ΣΧΟΛΗ Ν. ΔΟΚΙΜΩΝ

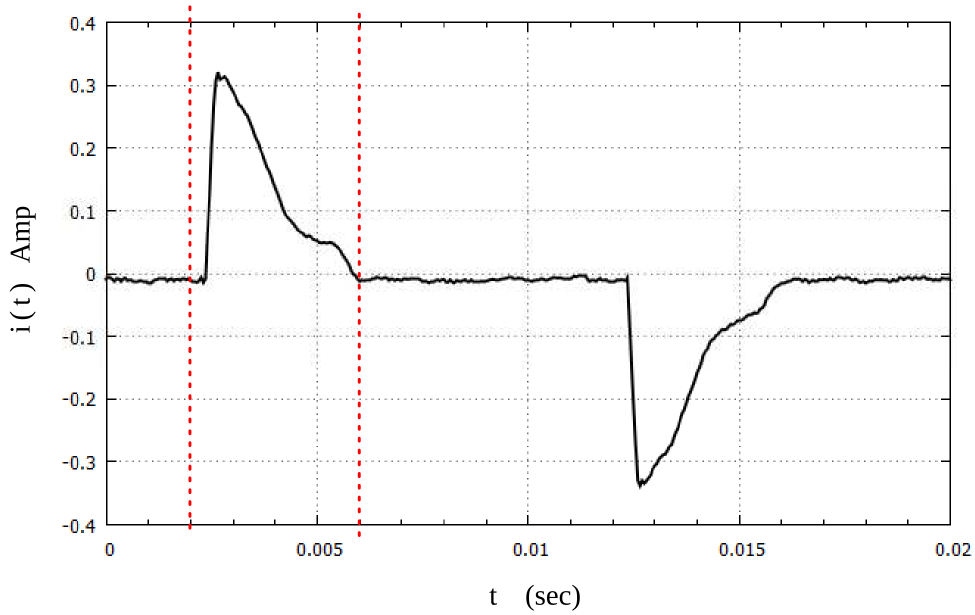
ΘΕΩΡΙΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ ΙΙ – Σ.Α.Ε.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΝΑΠΤΥΓΜΑΤΟΣ FOURIER ΜΕ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΤΡΟΠΟ

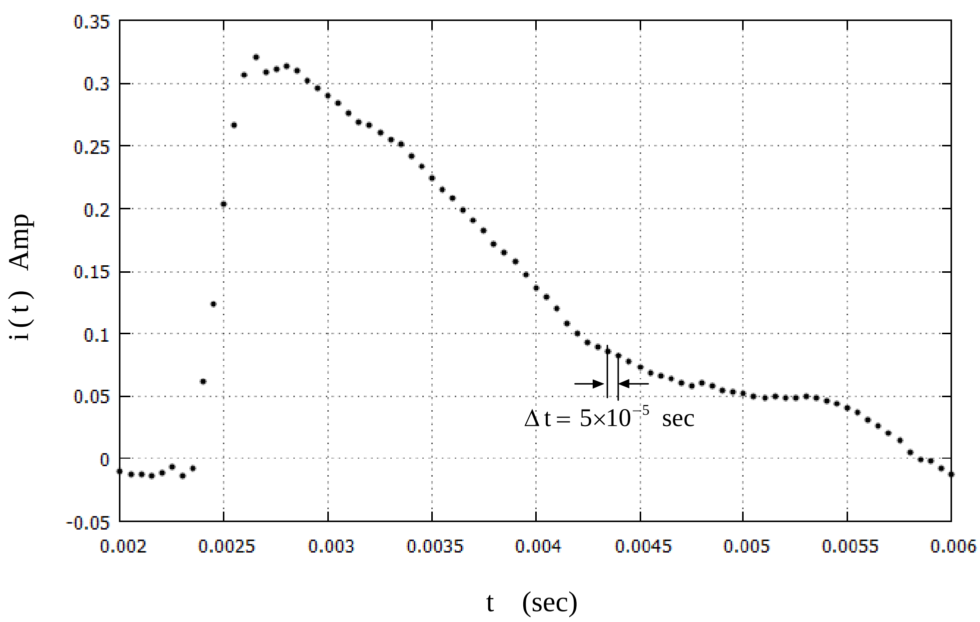
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2013

1) Αρχικό σήμα i (t)

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένα περιοδικό σήμα i (t) , το οποίο έχει ληφθεί από μέτρηση. Πρόκειται για το ρεύμα που διαρρέει έναν ηλεκτρονικό λαμπτήρα εξοικονόμησης ενέργειας ισχύος 20 W. Η καταγραφή του σήματος έγινε με χρήση ψηφιακού παλμογράφου και κατάλληλου σηματολήπτη ρεύματος (current probe).



