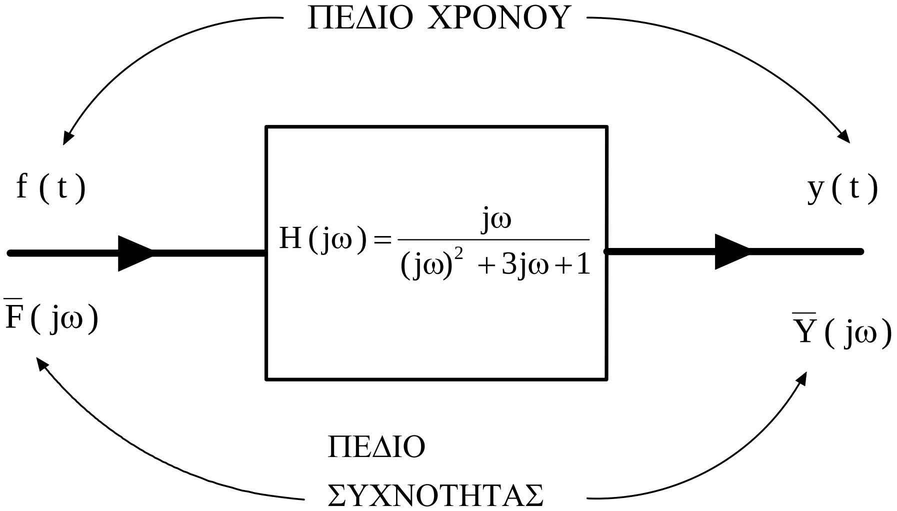
ΣΝΔ
ΘΕΩΡΙΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ ΙΙ – ΣΑΕ

Εύρεση Μόνιμης Απόκρισης Γραμμικού Συστήματος σε περιοδικό σήμα εισόδου f (t) με χρήση ανάλυσης Fourier

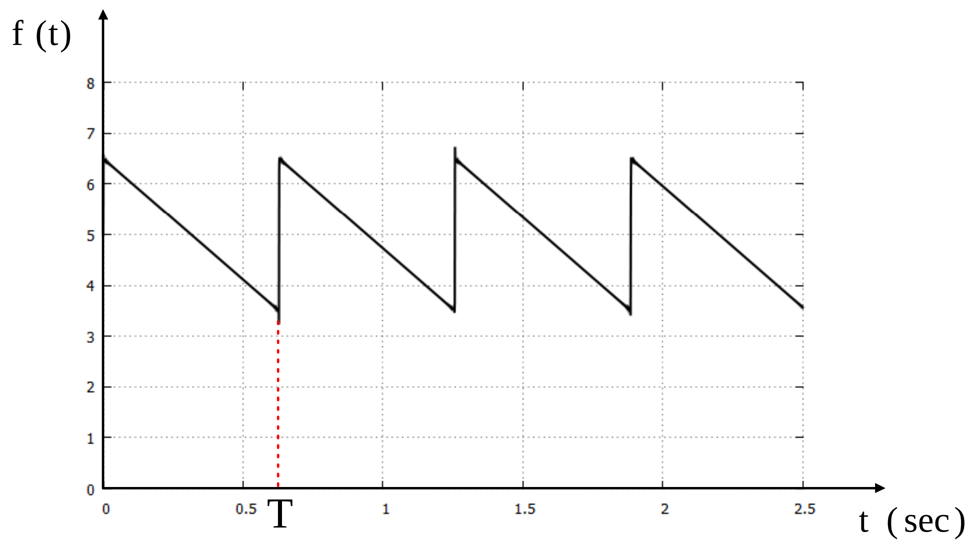
1. Έστω το γραμμικό σύστημα:



με συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(j\omega)=\frac{\overline{Y}(j\omega)}{\overline{F}(j\omega)}=\frac{j\omega}{(j\omega)^2+3j\omega+1}$$

και έστω το σήμα εισόδου f (t) (περιοδικό)



η περίοδος του σήματος είναι T = 0.6283 sec

2. Το σήμα f (t) αναλύεται σε σειρά Fourier ως εξής:

$$f\ (t) = 5 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\pi n} \sin(n\,\omega_1\, t)$$

