ΣΧΟΛΗ. Ν. ΔΟΚΙΜΩΝ

ΜΑΘΗΜΑ: ΘΕΩΡΙΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ ΙΙ – ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ Σ.Α.Ε.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΑΠΟΚΡΙΣΕΩΝ ΣΕ ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ

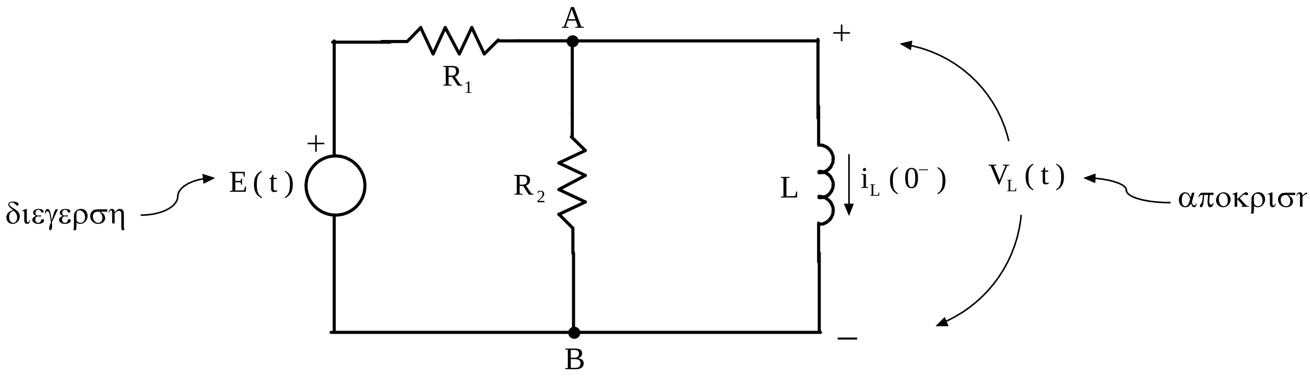
(Συμπλήρωμα στα παραδείγματα που υπάρχουν στο Εγχειρίδιο του Μαθήματος)

Δρ. Α. Μαγουλάς

Οκτώβριος 2014

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1
Δίδεται το ακόλουθο δίκτυο

Θεωρούνται γνωστά τα μεγέθη: R_1, R_2, L, $i_L(0^-)$ και επίσης η συνάρτηση E (t) της πηγής είναι φραγμένη. Διέγερση θεωρείται η τάση E (t) και απόκριση η τάση $V_L(t)$ του πηνίου.

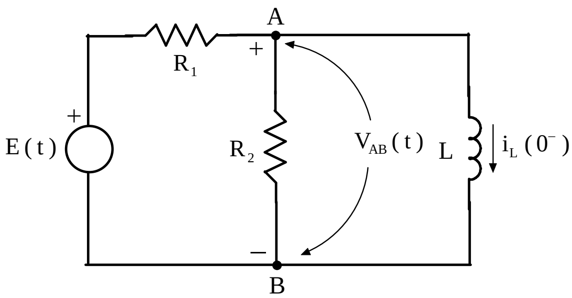


1) Να βρεθεί η Διαφορική Εξίσωση (Δ.Ε.) που συνδέει την διέγερση με την απόκριση και η Αρχική Συνθήκη (Α.Σ.) που την συνοδεύει.

Απ. / Προφανώς η ζητούμενη Δ.Ε. θα είναι $1^{ης}$ τάξεως , διότι έχουμε ένα μόνο «δυναμικό» στοιχείο, το πηνίο L.
Επίσης επειδή E (t) φραγμένη συμπεραίνουμε οτι ισχύει:

$$i_L(0^-) = i_L(0^+)$$

Για να βρούμε την ζητούμενη Δ.Ε. μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεωρ. Millman στα σημεία **Α- Β** διότι $V_{AB} = V_L$



$$V_{AB}(t) = V_L(t) = \frac{E(t)\dfrac{1}{R_1}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{LD}} = \frac{\dfrac{E(t)}{R_1}}{\dfrac{R_2\,LD + R_1\,LD + R_1R_2}{R_1\,R_2\,LD}} = \frac{R_2\,LD\,E(t)}{(R_1 + R_2)\,LD + R_1\,R_2}$$

άρα η ζητούμενη Δ.Ε. είναι:

$$\boxed{[\,(R_1 + R_2)\,LD + R_1\,R_2\,]\,V_L(t) = R_2\,LD\,E(t)}$$

Παρακάτω υπολογίζουμε την Αρχική Συνθήκη (Α.Σ.) $V_L(0^+)$

Όπως έχει αναφερθεί η σταθερή τιμή $V_L(0^+)$ θα υπολογιστεί συναρτήσει γνωστών σταθερών τιμών διαφόρων μεγεθών του δικτύου για $t = 0^+$ πάντοτε.