Το σήμα έχει καταγραφεί για μία περίοδο T = 0.02 sec , άρα f_1 = 1 / T = 50 Hz και $\omega_1 = 2\pi f$ = 314.16 rad / sec. Έχουν ληφθεί στο χρονικό παράθυρο των 0.02 sec συνολικά N = 400 δείγματα. Παρότι το σήμα εδώ φαίνεται σαν συνεχές αν κάνουμε μια «μεγέθυνση» του σχήματος μεταξύ των τιμών t_1 = 0.002 sec και t_1 = 0.006 sec (μεταξύ των δύο κόκκινων γραμμών) θα φανούν τα δείγματα του σήματος (βλ. παρακάτω σχήμα)



Το διάστημα δειγματοληψίας Δt όπως φαίνεται είναι $\Delta t = T / N = 0.02 / 400 = 5\times10^{-5}$ sec.

2) Υπολογισμός αναπτύγματος Fourier του σήματος με αριθμητικό τρόπο

Το σήμα i (t) το γνωρίζουμε από τα δείγματά του δηλ. από ένα πίνακα τιμών. Παρακάτω παραθέτουμε ένα μικρό κομμάτι του αρχείου με τα δείγματα του σήματος.

αριθμός δείγματος k	**t_k (sec)**	**$i (t_k)$ (Amp)**
1	0.000000E+00	-8.342300E-03
2	5.000000E-05	-6.092300E-03
3	1.000000E-04	-6.092300E-03
4	1.500000E-04	-9.248550E-03
5	2.000000E-04	-1.206105E-02
6	2.500000E-04	-7.967300E-03
7	3.000000E-04	-8.154800E-03
8	3.500000E-04	-1.224855E-02
9	4.000000E-04	-8.154800E-03
10	4.500000E-04	-7.029800E-03
11	5.000000E-04	-1.112355E-02
12	5.500000E-04	-1.018605E-02
13	6.000000E-04	-9.967300E-03
14	6.500000E-04	-1.184230E-02
15	7.000000E-04	-1.184230E-02
16	7.500000E-04	-1.184230E-02
17	8.000000E-04	-1.074855E-02
18	8.500000E-04	-1.174855E-02
19	9.000000E-04	-1.384230E-02
20	9.500000E-04	-1.384230E-02
21	9.999999E-04	-1.484230E-02
22	1.050000E-03	-1.484230E-02
23	1.100000E-03	-1.196730E-02
24	1.150000E-03	-9.904800E-03
25	1.200000E-03	-9.686050E-03

…………………………………………

…………………………………………….

(συνεχίζεται μέχρι t_k = 0.02 sec)

Προφανώς **δεν διαθέτουμε** αναλυτική περιγραφή του σήματος.

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το ανάπτυγμα Fourier του σήματος σε μορφή **«A»**

$$i (t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [\, a_n \sin (n\, \omega_1 t) + b_n \cos (n\, \omega_1 t) \,]$$

δηλ. να υπολογίσουμε τους συντελεστές:

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T i (t)\, d t \quad , \qquad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T i (t) \sin (n\, \omega_1 t)\, dt \quad , \qquad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T i (t) \cos (n\, \omega_1 t)\, dt$$

θα μπορούσαμε εδώ να κάνουμε υπολογισμό των παραπάνω ολοκληρωμάτων με χρήση των απλών σχέσεων:

