Μπορούμε εύκολα να βρούμε την αναλυτική έκφραση του E (t) για μια περίοδο:

$$E(t) = \begin{cases} \dfrac{2A}{T}\,t & \text{για} \quad 0 \le t \le \dfrac{T}{2} \\[2ex] -\dfrac{2A}{T}\,t + 2A & \text{για} \quad \dfrac{T}{2} \le t \le T \end{cases}$$

Η μέση τιμή του σήματος θα είναι:

$$E_{\mu} = \frac{1}{T}\int_0^T E(t)\,dt = \frac{1}{T} \times \text{Εμβαδόν τριγώνου}$$

άρα

$$\boxed{E_{\mu} = \frac{1}{T}\cdot\left(\frac{A \cdot T}{2}\right) = \frac{A}{2}}$$

Η ενεργός τιμή του σήματος θα είναι:

$$E_{\varepsilon\nu}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T E^2(t)\,dt$$

άρα $$E_{εν}^2 = \frac{1}{T}\left(\int_0^{T/2} \frac{4A^2}{T^2} t^2\, dt + \int_{T/2}^{T} \left(\frac{4A^2}{T^2} t^2 + 4A^2 - \frac{8A^2}{T} t \right) dt \right)$$

ή $$E_{εν}^2 = \frac{1}{T} \left[\frac{4A^2}{T^2} \frac{t^3}{3} \right]_0^{T/2} + \frac{1}{T} \left[\frac{4A^2}{T^2} \frac{t^3}{3} + 4A^2\, t - \frac{8A^2}{T} \frac{t^2}{2} \right]_{T/2}^{T} =$$

$$= \frac{1}{T} \frac{4A^2}{T^2} \cdot \frac{T^3}{24} + \frac{1}{T} \left[\frac{4A^2}{T^2} \cdot \frac{T^3}{3} - \frac{4A^2}{T^2} \cdot \frac{T^3}{24} + 4A^2\, T - 4A^2 \frac{T}{2} - \frac{8A^2}{T} \cdot \frac{T^2}{2} + \frac{8A^2}{T} \cdot \frac{T^2}{8} \right]$$

άρα $$E_{εν}^2 = \frac{A^2}{6} + \frac{4A^2}{3} - \frac{A^2}{6} + 4A^2 - 2A^2 - 4A^2 + A^2 = \frac{4A^2}{3} - 2A^2 + A^2 = \frac{A^2}{3}$$

συνεπώς καταλήγουμε: $E_{εν}^2 = \dfrac{A^2}{3}$

άρα $\boxed{E_{εν} = \dfrac{A}{\sqrt{3}}}$ (ακριβής τιμή)

Θέλουμε να βρούμε το ανάπτυγμα Fourier του σήματος E (t)
Ανατρέχουμε στο εγχειρίδιο του Μαθήματος σελ. 171 – 172 όπου υπάρχει έτοιμο σε Μορφή «Α»

$$E(t) = \frac{A}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A}{\pi^2 n^2} \left((-1)^n - 1 \right) \cos(n\,\omega_1 t)$$

δηλαδή: $C_0 = \dfrac{A}{2}$, $a_n = 0$ για κάθε n , $b_n = \dfrac{2A}{\pi^2 n^2} \left((-1)^n - 1 \right)$

υπολογίζουμε αριθμητικά το C_0 και τις 5 πρώτες τιμές για το b_n (με A = 20)

$C_0 = 10$

$b_1 = -8.106$

$b_2 = 0$

$b_3 = -0.900$

$b_4 = 0$

$b_5 = -0.324$

Άρα το ανάπτυγμα σε **Μορφή «Α»** γράφεται (προσεγγιστικά μέχρι την 5^{η} αρμονική)

$$E(t) \approx 10 - 8.106 \cos \omega_1 t - 0.900 \cos 3\omega_1 t - 0.324 \cos 5\omega_1 t \ \ldots.$$

όπου $\omega_1 = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{0.001} = 6283.18 \quad \text{rad / sec}$

Αν θέλουμε τη Μορφή «Β» τότε:

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \qquad \text{και} \qquad \varphi_n = \tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

εδώ $a_n = 0$ για κάθε n άρα

$$c_n = |\, b_n \,| \qquad \text{και} \qquad \varphi_n = \tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{για κάθε } n \ \ (\text{ διότι } b_n < 0 \ )$$

άρα το ανάπτυγμα σε **Μορφή «Β»** γράφεται:

$$E(t) \approx 10 + 8.106 \sin(\omega_1 t - \frac{\pi}{2}) + 0.900 \cos(3\omega_1 t - \frac{\pi}{2}) + 0.324 \cos(5\omega_1 t - \frac{\pi}{2}) \ \ldots.$$

Υπολογίζουμε αριθμητικά την ενεργό τιμή του σήματος

- Ακριβής τιμή $E_{\varepsilon\nu} = \dfrac{A}{\sqrt{3}} = \dfrac{20}{\sqrt{3}} = 11.547 \ \text{Volts}$