Τέτοια μεγέθη είναι:

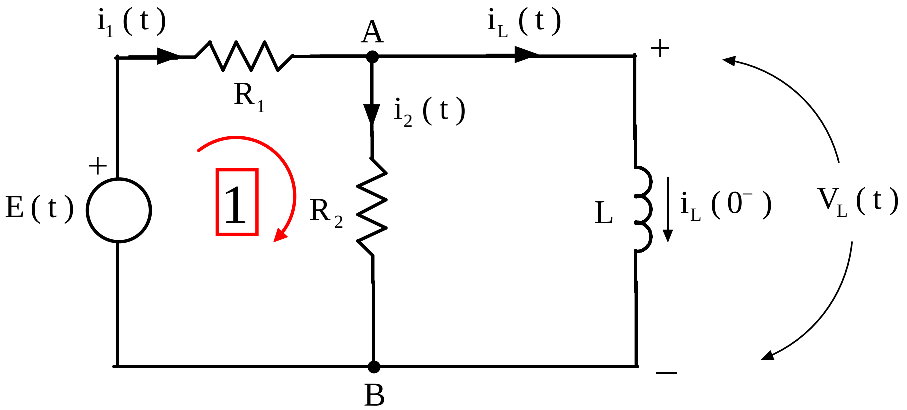
- Ρεύματα πηνίων $i_L(0^+)$
- Τάσεις πυκνωτών $V_C(0^+)$
- Τάσεις πηγών $E(0^+)$ ή παραγώγων τους (π.χ. $DE(0^+)$)

Αυτά τα μεγέθη είναι γνωστά για $t = 0^+$

Πώς εργαζόμαστε για την εύρεση των Α.Σ.;

- Χρησιμοποιούμε σχέσεις τάσεως – ρεύματος των ηλεκτρικών στοιχείων και κανόνες Kirchhoff προσπαθώντας να εκφράσουμε τα άγνωστα μεγέθη συναρτήσει των γνωστών.

Η διαδικασία αυτή σε μερικές περιπτώσεις μπορεί να απαιτεί αρκετή εμπειρία
Επιστρέφουμε τώρα στο παράδειγμά μας



Θέτουμε σε όλους τους κλάδους ρεύματα με δικής μας επιλογής φορές αναφοράς.
Παρατηρούμε ότι:

$$V_{AB}(t) = R_2\, i_2(t) = V_L(t)$$

Άρα αν βρούμε το $i_2(t)$ για $t = 0^+$ έχουμε βρει και το $V_L(0^+)$ που ζητάμε.
Γράφουμε τον Ν.Ρ.Κ. στον κόμβο **Α**

Ν.Ρ.Κ. Α $\quad i_1(t) - i_2(t) - i_L(t) = 0$

καί για $t = 0^+$ $\quad i_1(0^+) - i_2(0^+) - i_L(0^+) = 0$

εδώ οι τιμές $i_1(0^+)$, $i_2(0^+)$ είναι **άγνωστες** ενώ η τιμή $i_L(0^+)$ είναι **γνωστή**
Προσπαθούμε να βρούμε και μια δεύτερη σχέση μεταξύ των $i_1(0^+)$, $i_2(0^+)$ (ανεξάρτητη φυσικά!)
Ο Ν.Τ.Κ. στον βρόχο $\boxed{1}$ γράφεται (για $t = 0^+$)

$$-E(0^+) + i_1(0^+)R_1 + i_2(0^+)R_2 = 0$$

όπου εδώ το $E(0^+)$ θεωρείται γνωστή τιμή (είναι η τάση της πηγής, η οποία δίδεται, για $t = 0^+$)

Συνοψίζουμε:
1^{η} σχέση: $i_1(0^+) - i_2(0^+) = i_L(0^+)$

2^{η} σχέση: $i_1(0^+)R_1 + i_2(0^+)R_2 = E(0^+)$

Έτσι έχουμε 2 **ανεξάρτητες** σχέσεις με δύο άγνωστα μεγέθη, τα $i_1(0^+)$, $i_2(0^+)$. Φυσικά εμάς μας ενδιαφέρει μόνον το $i_2(0^+)$ διότι , όπως προαναφέρθηκε, ισχύει

$$R_2 i_2(0^+) = V_L(0^+)$$

από το σύστημα 2 εξισώσεων στο οποίο καταλήξαμε εύκολα θα προκύψει ότι:

$$i_2(0^+) = \frac{E(0^+) - R_1 i_L(0^+)}{R_1 + R_2}$$

άρα η ζητούμενη αρχική συνθήκη θα είναι:

$$V_L(0^+) = R_2 i_2(0^+)$$

ή

$$\boxed{V_L(0^+) = \frac{R_2 E(0^+) - R_1 R_2 i_L(0^+)}{R_1 + R_2}}$$

2) Θεωρείστε τιμές $R_1 = 8\,\Omega$, $R_2 = 2\,\Omega$, $L = 1$ H
- Να βρεθεί η βηματική απόκριση του δικτύου.