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)\,dt \approx \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{N} i(t_k)\,\Delta t \qquad (1)$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T i(t)\sin(n\,\omega_1\,t)\,dt \approx \frac{2}{T}\sum_{k=1}^{N} i(t_k)\sin(n\,\omega_1\,t_k)\,\Delta t \qquad (2) \quad \text{για } n = 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T i(t)\cos(n\,\omega_1\,t)\,dt \approx \frac{2}{T}\sum_{k=1}^{N} i(t_k)\cos(n\,\omega_1\,t_k)\,\Delta t \qquad (3) \quad \text{για } n = 1, 2, \ldots$$

Δηλαδή υπολογίζουμε προσεγγιστικά τα ολοκληρώματα ως αθροίσματα Riemman χρησιμοποιώντας ένα σχετικά μεγάλο αριθμό σημείων ($N = 400$) και με $\Delta t = 5\times 10^{-5}$ sec.

Ο τρόπος αυτός ,υπολογισμού των ολοκληρωμάτων, λέγεται αριθμητικός

Παρουσιάζει ενδιαφέρον ο υπολογισμός αυτός, καθώς και ο έλεγχος του αποτελέσματος που θα προκύψει.

Αρχικά υπολογίζουμε το c_0 που είναι και η μέση τιμή του σήματος. Παρατηρώντας το αρχικό σχήμα, φαίνεται ότι η μέση τιμή είναι ίση με το μηδέν (συμμετρία στο σήμα).

Παρ' όλα αυτά μια πιο προσεκτική παρατήρηση δείχνει μια ελαφρά μετατόπιση προς τις αρνητικές τιμές, άρα μια μικρή αρνητική τιμή του c_0 .

Πράγματι ο αριθμητικός υπολογισμός δίνει:

$$c_0 \approx \frac{1}{0.02}\sum_{k=1}^{N} i(t_k)\cdot 2\times 10^{-5} = -9.908925\times 10^{-3} \quad \text{Amp}$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τους συντελεστές a_n και b_n μέχρι , προφανώς , ένα πεπερασμένο αριθμό αρμονικών $N_h = 100$.

Από τις τιμές των a_n και b_n (μορφή «**A**») μπορούμε εύκολα να βρούμε τις αντίστοιχες τιμές των c_n και ϑ_n (μορφή «**B**») , από τους γνωστούς τύπους:

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \qquad \text{και} \qquad \vartheta_n = \tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι τιμές των μεγεθών a_n , b_n ,όπως υπολογίστηκαν από τις προσεγγιστικές σχέσεις (1) ,(2) και (3) για τις 30 πρώτες αρμονικές δηλ για $n = 0, 1, 2, \ldots, 30$. Κατόπιν στις δύο τελευταίες στήλες αναγράφονται οι τιμές των και c_n , ϑ_n όπως υπολογίζονται από τις τιμές των a_n και b_n

τάξη αρμονικης n	**συχνοτητα (Hz)**	a_n **(Amp)**	b_n **(Amp)**	c_n **(Amp)**	ϑ_n **(μοιρες)**
0				-.9089E-03	
1	50.	.9223E-01	.4590E-01	.1030E+00	26.45
2	100.	-.7028E-05	.7636E-03	.7636E-03	90.52
3	150.	-.9792E-02	-.7923E-01	.7983E-01	-97.04
4	200.	.8962E-03	.6421E-04	.8985E-03	4.10
5	250.	-.4616E-01	.2198E-01	.5112E-01	154.52
6	300.	-.5445E-03	.1445E-03	.5634E-03	165.12
7	350.	.1827E-01	.3224E- 01	.3705E-01	60.45
8	400.	-.3770E-03	.5137E-03	.6372E-03	126.26
9	450.	.2262E-01	-.1998E-01	.3018E-01	-41.45
10	500.	-.2401E-03	-.5603E-03	.6095E-03	-113.18
11	550.	-.1543E-01	-.1177E-01	.1941E-01	-142.65
12	600.	-.4661E-04	-.6546E-03	.6563E-03	-94.06
13	650.	-.1002E-01	.7743E-02	.1267E-01	142.30
14	700.	-.5496E-03	.5170E-03	.7545E-03	136.74
15	750.	.8065E-02	.1234E-01	.1474E-01	56.82
16	800.	.6272E-03	.6476E-04	.6305E-03	5.89
17	850.	.9417E-02	-.7335E-02	.1194E-01	-37.91
18	900.	-.3022E-03	-.1552E-03	.3397E-03	-152.80
19	950.	-.4941E-02	-.8721E-02	.1002E-01	-119.52
20	1000.	.3874E-03	-.5402E-03	.6647E-03	-54.35
21	1050.	-.8634E-02	.5539E-02	.1026E-01	147.30
22	1100.	.1876E-03	.1630E-03	.2485E-03	40.98
23	1150.	.5447E-02	.6761E-02	.8682E-02	51.14
24	1200.	-.5157E-03	-.1890E-03	.5493E-03	-159.86
25	1250.	.5720E-02	-.3323E-02	.6616E-02	-30.15
26	1300.	.9186E-04	-.1282E-03	.1577E-03	-54.38
27	1350.	-.3632E-02	-.6221E-02	.7204E-02	-120.26
28	1400.	.1331E-04	-.4991E-04	.5165E-04	-75.06
29	1450.	-.5261E-02	.3436E-02	.6283E-02	146.84
30	1500.	-.5285E-03	-.2250E-03	.5744E-03	-156.93