- Με χρήση τύπου Parseval (n έως το 5)

$$E_{\varepsilon\nu,\,\text{Parseval}} = \sqrt{C_0^2 + \left(\frac{C_1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{C_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{C_5}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{10^2 + \left(\frac{8.106}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{0.900}{\sqrt{2}}\right)^2 + .\left(\frac{0.324}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

άρα $E_{\varepsilon\nu,\,\text{Parseval}} = \sqrt{133.11} = 11.546 \ \text{Volts}$

παρατηρούμε ότι η διαφορά είναι αμελητέα διότι η σειρά Fourier συγκλίνει ταχύτατα

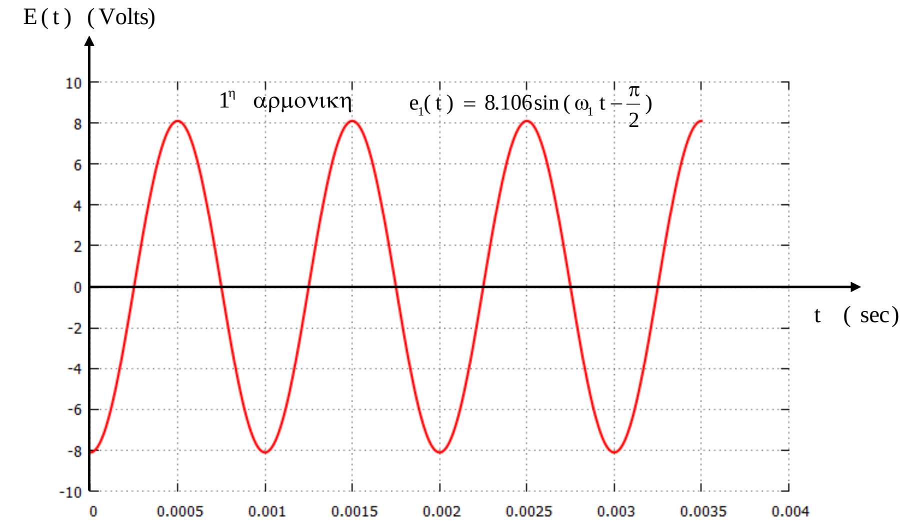
Το υπόλοιπο αρμονικών R_2 (για n έως 5) θα είναι

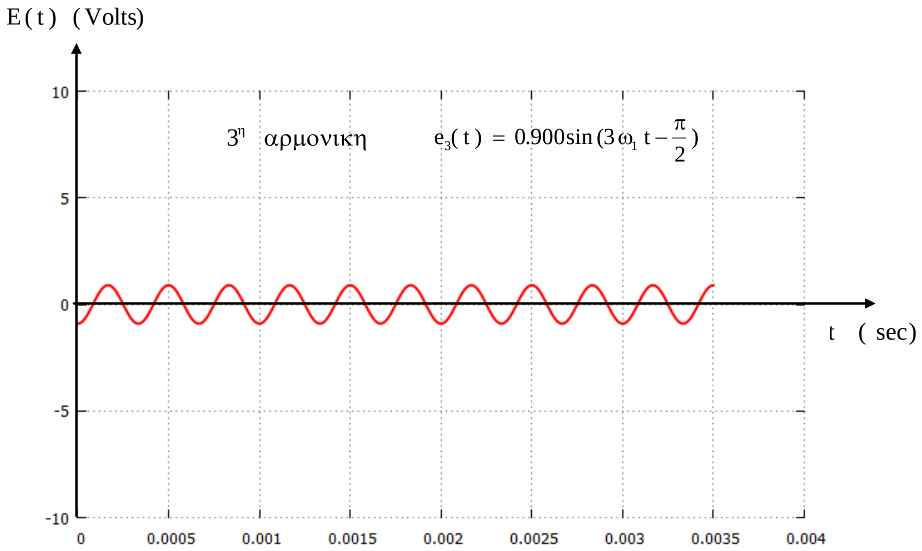
$$R_2 = \sqrt{\left(\frac{C_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{C_5}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{0.900}{\sqrt{2}}\right)^2 + .\left(\frac{0.324}{\sqrt{2}}\right)^2} = 0.6763 \ \text{Volts}$$