όπου $\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = 10\ \ r/s$

άρα το σήμα γράφεται:

$$f\ (t) = 5 + \frac{3}{\pi} \sin(\omega_1\, t) + \frac{3}{2\pi} \sin(2\,\omega_1\, t) +$$
$$+\ \frac{3}{3\pi} \sin(3\,\omega_1\, t) + \frac{3}{4\pi} \sin(4\,\omega_1\, t) + \ldots$$

ή

$$f\ (t) = 5 + 0.955 \sin(10\,t) + 0.477 \sin(20\,t) +$$
$$+\ 0.318 \sin(30\,t) + 0.239 \sin(40\,t) + \ldots$$

(σταματήσαμε στην 4η αρμονική)

Οι αντίστοιχοι παραστατικοί μιγαδικοί των αρμονικών θα είναι:

1η αρμονική: ω = ω₁ = 10 r /s

$$f_1\ (t) = 0.955 \sin(10\,t) \ \Rightarrow\ \overline{F}_1\ (j10) = 0.955 \angle 0^o$$

2η αρμονική: ω = 2ω₁ = 20 r /s

$$f_2\ (t) = 0.477 \sin(20\,t) \ \Rightarrow\ \overline{F}_2\ (j\,20) = 0.477 \angle 0^o$$

3η αρμονική: ω = 3ω₁ = 30 r /s

$$f_3\ (t) = 0.318 \sin(30\,t) \ \Rightarrow\ \overline{F}_3\ (j\,30) = 0.318 \angle 0^o$$

4η αρμονική: ω = 4ω₁ = 40 r /s

$$f_4\ (t) = 0.239 \sin(40\,t) \ \Rightarrow\ \overline{F}_4\ (j\,40) = 0.239 \angle 0^o$$

3. Μπορούμε χρησιμοποιώντας τη γνωστή σχέση:

$$\overline{Y}(j\omega) = H(j\omega)\,\overline{F}(j\omega)$$

να βρούμε την Μόνιμη απόκριση του συστήματος όταν διέγερση είναι κάθε φορά μονάχα μία αρμονική του σήματος εισόδου $f(t)$

Δηλαδή θέτουμε ως διέγερση στο σύστημα, διαδοχικά όλους τους όρους του αναπτύγματος Fourier του σήματος εισόδου, ξεκινώντας από την συνεχή συνιστώσα (αν υπάρχει) και συνεχίζοντας με την 1η την 2η , την 3η αρμονική κ.ο.κ.

Η απόκριση $y_0(t)$ **στη συνεχή συνιστώσα** $f_0(t)$ **χρειάζεται ειδική μεταχείριση.**

Οι αποκρίσεις $y_1(t),\ y_2(t)\ldots$ **(πάντα στη Μόνιμη Κατάσταση!!!) στις αρμονικές του σήματος εισόδου** $f_1(t),\ f_2(t)\ldots$ **θα είναι, προφανώς, ημιτονοειδούς μορφής με την ίδια κυκλική συχνότητα αλλά διαφορετικά πλάτη και αρχικές φάσεις.**

Δηλαδή: **η διέγερση** $f_k(t) = F_k \sin(k\omega t + \vartheta_k)$

δίνει απόκριση $y_k(t) = Y_k \sin(k\omega t + \varphi_k)$

4. Για να βρούμε την Μόνιμη Απόκριση $y(t)$ **του συστήματος στο περιοδικό σήμα** $f(t)$ **αθροίζουμε τις αποκρίσεις** $y_0(t), y_1(t),\ y_2(t)\ldots$ **προφανώς στο πεδίο του χρόνου.**

Δηλαδή

$$y(t) \;=\; y_0(t) + y_1(t) + y_2(t) + \ldots$$

Στους πρακτικούς υπολογισμούς το άθροισμα αυτό κάπου θα σταματήσει

5. Παρακάτω φαίνεται η επίλυση του προβλήματος με αριθμητικούς υπολογισμούς μέχρι και την 4η αρμονική.