Με βάση τα δεδομένα του παραπάνω πίνακα το σήμα ρεύματος $i(t)$ μπορεί να γραφεί σε ανάπτυγμα Fourier , Μορφής «Β» ως εξής:

$$i(t) = -0.9089\times10^{-3} + 0.1030\sin(2\pi\,50\,t + 26.45^o) + 0.7636\times10^{-3}\sin(2\cdot2\pi\,50\,t + 90.52^o) +$$

$$+ 0.7938\times10^{-1}\sin(3\cdot2\pi\,50t - 97.04^o) + 0.8985\times10^{-3}\sin(4\cdot2\pi\,50\,t + 4.10^o) +$$

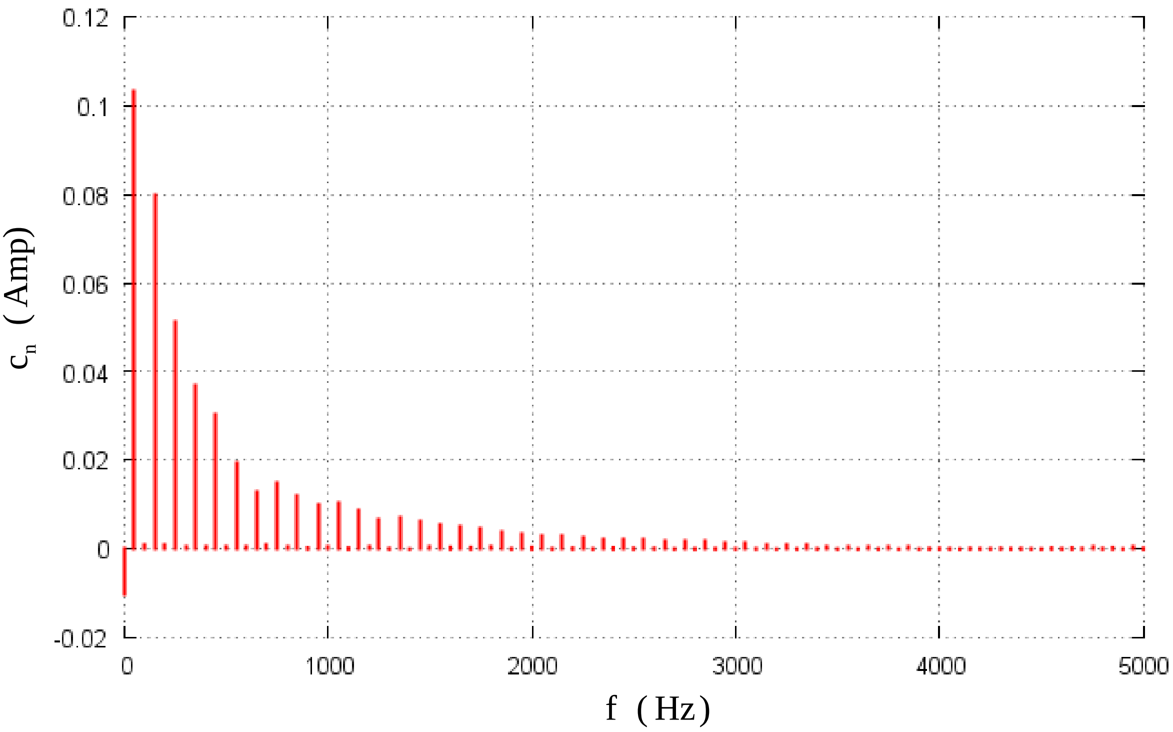
$$+ 0.5112\times10^{-1}\sin(5\cdot2\pi\,50t + 154.52^o) + 0.5634\times10^{-3}\sin(6\cdot2\pi\,50\,t + 165.12^o) + \ldots$$