Απ. / Εφ' όσον μας ζητείται βηματική απόκριση αυτό σημαίνει ότι:

- Η πηγή $E(t)$ θα είναι $E(t) = u(t)$ (μοναδιαία βηματική συνάρτηση)
- Η αρχική κατάσταση $i_L(0^-) = 0$ εξ' ορισμού.

άρα: $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$

και $E(0^+) = u(0^+) = 1$

αντικαθιστούμε και τις τιμές των στοιχείων R_1, R_2, L στις εκφράσεις των Δ.Ε. και Α.Σ και έχουμε:

Δ.Ε. : $[(R_1 + R_2)LD + R_1 R_2]V_L(t) = R_2 LD\,E(t)$

άρα $[10D + 16]V_L(t) = 2D\,u(t)$

Α. Σ. : $V_L(0^+) = \dfrac{R_2 E(0^+) - R_1 R_2 i_L(0^+)}{R_1 + R_2}$

άρα: $V_L(0^+) = \dfrac{2}{10}$ Volts

για **t > 0** (όπου υπολογίζεται η απόκριση) έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} &[\,10\,D + 16\,]\,V_L(t) = 2\,D\,u(t) = 2\,\delta(t) = 0 \\ &V_L(0^+) = \frac{2}{10} \quad \text{Volts} \end{aligned}\right\}$$

(διότι παράγωγος της βηματικής $u(t)$, που είναι η κρουστική $\delta(t)$, έχει μηδενική τιμή για $t > 0$)

Εύκολα επιλύεται η παραπάνω ομογενής Δ.Ε 1^{ης} τάξεως

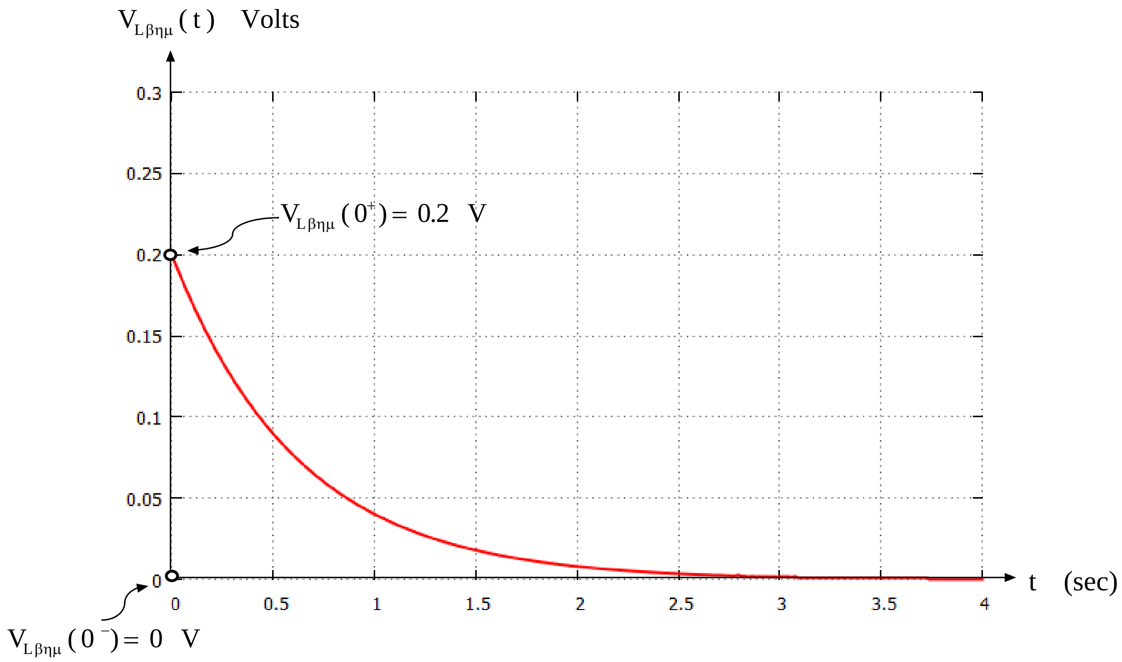
χαρακτ. εξίσωση $10\,s + 16 = 0$ ρίζα $s_1 = -\dfrac{16}{10}$

άρα $V_L(t) = C\,e^{-\frac{16}{10}t}$

και από Α.Σ. $V_L(0^+) = \dfrac{2}{10}$ προκύπτει αμέσως $C = \dfrac{2}{10}$

άρα τελικά $\boxed{V_{L\beta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\eta}(t) = \dfrac{2}{10}\,e^{-\frac{16}{10}t}}$

