ΣΧΟΛΗ. Ν. ΔΟΚΙΜΩΝ

ΜΑΘΗΜΑ: ΘΕΩΡΙΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ ΙΙ – ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ Σ.Α.Ε.

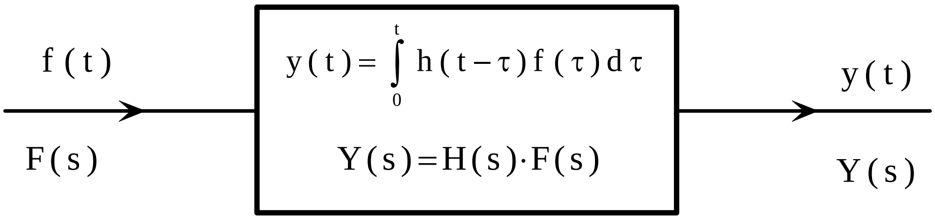
ΕΥΡΕΣΗ ΠΛΗΡΟΥΣ ΑΠΟΚΡΙΣΕΩΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΧΡΟΝΟΥ ΚΑΙ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΜΙΓΑΔΙΚΗΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

Δρ. Α. Μαγουλάς

Δεκέμβριος 2014

Ένα γραμμικό σύστημα έχει την ακόλουθη κρουστική απόκριση h (t) :

$$\mathbf{h(t) = 4e^{-t} + 2e^{-3t}}$$



Ζητούνται:

1) Η συνάρτηση μεταφοράς $\mathbf{H(s) = \dfrac{Y(s)}{F(s)}}$

2) Η Διαφορική Εξίσωση (Δ.Ε.) που συνδέει την διέγερση f (t) με την απόκριση y (t) , στο πεδίο του χρόνου.

Απ/

1) Η συνάρτηση μεταφοράς H (s) θα είναι , ως γνωστόν , ο μετασχηματισμός Laplace της κρουστικής απόκρισης h (t). Άρα:

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \mathcal{L}\{4e^{-t} + 2e^{-3t}\} = \mathcal{L}\{4e^{-t}\} + \mathcal{L}\{2e^{-3t}\} =$$

$$= \frac{4}{s+1} + \frac{2}{s+3} = \frac{4(s+3)+2(s+1)}{(s+1)(s+3)} = \frac{6s+14}{s^2+4s+3}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{6s+14}{s^2+4s+3} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

2) Η Διαφορική Εξίσωση θα γράφεται:

$$\frac{y(t)}{f(t)} = \frac{B(D)}{A(D)} = \frac{6D+14}{D^2+4D+3}$$

άρα $$A(D)\,y(t) = B(D)\,f(t)$$

ή $$(D^2+4D+3)\,y(t) = (6D+14)\,f(t)$$

3) Να βρεθεί η πλήρης απόκριση $y(t)$ του συστήματος (μόνιμη και μεταβατική) , στο σήμα εισόδου $f(t) = 1 - e^{-\frac{1}{2}t}$ Αρχικές συνθήκες: $y(0^+) = 0$, $D\,y(0^+) = 0$.

Απ/ **Το ερώτημα αυτό θα απαντηθεί με 3 διαφορετικούς τρόπους**

<u>α' τρόπος :</u> Με χρήση του μετασχηματισμού Laplace

Δηλαδή $Y(s) = H(s)F(s)$ και $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$.

Άρα:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{1 - e^{-\frac{1}{2}t}\} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{2}} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+0.5}$$

$$Y(s) = H(s)F(s) = \frac{6s+14}{s^2+4s+3}\cdot\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+0.5}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{6s+14}{s^3+4s^2+3s} - \frac{6s+14}{s^3+4s^2+3s+0.5s^2+2s+1.5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{6s+14}{s^3+4s^2+3s} - \frac{6s+14}{s^3+4.5s^2+5s+1.5} = \frac{P_1(s)}{Q_1(s)} - \frac{P_2(s)}{Q_2(s)}$$

όπου:

$$\frac{P_1(s)}{Q_1(s)} = \frac{6s+14}{s^3+4s^2+3s} \quad \text{και} \quad \frac{P_2(s)}{Q_2(s)} = \frac{6s+14}{s^3+4.5s^2+5s+1.5}$$

θα υπολογίσουμε τα:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P_1(s)}{Q_1(s)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s+14}{s^3+4s^2+3s}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P_2(s)}{Q_2(s)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s+14}{s^3+4.5s^2+5s+1.5}\right\}$$