Παρατηρώντας τα πλάτη των αρμονικών βλέπουμε ότι οι άρτιες αρμονικές (n = 2, 4 , 6 …) έχουν πλάτη 2 τάξεις μεγέθους μικρότερα από τα πλάτη των περιττών αρμονικών (n = 1 , 3 , 5 …) . Αυτό ουσιαστικά σημαίνει ότι το σήμα έχει, κύρια , περιττές αρμονικές .

Στο παρακάτω σχήμα έχει σχεδιαστεί το φάσμα πλάτους του σήματος. Στον οριζόντιο άξονα έχουμε την συχνότητα f σε Hz. Επειδή , στο διάγραμμα, φθάνουμε μέχρι τα 5000 Hz, αυτό σημαίνει ότι φθάνουμε μέχρι την 100η αρμονική , διότι η 1η αρμονική έχει συχνότητα $f_1 = 1 / T = 50$ Hz .

Παρατηρείστε ότι οι περιττές αρμονικές έχουν πολύ μεγαλύτερες τιμές από τις άρτιες.

Παρατηρείστε επίσης στο διάγραμμα, ότι , όπως προαναφέρθηκε η μέση τιμή c_0 έχει αρνητική τιμή.



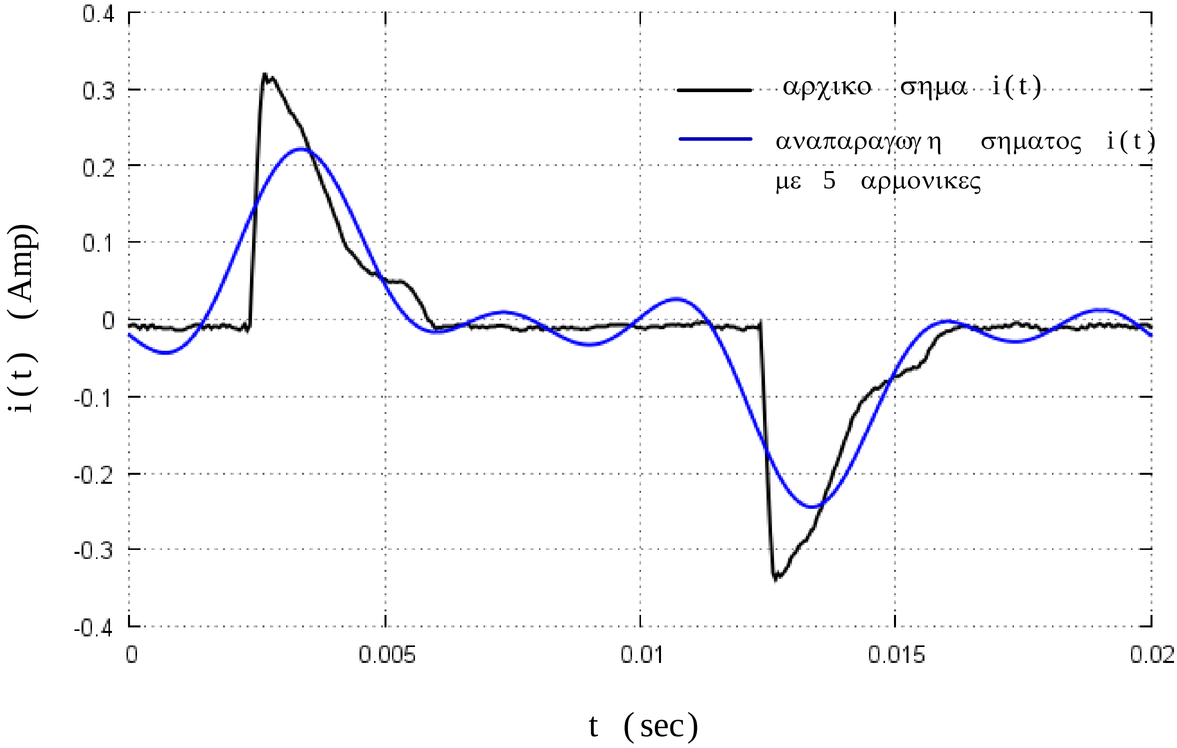
Φάσμα πλάτους του σήματος i (t)