γραφική παράσταση:

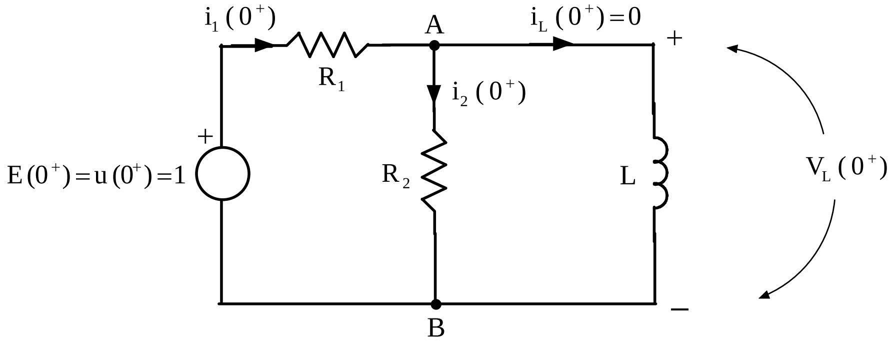


Παρατηρείστε ότι $V_L(0^-) = 0$ Volts (γιατί;) , $V_L(0^+) = \dfrac{2}{10}$ Volts, η $V_L(t)$ ασυνεχής για $t = 0$.

Σχόλια:

i) Το γεγονός ότι **η τάση** του πηνίου δεν είναι συνεχής για t = 0 ΔΕΝ αποτελεί πρόβλημα, διότι ως γνωστόν **το ρεύμα** του πηνίου είναι συνεχής συνάρτηση.

i i) Παρατηρείστε το κύκλωμα για **$t = 0^+$**



Στον κόμβο **A** $\quad i_1(0^+) - i_2(0^+) - i_L(0^+) = 0$

αλλά αυστηρά ισχύει $\quad i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$

άρα $\quad i_1(0^+) - i_2(0^+) = 0$ ή $i_1(0^+) = i_2(0^+)$

δηλαδή σαν να είναι συνδεδεμένες εν σειρά οι αντιστάσεις R_1 και R_2. **(ΠΡΟΣΟΧΗ!!! μιλάμε πάντα για $t = 0^+$ και μόνο)**

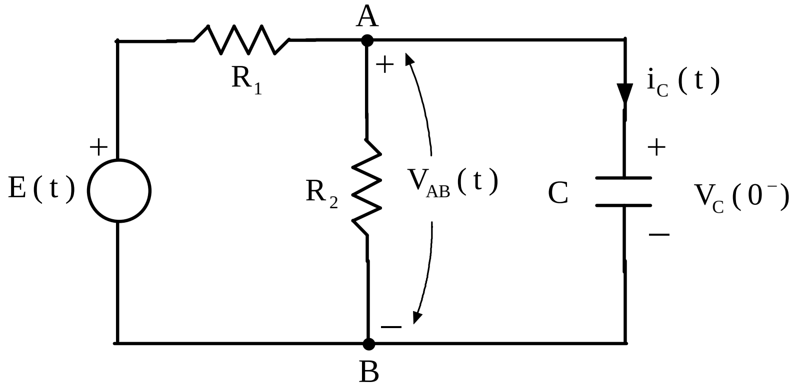
Με απλή εφαρμογή του διαιρέτη τάσεως προκύπτει αμέσως:

$$V_L(0^+) = V_{AB}(0^+) = u(0^+)\frac{R_2}{R_1+R_2} = 1\cdot\frac{2}{8+2} = \frac{2}{10} \text{ Volt}$$

Εδώ «βγάλαμε» την Α.Σ με καθαρά κυκλωματικό τρόπο!

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2</u>

Δίδεται το ακόλουθο δίκτυο



Θεωρούνται γνωστά τα μεγέθη: R_1, R_2, C, $V_C(0^-)$ και επίσης η συνάρτηση $E(t)$ της πηγής είναι φραγμένη. Διέγερση θεωρείται η τάση $E(t)$ και απόκριση το ρεύμα $i_C(t)$.

1) Να βρεθεί η Διαφορική Εξίσωση (Δ.Ε.) που συνδέει την διέγερση με την απόκριση και η Αρχική Συνθήκη (Α.Σ.) που την συνοδεύει.