$P_1(s) = 6s + 14$

$Q_1(s) = s^3 + 4s^2 + 3s$, ρίζες $s_1 = 0$, $s_2 = -1$, $s_3 = -3$

$Q_1'(s) = 3s^2 + 8s + 3$

Άρα:

$$\frac{P_1(s)}{Q_1(s)} = \frac{6s+14}{s^3+4s^2+3s} = \frac{P_1(s_1)}{Q_1'(s_1)} \cdot \frac{1}{s-s_1} + \frac{P_1(s_2)}{Q_1'(s_2)} \cdot \frac{1}{s-s_2} + \frac{P_1(s_3)}{Q_1'(s_3)} \cdot \frac{1}{s-s_3}$$

ή

$$\frac{P_1(s)}{Q_1(s)} = \frac{14}{3} \cdot \frac{1}{s} + \frac{8}{-2} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{-4}{6} \cdot \frac{1}{s+3}$$

άρα:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P_1(s)}{Q_1(s)}\right\} = y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{14}{3} \cdot \frac{1}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8}{-2} \cdot \frac{1}{s+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-4}{6} \cdot \frac{1}{s+3}\right\}$$

Συνεπώς $$y_1(t) = \frac{14}{3} \cdot u(t) - 4e^{-t} - \frac{2}{3} e^{-3t}$$

$P_2(s) = 6s + 14$

$Q_2(s) = s^3 + 4.5s^2 + 5s + 1.5$, ρίζες $s_1 = -1$, $s_2 = -3$, $s_3 = -0.5$ ***(γιατί;)***

$Q_2'(s) = 3s^2 + 9s + 5$

Άρα:

$$\frac{P_2(s)}{Q_2(s)} = \frac{6s+14}{s^3+4.5s^2+5s+1.5} = \frac{P_2(s_1)}{Q_2'(s_1)} \cdot \frac{1}{s-s_1} + \frac{P_2(s_2)}{Q_2'(s_2)} \cdot \frac{1}{s-s_2} + \frac{P_2(s_3)}{Q_2'(s_3)} \cdot \frac{1}{s-s_3}$$

ή

$$\frac{P_2(s)}{Q_2(s)} = \frac{8}{-1} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{-4}{5} \cdot \frac{1}{s+3} + \frac{11}{5/4} \cdot \frac{1}{s+0.5}$$

άρα:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P_2(s)}{Q_2(s)}\right\} = y_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8}{-1} \cdot \frac{1}{s+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-4}{5} \cdot \frac{1}{s+3}\right\} +$$

$$+ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{44}{5} \cdot \frac{1}{s+0.5}\right\}$$

Συνεπώς $$y_2(t) = -8e^{-t} - \frac{4}{5} e^{-3t} + \frac{44}{5} e^{-0.5t}$$

Άρα τελικά θα πάρουμε

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P_1(s)}{Q_1(s)}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P_2(s)}{Q_2(s)}\right\} = y_1(t) - y_2(t) =$$

$$= \frac{14}{3}\cdot u(t) - 4e^{-t} - \frac{2}{3}e^{-3t} - \left(-8e^{-t} - \frac{4}{5}e^{-3t} + \frac{44}{5}e^{-0.5t}\right)$$

ή

$$\boxed{y(t) = \frac{14}{3}\cdot u(t) + 4e^{-t} + \frac{2}{15}e^{-3t} - \frac{44}{5}e^{-0.5t}}$$

<u>β' τρόπος :</u> Με επίλυση της Δ.Ε. με Α.Σ. **:** $y(0^+) = 0$, $Dy(0^+) = 0$

Δ.Ε. $(D^2 + 4D + 3)\,y(t) = (6D + 14)\,f(t)$

Α.Σ. $y(0^+) = 0$, $Dy(0^+) = 0$

Η Δ.Ε. γράφεται $(D^2 + 4D + 3)\,y(t) = (6D + 14)\left(1 - e^{-\frac{1}{2}t}\right) = -11e^{-\frac{1}{2}t} + 14$

χαρακτηριστική εξίσωση $s^2 + 4s + 3 = 0$ με ρίζες $s_1 = -1$, $s_2 = -3$

άρα $y_{ομογ}(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}$

αναζητούμε μια μερική λύση

θα είναι της μορφής $y_{μερ}(t) = k_1 + k_2 e^{-\frac{1}{2}t}$ (γιατί;)

άρα: $D\,y_{μερ}(t) = -\frac{1}{2}k_2\, e^{-\frac{1}{2}t}$ και $D^2\,y_{μερ}(t) = \frac{1}{4}k_2\, e^{-\frac{1}{2}t}$

αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των $y_{μερ}(t)$, $D\,y_{μερ}(t)$ και $D^2\,y_{μερ}(t)$ στην Δ.Ε

$$(D^2 + 4D + 3)\,y_{μερ}(t) = -11e^{-\frac{1}{2}t} + 14$$

θα πάρουμε:

$$\frac{1}{4}k_2\, e^{-\frac{1}{2}t} - 2k_2\, e^{-\frac{1}{2}t} + 3k_1 + 3k_2 e^{-\frac{1}{2}t} = -11e^{-\frac{1}{2}t} + 14$$