3) Αναπαραγωγή του σήματος i (t) από τις αρμονικές του

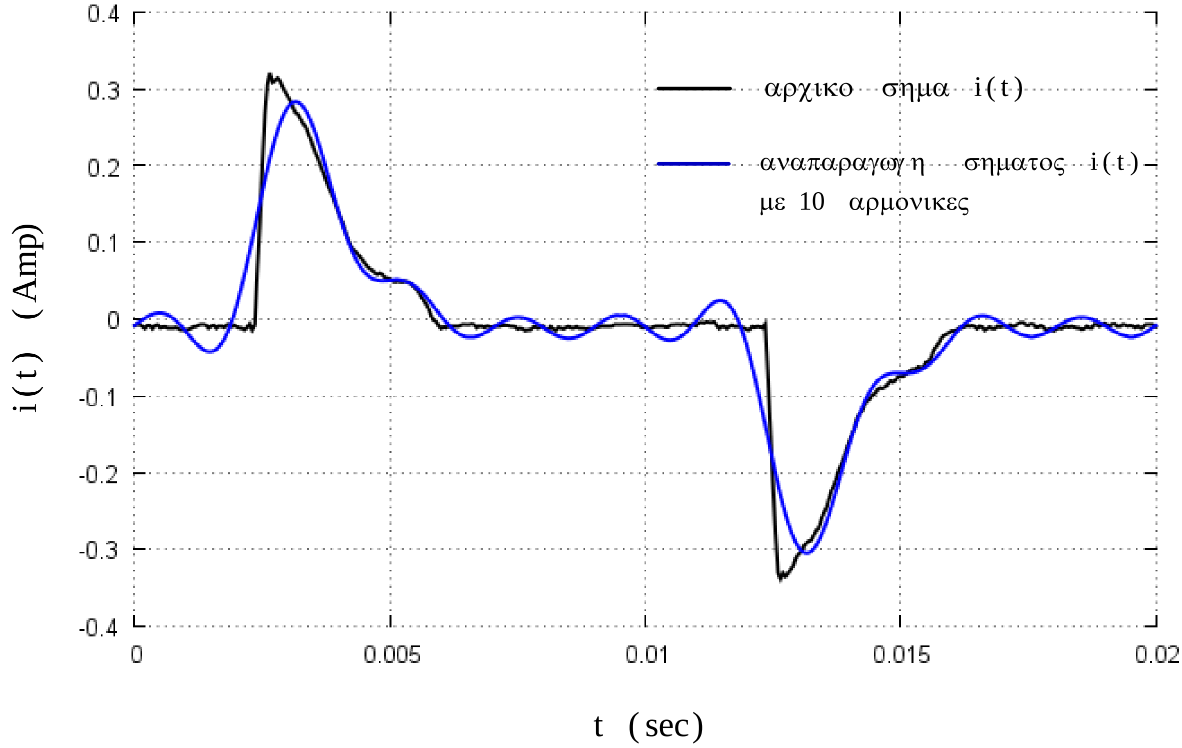
Παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον η ακόλουθη διαδικασία:

Εφ' όσον διαθέτουμε τα αναπτύγματα Fourier του σήματος, με αριθμητικό υπολογισμό των συντελεστών a_n , b_n , c_n , ϑ_n , να κάνουμε αναπαραγωγή του σήματος i (t) από τις αρμονικές του χρησιμοποιώντας , βέβαια, ένα πεπερασμένο αριθμό αρμονικών.