Απ/ Προφανώς $V_C(t) = V_{AB}(t)$. Εφαρμόζουμε Θεωρ. Millman στα σημεία **Α-Β.**

$$V_C(t) = \frac{E(t)\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{\frac{1}{CD}}} = \frac{E(t)\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+CD} = \frac{\frac{E(t)}{R_1}}{\frac{R_2+R_1+R_1R_2\,CD}{R_1R_2}}$$

ή

$$V_C(t) = \frac{R_2\,E(t)}{R_1R_2CD+R_1+R_2}$$

για να βρούμε την ζητούμενη Δ.Ε. χρησιμοποιούμε και τη σχέση τάσεως –ρεύματος για τον πυκνωτή $i_C(t) = CD\,V_C(t)$

άρα:

$$i_C(t) = CDV_C(t) = \frac{CD\,R_2\,E(t)}{R_1R_2CD+R_1+R_2}$$

Οπότε η ζητούμενη Δ.Ε. θα είναι:

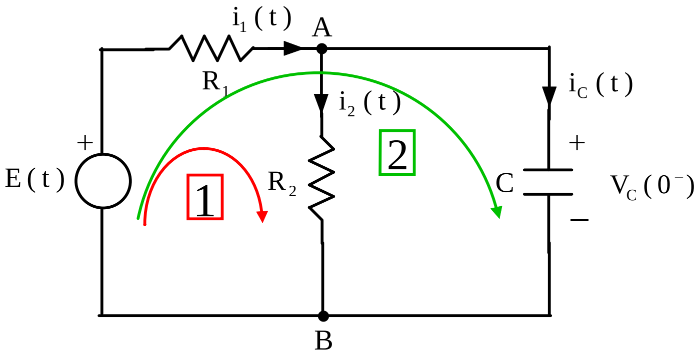
$$\boxed{[\,R_1R_2CD+R_1+R_2\,]\,i_C(t) = CD\,R_2\,E(t)}$$

Παρατηρήστε την δυαδικότητα της εξίσωσης αυτής με την εξίσωση του προηγούμενου παραδείγματος όπου $L \leftrightarrow C$ και $V_L \leftrightarrow i_C$

Υπολογίζουμε την Α.Σ. $i_C(0^+)$

Προφανώς θα ισχύει $V_C(0^-) = V_C(0^+)$ (γιατί;)

Έχουμε το δίκτυο:



Ν. Ρ. Κ. Α $i_1(t) - i_2(t) - i_C(t) = 0$

καί για $t = 0^+$ $i_C(0^+) = i_1(0^+) - i_2(0^+)$

ψάχνουμε για τις τιμές των $i_1(t)$, $i_2(t)$ για $t = 0^+$

Ν.Τ.Κ. $\boxed{1}$ (για $t = 0^+$) $E(0^+) = i_1(0^+)R_1 + i_2(0^+)R_2$

Ν.Τ.Κ. $\boxed{2}$ (για $t = 0^+$) $E(0^+) = i_1(0^+)R_1 + V_C(0^+)$

Αυτές είναι δύο ανεξάρτητες σχέσεις που θα μας δώσουν τις τιμές των $i_1(0^+)$, $i_2(0^+)$

Έχουμε το σύστημα (2 Χ 2)

$$\begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ R_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1(0^+) \\ i_2(0^+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(0^+) \\ E(0^+) - V_C(0^+) \end{bmatrix}$$

λύση: $$i_1(0^+) = \frac{E(0^+) - V_C(0^+)}{R_1}, \quad i_2(0^+) = \frac{V_C(0^+)}{R_2}$$

και επειδή , όπως προαναφέρθηκε , $i_C(0^+) = i_1(0^+) - i_2(0^+)$
η ζητούμενη Α.Σ. θα είναι:

$$\boxed{i_C(0^+) = \frac{E(0^+) - V_C(0^+)}{R_1} - \frac{V_C(0^+)}{R_2}}$$

2) Θεωρείστε τιμές $R_1 = 1\,\Omega$, $R_2 = 2\,\Omega$, $C = 0.5$ F, $V_C(0^-) = 4$ Volts και

$E(t) = 2\sin(12t + \frac{\pi}{6})$ Volts

Ζητείται να υπολογιστεί η πλήρης απόκριση του δικτύου.

Απ / Αντικαθιστούμε τιμές και θα έχουμε

Δ.Ε. $$(D + 3)\ i_C(t) = D\left(2 \sin \left(12 t + \frac{\pi}{6}\right) \right)$$

ή $$(D + 3)\ i_C(t) = 24 \cos \left(12 t + \frac{\pi}{6}\right)$$

Α.Σ. για $t = 0^+$: $V_C(0^-) = V_C(0^+) = 4$ Volts , $E (0^+) = 2 \sin \left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ Volt

άρα: $$i_C (0^+) = \frac{E (0^+) - V_C (0^+)}{R_1} - \frac{V_C (0^+)}{R_2} = \frac{1-4}{1} - \frac{4}{2} = -5 \text{ Amps}$$

Συνοψίζουμε για $t > 0$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Δ.Ε.}\quad (D + 3)\ i_C(t) = 24 \cos \left(12 t + \frac{\pi}{6}\right) \\ \\ \qquad\qquad \text{Α.Σ}\quad i_C (0^+) = -5 \text{ A} \end{array}\right\}$$