άρα $$e^{-\frac{1}{2}t}\left(\frac{1}{4}k_2 - 2k_2 + 3k_2\right) + 3k_1 = -11e^{-\frac{1}{2}t} + 14$$

συνεπώς $$\frac{5}{4}k_2 = -11, \qquad 3k_1 = 14$$

και τελικά $$k_1 = \frac{14}{3}, \qquad k_2 = -\frac{44}{5}$$

άρα $$y_{μερ}(t) = \frac{14}{3} - \frac{44}{5}e^{-\frac{1}{2}t}$$

συνεπώς $$y(t) = y_{ομογ}(t) + y_{μερ}(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t} + \frac{14}{3} - \frac{44}{5}e^{-\frac{1}{2}t}$$

οι τιμές των δύο σταθερών C_1 και C_2, θα βρεθούν από τις Α.Σ

$y(0^+) = 0$ άρα $C_1 + C_2 + \frac{14}{3} - \frac{44}{5} = 0$

$Dy(0^+) = 0$ άρα $-C_1 - 3C_2 + \frac{44}{10} = 0$

από τη λύση του συστήματος προκύπτουν οι τιμές $C_1 = 4$, $C_2 = \frac{2}{15}$

άρα η λύση (για $t > 0$) είναι :

$$\boxed{y(t) = 4e^{-t} + \frac{2}{15}e^{-3t} + \frac{14}{3} - \frac{44}{5}e^{-\frac{1}{2}t}}$$

ακριβώς η ίδια με την λύση που δίνει η εφαρμογή μετασχ. Laplace

<u>**γ' τρόπος :**</u> Με χρήση του ολοκληρώματος της συνελίξεως. Δηλαδή:

$$y(t) = \int_0^t f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

όπου $f(t) = 1 - e^{-\frac{1}{2}t}$ η διέγερση

και $h(t) = 4e^{-t} + 2e^{-3t}$ η κρουστική απόκριση

άρα το ολοκλήρωμα της συνέλιξης γράφεται:

$$y(t) = \int_0^t \left(1 - e^{-\frac{1}{2}\tau}\right)\left(4e^{-(t-\tau)} + 2e^{-3(t-\tau)}\right) d\tau$$

επομένως:

$$y(t) = \int_0^t 4e^{-(t-\tau)}\,d\tau + \int_0^t 2e^{-3(t-\tau)})\,d\tau - \int_0^t 4e^{-\frac{1}{2}\tau} e^{-(t-\tau)}\,d\tau - \int_0^t 2e^{-\frac{1}{2}\tau} e^{-3(t-\tau)}\,d\tau$$

$$= 4e^{-t}\int_0^t e^{\tau}\,d\tau + 2e^{-3t}\int_0^t e^{3\tau}\,d\tau - 4e^{-t}\int_0^t e^{\frac{1}{2}\tau}\,d\tau - 2e^{-3t}\int_0^t e^{\frac{5}{2}\tau}\,d\tau$$

άρα

$$y(t) = 4e^{-t}\left[e^{\tau}\right]_0^t + 2e^{-3t}\left[\frac{1}{3}e^{3\tau}\right]_0^t - 4e^{-t}\left[2e^{\frac{1}{2}\tau}\right]_0^t - 2e^{-3t}\left[\frac{2}{5}e^{\frac{5}{2}\tau}\right]_0^t$$

$$y(t) = 4e^{-t}(e^{t}-1) + 2e^{-3t}\left(\frac{1}{3}e^{3t} - \frac{1}{3}\right) - 4e^{-t}\left(2e^{\frac{1}{2}t} - 2\right) - 2e^{-3t}\left(\frac{2}{5}e^{\frac{5}{2}t} - \frac{2}{5}\right)$$

$$y(t) = 4 - 4e^{t} + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}e^{-3t} - 8e^{-\frac{1}{2}t} + 8e^{-t} - \frac{4}{5}e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{4}{5}e^{-3t}$$

άρα τελικά: (για $t > 0$ πάντοτε)

$$\boxed{y(t) = \frac{14}{3} + 4e^{-t} + \frac{2}{15}e^{-3t} - \frac{44}{5}e^{-\frac{1}{2}t}}$$

προκύπτει και πάλι η ίδια ακριβώς λύση

Παρατήρηση:

Αντί για το ολοκλήρωμα $y(t) = \int_0^t f(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$ *θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί και το ισοδύναμο* $y(t) = \int_0^t f(t-\tau)\,h(\tau)\,d\tau$ *που δίνει προφανώς το ίδιο αποτέλεσμα.*

Αφήνεται στον αναγνώστη η σχετική επαλήθευση.