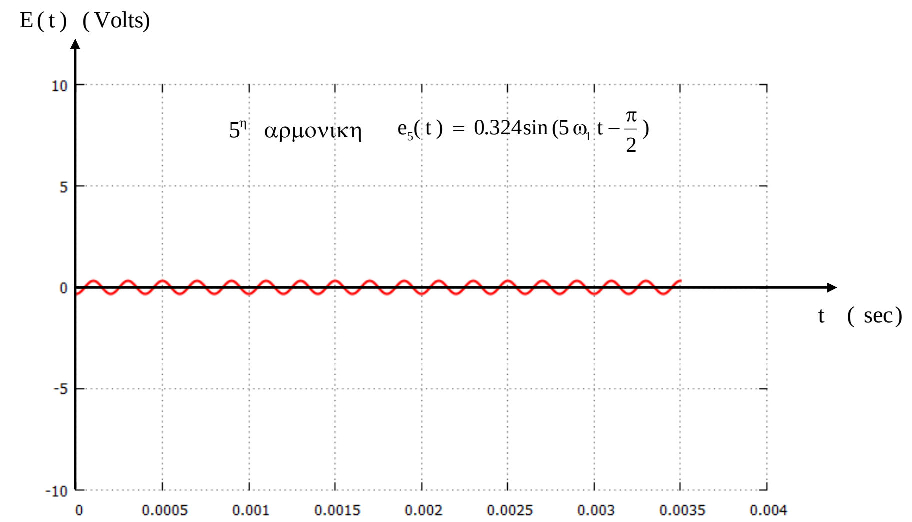
και η ολική αρμονική παραμόρφωση THD (%)

$$THD\,(\%) = \frac{R_2}{\left(\dfrac{c_1}{\sqrt{2}}\right)} \times 100 \ (\%) = \frac{0.6763}{\dfrac{8.106}{\sqrt{2}}} \times 100 = 11.8\ \%$$

Ακολουθούν διάφορες γραφικές παραστάσεις...

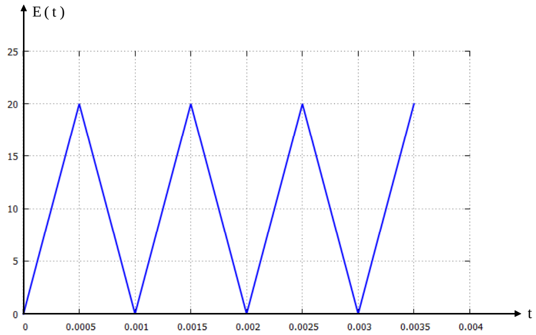




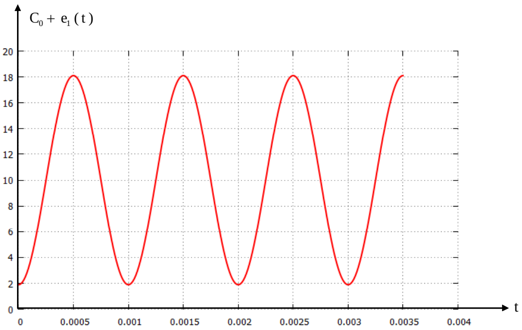


Εδώ έχουμε γραφικές παραστάσεις των 3 πρώτων αρμονικών του σήματος Για ευκολία στη σύγκριση των μεγεθών οι 3 γραφικές παραστάσεις έχουν γίνει στην **ίδια κλίμακα**

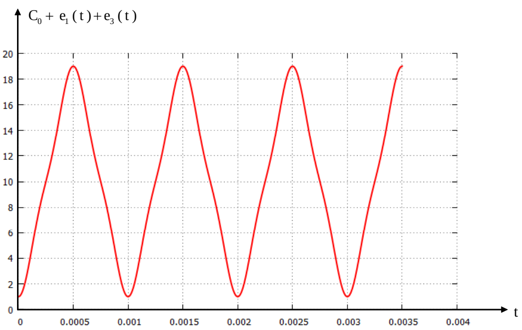
Στα παρακάτω σχήματα φαίνεται η διαδοχική προσέγγιση που επιτυγχάνεται στη ανασύνθεση του σήματος Ε (t) από τις αρμονικές του. Υπενθυμίζεται ότι, στη περίπτωσή μας, η σειρά Fourier συγκλίνει ταχύτατα και έτσι αρκούν μόλις τρείς αρμονικές (1^{η} , 3^{η} και 5^{η}) για να έχουμε μια αρκετά καλή προσέγγιση του σήματος (βλ. τελευταίο σχήμα)



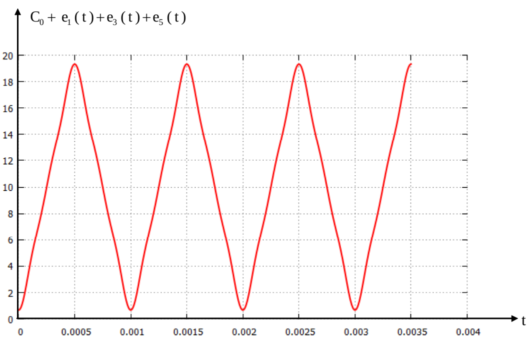
Εδώ φαίνεται το αρχικό σήμα Ε (t)



Προσέγγιση του σήματος από την συνεχή συνιστώσα και την 1^{η} αρμονική του



Προσέγγιση του σήματος από την συνεχή συνιστώσα, την 1^{η} και την 3^{η} αρμονική του



Προσέγγιση του σήματος από την συνεχή συνιστώσα, την 1^{η} , την 3^{η} και την 5^{η} αρμονική του