Προχωρούμε στην επίλυση:

χαρακτ. εξίσωση της Δ.Ε. $s + 3 = 0$ ρίζα $s_1 = -3$

άρα $$i_{c,\,ομογ} (t) = C' e^{-3t}$$

(τέθηκε C' για αποφυγή σύγχυσης με το C του πυκνωτή)

Αναζητούμε μερική λύση της μορφής: $i_{C,μερ}(t) = k_1 \sin (12 t) + k_2 \cos (12 t)$
άρα: $D\, i_{C,μερ}(t) = 12 k_1 \cos (12 t) - 12 k_2 \sin (12 t)$
αντικαθιστούμε στην Δ.Ε:

$$D\, i_{C,μερ}(t) + 3\, i_{C,μερ}(t) = 24 \cos \left(12 t + \frac{\pi}{6}\right)$$

ή:

$$12k_1 \cos (12 t) - 12k_2 \sin (12 t) + 3 k_1 \sin (12 t) + 3 k_2 \cos (12 t) = 24 \cos \left(12 t + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow$$

$$[3 k_1 - 12k_2] \sin (12t) + [3 k_2 + 12k_1] \cos (12t) = 24\left[\cos (12 t) \cos \left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin (12 t) \sin \left(\frac{\pi}{6}\right) \right]$$

τελικά καταλήγουμε στο σύστημα (2Χ2) :

$$3 k_1 - 12 k_2 = -24 \sin \left(\frac{\pi}{6}\right) = -12$$

$$3 k_2 + 12 k_1 = 24 \cos \left(\frac{\pi}{6}\right) = 20.78$$

με λύση:

$$k_1 = 1.3944 \quad , \quad k_2 = 1.3486$$

άρα $$i_{C,\mu\varepsilon\rho}(t) = 1.3944 \sin(12t) + 1.3486 \cos(12t)$$

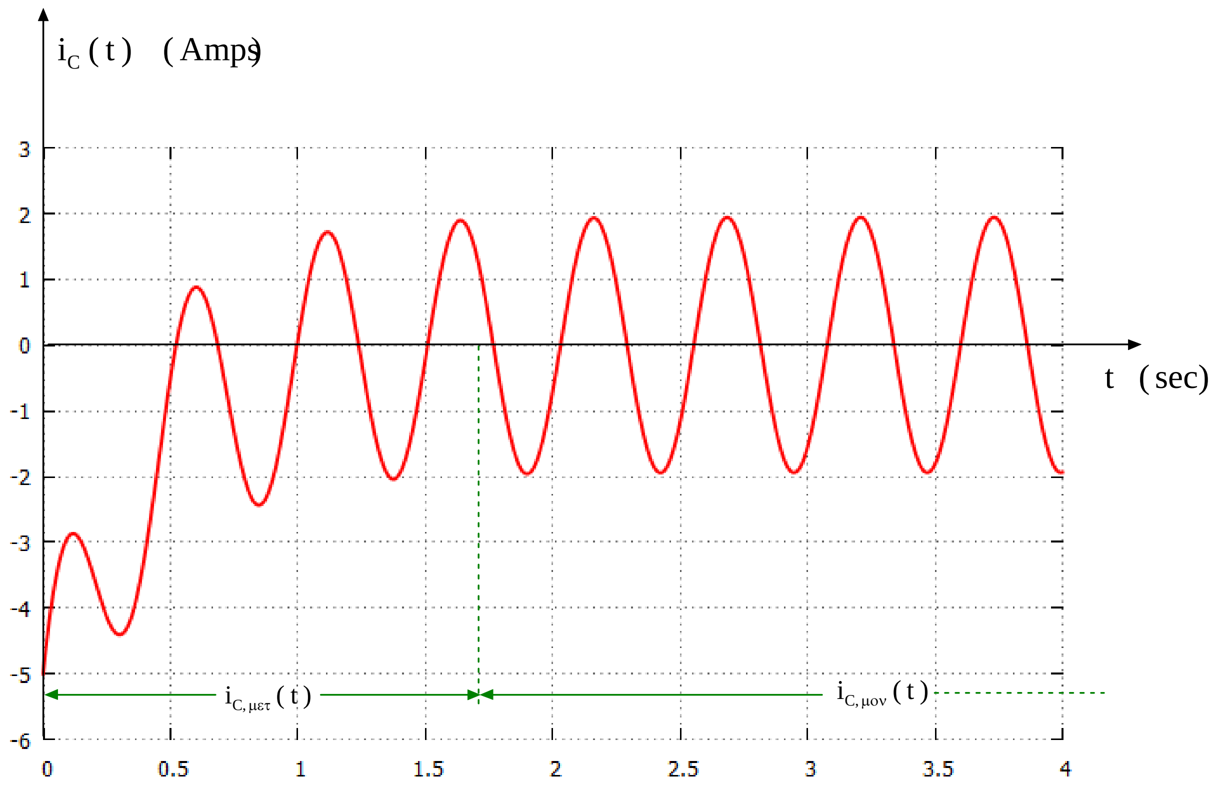
που ισοδύναμα γράφεται:
$$i_{C,\mu\varepsilon\rho}(t) = 1.940 \sin(12t + 44^o)$$
άρα τελικά:
$$i_C(t) = i_{c,\,o\mu o\gamma}(t) + i_{C,\mu\varepsilon\rho}(t) = C' e^{-3t} + 1.940 \sin(12t + 44^o)$$