Συνεχής συνιστώσα : λαμβάνουμε ω = 0

Η συνάρτηση μεταφοράς δίνει:

$$H(\,j0\,) = \frac{j0}{(j0)^2 + 3j0 + 1} = 0$$

άρα δεν υπάρχει απόκριση στη συνεχή συνιστώσα

1η αρμονική: **$\omega_1 = 10$ r /s**

Η συνάρτηση μεταφοράς δίνει:

$$H(j10) = \frac{j10}{(j10)^2 + 3j10 + 1} = 0.0280 - j\,0.0925 = 0.0966\angle -73.2^{O}$$

άρα:

$$\overline{Y}_1(\,j10\,) = H(\,j10\,)\,\overline{F}_1(\,j10\,) = 0.0966\angle -73.2^{o} \cdot 0.955\angle 0^{o} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overline{Y}_1(\,j10\,) = 0.0922\angle -73.2^{o}$$

άρα $$y_1(\,t\,) = 0.0922\sin(\,10t - 73.2^{o}\,)$$

2η αρμονική: **$2\omega_1 = 20$ r /s**

Η συνάρτηση μεταφοράς δίνει:

$$H(j\,20) = \frac{j\,20}{(j\,20)^2 + 3j\,20 + 1} = 0.0074 - j\,0.0490 = 0.0495\angle -81.4^{O}$$

άρα:

$$\overline{Y}_2(\,j\,20\,) = H(\,j\,20\,)\,\overline{F}_2(\,j\,20\,) = 0.0495\angle -81.4^{o} \cdot 0.477\angle 0^{o} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overline{Y}_2(\,j\,20\,) = 0.0236\angle -81.4^{o}$$

άρα $$y_2(\,t\,) = 0.0236\sin(\,20t - 81.4^{o}\,)$$

3η αρμονική: **$3\omega_1 = 30\ r/s$**

Η συνάρτηση μεταφοράς δίνει:

$$H(j30) = \frac{j30}{(j30)^2 + 3j30 + 1} = 0.0033 - j0.0330 = 0.0332\angle -84.3^{O}$$

άρα:

$$\overline{Y}_3(j30) = H(j30)\,\overline{F}_3(j30) = 0.0332\angle -84.3^{o} \cdot 0.318\angle 0^{o} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overline{Y}_3(j30) = 0.0105\angle -84.3^{o}$$

άρα $$y_3(t) = 0.0105\sin(30t - 84.3^{o})$$

4η αρμονική: **$4\omega_1 = 40\ r/s$**

Η συνάρτηση μεταφοράς δίνει:

$$H(j40) = \frac{j40}{(j40)^2 + 3j40 + 1} = 0.0019 - j0.0248 = 0.0249\angle -85.6^{O}$$

άρα:

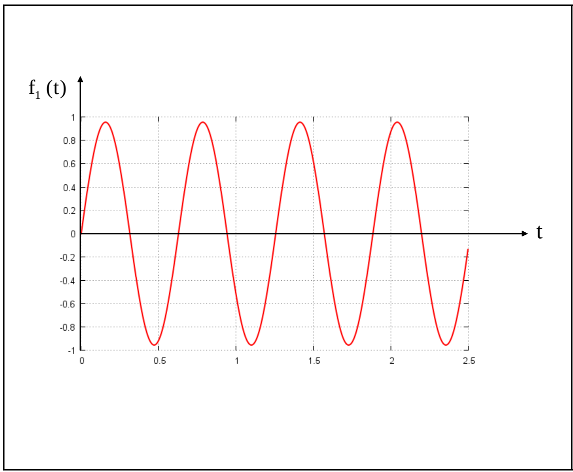
$$\overline{Y}_4(j40) = H(j40)\,\overline{F}_4(j40) = 0.0249\angle -85.6^{o} \cdot 0.239\angle 0^{o} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overline{Y}_4(j40) = 0.0059\angle -85.6^{o}$$