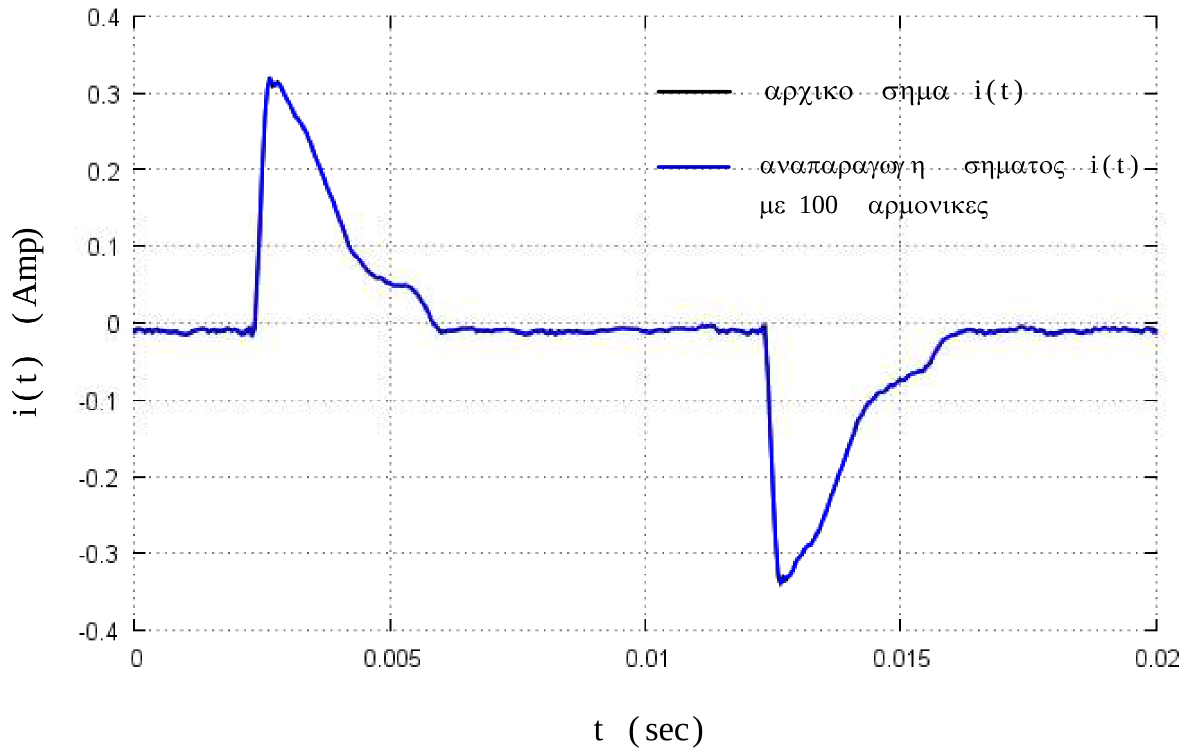
Παρακάτω ακολουθούν παραδείγματα:



Στο ανωτέρω σχήμα φαίνεται με μαύρο χρώμα το αρχικό σήμα i (t) και με μπλέ χρώμα η αναπαραγωγή του σήματος από το ανάπτυγμα Fourier χρησιμοποιώντας τις 5 πρώτες αρμονικές, δηλ για n = 0 έως 5. Υπάρχει μια αρκετά σημαντική διαφορά αλλά ας μην ξεχνάμε ότι χρησιμοποιήθηκε πολύ μικρός αριθμός αρμονικών



Στο ανωτέρω σχήμα φαίνεται με μαύρο χρώμα το αρχικό σήμα i (t) και με μπλέ χρώμα η αναπαραγωγή του σήματος από το ανάπτυγμα Fourier χρησιμοποιώντας τις 10 πρώτες αρμονικές, δηλ για n = 0 έως 10. Διαπιστώνεται σαφής βελτίωση της ακρίβειας



Στο ανωτέρω σχήμα φαίνεται με μαύρο χρώμα το αρχικό σήμα i (t) και με μπλέ χρώμα η αναπαραγωγή του σήματος από το ανάπτυγμα Fourier χρησιμοποιώντας τις 100 πρώτες αρμονικές, δηλ για n = 0 έως 100. Εδώ έχουμε πλήρη ταύτιση των δύο σημάτων και για τον λόγο αυτό δεν φαίνεται καθόλου ,επικαλύπτεται πλήρως , το αρχικό σήμα (μαύρη γραμμή).