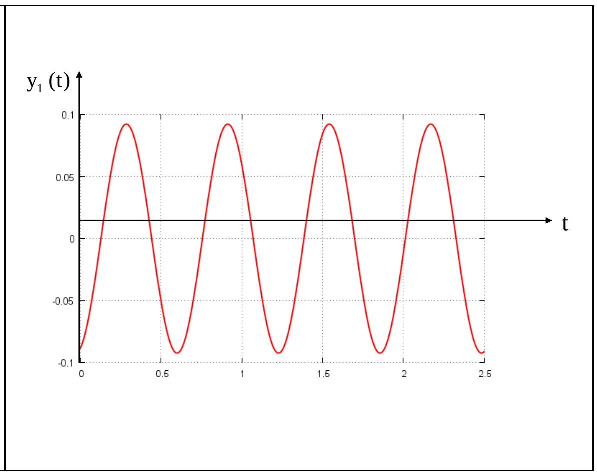
άρα $$y_4(t) = 0.0059\sin(40t - 85.6^{o})$$

Ακολουθούν γραφικές παραστάσεις

1η αρμονική: $\omega_1 = 10$ r /s

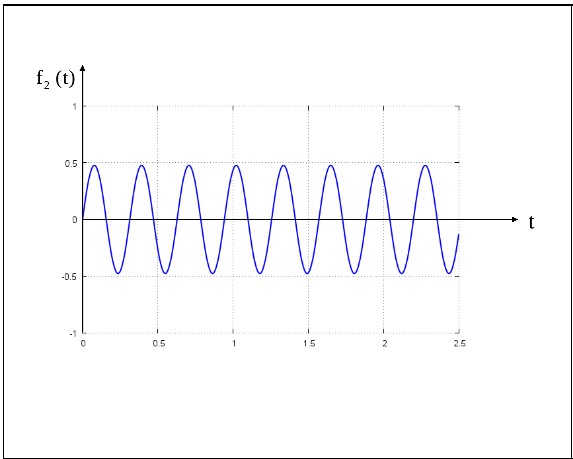
Διέγερση **Απόκριση**

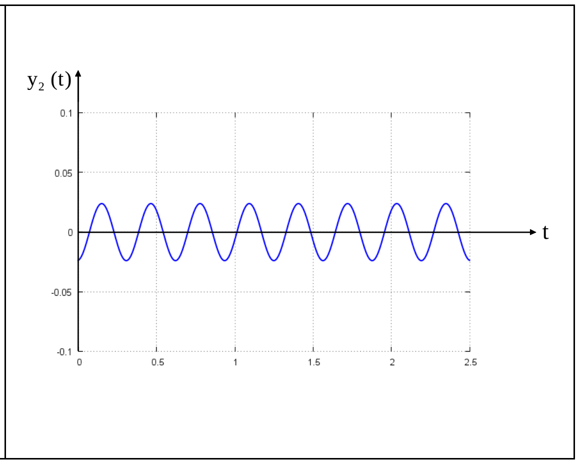




2η αρμονική: $2\omega_1 = 20$ r /s

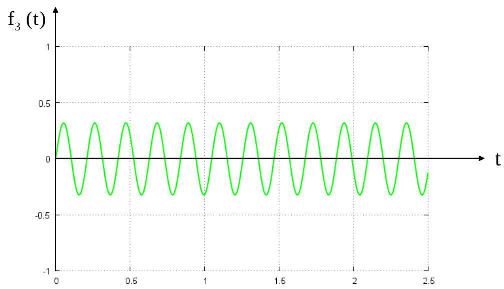
Διέγερση **Απόκριση**

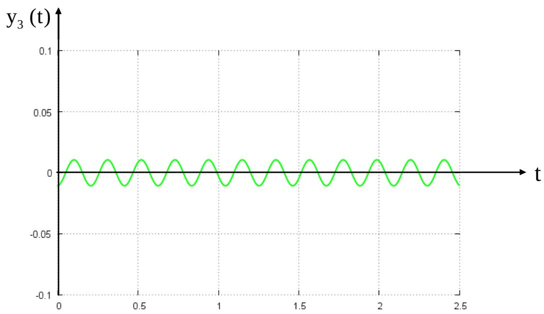




3η αρμονική: $3\omega_1 = 30$ r /s

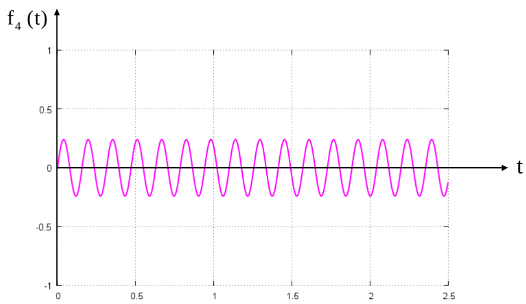