4) Υπολογισμοί παραμέτρων του σήματος

Είδαμε λοιπόν στην προηγούμενη παράγραφο ότι, αν χρησιμοποιήσουμε, ένα σχετικά μεγάλο αριθμό αρμονικών ($N_h = 100$) μπορούμε να πετύχουμε άριστη περιγραφή του σήματος .

Ας δούμε τώρα πως μπορούμε να υπολογίσουμε διάφορες παραμέτρους του σήματος.

α) Ενεργός τιμή

Υπολογίζεται από την γνωστή σχέση: $i_{\varepsilon\nu} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,(\,t\,)\,d\,t}$

Επειδή, όπως προαναφέρθηκε, δεν διαθέτουμε αναλυτική περιγραφή του σήματος αλλά έναν πίνακα τιμών αυτού , θα γίνει προσεγγιστικός αριθμητικός υπολογισμός του ολοκληρώματος με χρήση της παρακάτω απλής σχέσης:

$$i_{\varepsilon\nu} \approx \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{k=1}^{N} i^2\,(\,t_k\,)\,\Delta t}$$

όπου $T = 0.02$ sec, $N = 400$, $\Delta t = 5\times 10^{-5}$ sec, και οι τιμές $i\,(\,t_k\,)$ δίνονται από πίνακα το αποτέλεσμα που θα πάρουμε είναι:

$$i_{\varepsilon\nu} \approx 0.1085365 \quad \text{Amp}$$

Μπορούμε εναλλακτικά να κάνουμε χρήση του τύπου του Parseval για τον υπολογισμό της ενεργού τιμής :

$$i_{\varepsilon\nu,\,\text{Parseval}} = \sqrt{c_0^2 + \left(\frac{c_1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{c_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \ldots}$$

όπου βέβαια, σε πρακτικό υπολογισμό, το άθροισμα κάπου πρέπει να σταματήσει .

Στην περίπτωσή μας επειδή διαθέτουμε τιμές των συντελεστών c_n για τις 100 πρώτες αρμονικές, μπορούμε να υπολογίσουμε αυτό το άθροισμα ακριβώς με αυτές τις τιμές. Το αποτέλεσμα θα είναι:

$$i_{\varepsilon\nu,\,\text{Parseval}} = \sqrt{c_0^2 + \sum_{n=1}^{100}\left(\frac{c_n}{\sqrt{2}}\right)^2} = 0.1087517 \quad \text{Amp}$$

Παρατηρείται εξαιρετική συμφωνία μεταξύ των δύο τιμών $i_{\varepsilon\nu}$ και $i_{\varepsilon\nu,\,\text{Parseval}}$

β) Υπόλοιπο αρμονικών R_2

Το υπόλοιπο αρμονικών R_2 μπορεί να υπολογιστεί από την σχέση:

$$R_2 = \sqrt{i_{\varepsilon\nu}^2 - c_0^2 - \left(\frac{c_1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

θέτοντας:
$i_{\varepsilon\nu} = 0.1085365$, $c_0 = -9.9089 \times 10^{-3}$ και $c_1 = 0.1030$ θα πάρουμε:

$$R_2 = 0.07986 \text{ Amp}$$

γ) Ολική αρμονική παραμόρφωση (THD %)

Έχουμε την σχέση ορισμού:

$$\text{THD}(\%) = \frac{R_2}{c_1/\sqrt{2}} \cdot 100\,\%$$

με αντικατάσταση τιμών θα πάρουμε:

$$\text{THD}(\%) = 109.65\,\%$$

τιμή πολύ μεγάλη, διότι η μορφή του σήματος (παλμική μορφή) απέχει πολύ από αυτήν ενός καθαρού ημιτόνου