Διέγερση **Απόκριση**

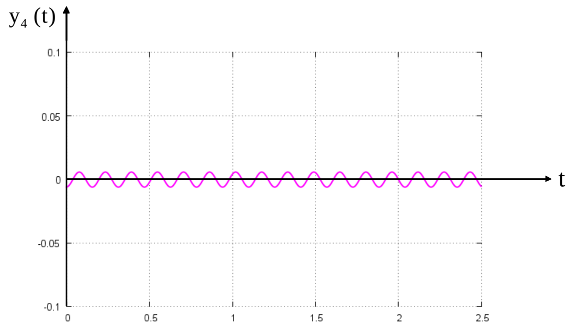




3η αρμονική: $4\omega_1 = 40$ r /s

Διέγερση **Απόκριση**

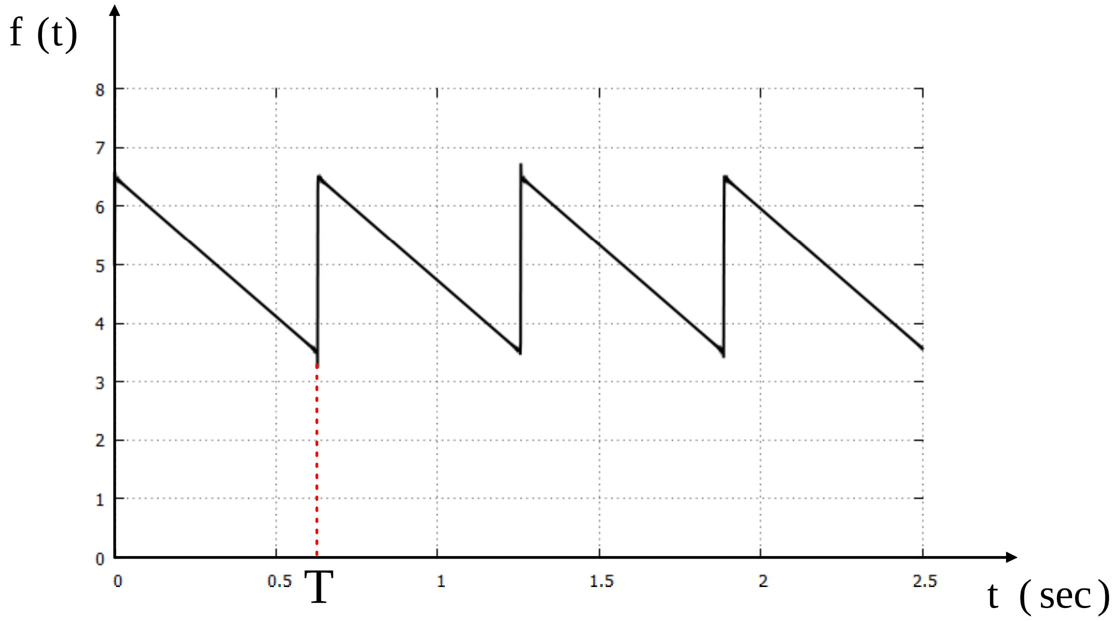




Στο τέλος φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις του σήματος εισόδου $f(t)$ **και του σήματος εξόδου** $y(t)$**. Εδώ το** $y(t)$ **έχει ληφθεί από το άθροισμα των αποκρίσεων που δίνουν οι 1000 πρώτες αρμονικές**

Δηλ. $y(t) = y_1(t) + y_2(t) + ... + y_{1000}(t)$

Διέγερση



Απόκριση