εφαρμόζουμε την Α.Σ $\quad i_C(0^+) = -5$
και έχουμε:
$$i_C(0^+) = C' + 1.940 \sin(44^o) = -5 \quad \text{άρα} \quad C' = -6.3476$$

επομένως η πλήρης απόκριση του δικτύου θα είναι:

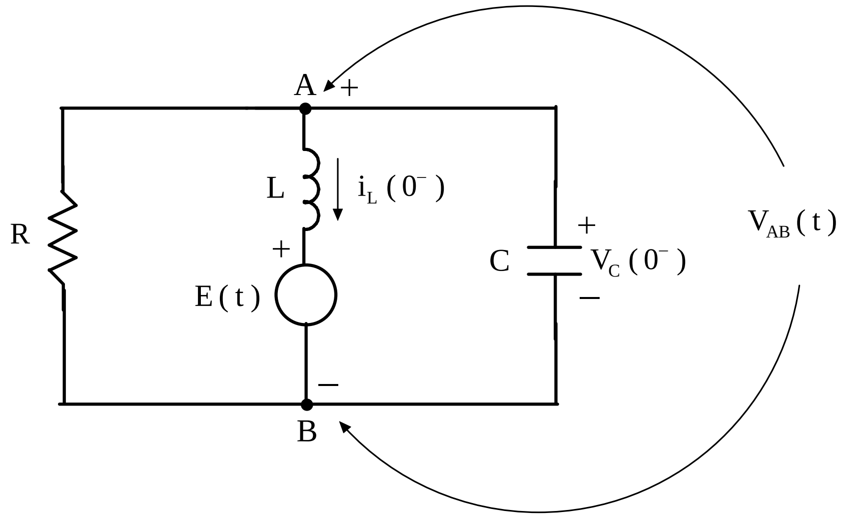
$$i_C(t) = \underbrace{-6.3476\, e^{-3t}}_{\text{μεταβατική}} + \underbrace{1.940 \sin(12t + 44^o)}_{\text{μόνιμη}}$$

Παρακάτω δίνεται γραφική παράσταση της λύσης



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Δίδεται το ακόλουθο δίκτυο



Θεωρούνται γνωστά τα μεγέθη R, L, C, $i_L(0^-)$, $V_C(0^-)$ και επίσης η συνάρτηση E (t) της πηγής είναι φραγμένη. Ως διέγερση θεωρείται η τάση της πηγής E (t) και ως απόκριση η τάση $V_{AB}(t)$.

1) Να βρεθεί η Δ.Ε. που συνδέει την διέγερση με την απόκριση καθώς και οι απαραίτητες Αρχικές Συνθήκες που την συνοδεύουν.

Απ/ Η ζητούμενη Δ.Ε. θα είναι $2^{ας}$ τάξεως διότι το δίκτυο περιλαμβάνει 2 «δυναμικά» στοιχεία (ένα πηνίο και ένα πυκνωτή).
Χωρίς δυσκολία και με εφαρμογή του Θ. Millman θα πάρουμε για την τάση $V_{AB}(t)$:

$$V_{AB}(t) = \frac{E(t)\,\dfrac{1}{LD}}{\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{LD}+\dfrac{1}{\dfrac{1}{CD}}} = \frac{\dfrac{E(t)}{LD}}{\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{LD}+CD} = \frac{\dfrac{E(t)}{LD}}{\dfrac{LD+R+RLCD^2}{RLD}}$$

ή

$$V_{AB}(t) = \frac{R\,E(t)}{RLCD^2+LD+R}$$

άρα η ζητούμενη Δ.Ε. είναι:

$$\boxed{[\,RLCD^2+LD+R\,]\,V_{AB}(t) = R\,E(t)}$$

Παρακάτω θα υπολογίσουμε τις Αρχικές Συνθήκες της ανωτέρω Δ.Ε. δηλ. τις τιμές:

$$V_{AB}(0^+), \quad DV_{AB}(0^+)$$

Αρχικά αναφέρουμε ότι θα ισχύουν οι ισότητες:

$$V_C(0^+) = V_C(0^-)$$
$$i_L(0^+) = i_L(0^-)$$

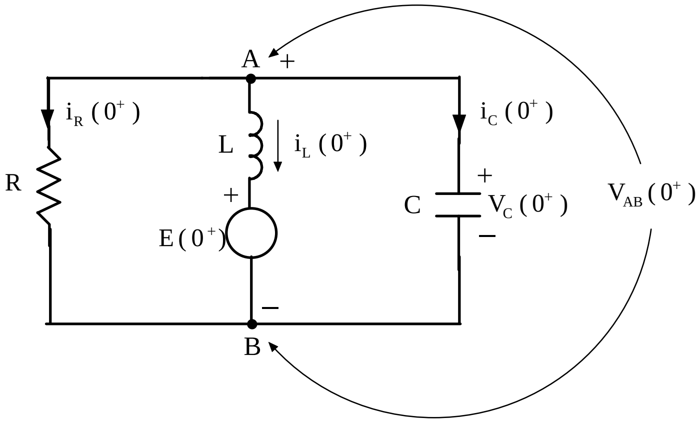
διότι η E (t) είναι φραγμένη συνάρτηση.

Παρατηρούμε αμέσως ότι $V_{AB}(t) = V_C(t)$
άρα η 1η Α.Σ. είναι αμέσως γνωστή :

$$V_{AB}(0^+) = V_C(0^+)$$

Προσπαθούμε να βρούμε την 2η Α.Σ. $DV_{AB}(0^+) = ;$

Ξανασχεδιάζουμε το δίκτυο και αναφερόμαστε στη χρονική στιγμή $t = 0^+$



Θα ισχύουν οι σχέσεις:

$$DV_{AB}(0^+) = DV_C(0^+) = \frac{1}{C} i_C(0^+)$$

N.P.K. στον κόμβο **A** $\quad -i_R(0^+) - i_L(0^+) - i_C(0^+) = 0$

άρα: $\quad i_C(0^+) = -i_R(0^+) - i_L(0^+)$

η τιμή $i_R(0^+)$ είναι γνωστή διότι:

$$i_R(0^+) = \frac{V_{AB}(0^+)}{R} = \frac{V_C(0^+)}{R}$$

άρα τελικά από τις σχέσεις:

$$DV_{AB}(0^+) = \frac{1}{C} i_C(0^+)$$

και

$$i_C(0^+) = -\frac{V_C(0^+)}{R} - i_L(0^+)$$

προκύπτει ότι η 2η Α.Σ. θα είναι:

$$DV_{AB}(0^+) = -\frac{1}{RC} V_C(0^+) - \frac{1}{C} i_L(0^+)$$

άρα συνοψίζουμε:

Δ.Ε. $\quad \boxed{[\,RLCD^2 + LD + R\,]\,V_{AB}(t) = R\,E(t)}$

Α.Σ. $\quad \boxed{V_{AB}(0^+) = V_C(0^+)}$, $\quad \boxed{DV_{AB}(0^+) = -\frac{1}{RC} V_C(0^+) - \frac{1}{C} i_L(0^+)}$

ΠΡΟΣΟΧΗ! Παρατηρήστε ότι η τάση της πηγής $E(t)$ δεν συμμετέχει στις εκφράσεις των Α.Σ (για $t = 0^+$). Αυτό συμβαίνει διότι εν σειρά με την πηγή $E(t)$ υπάρχει το πηνίο L, το οποίο (εφ' όσον είναι φραγμένη η $E(t)$) ΔΕΝ επιτρέπει αλλαγή της τιμής του ρεύματος $i_L(t) = i_{πηγής}(t)$ από $t = 0^-$ σε $t = 0^+$

2) Θεωρείστε τιμές $R = 1\ \Omega$, $L = 1\ H$, $C = 1\ F$. Υπολογίστε την **βηματική** και την **κρουστική** απόκριση του δικτύου.

Απ/ Για τον υπολογισμό της **βηματικής** απόκρισης ισχύουν:

$$i_L(0^-) = 0\ ,\quad V_C(0^-) = 0$$
$$E(t) = u(t)$$

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα έχουμε (με τις δεδομένες τιμές στοιχείων R, L, C)

$$\Delta.E.\quad (D^2 + D + 1)\, V_{AB}(t) = u(t)$$

$$A.\Sigma\quad V_{AB}(0^+) = 0\ ,\quad DV_{AB}(0^+) = 0$$

και για $t > 0$

$$\Delta.E.\quad (D^2 + D + 1)\, V_{AB}(t) = 1$$

$$A.\Sigma\quad V_{AB}(0^+) = 0\ ,\quad DV_{AB}(0^+) = 0$$

Προχωρούμε στην επίλυση

χαρακτ. εξίσωση : $s^2 + s + 1 = 0$

με ρίζες $s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$

άρα $V_{AB,\,\text{ομογ.}}(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left[C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]$

εύκολα προκύπτει και η μερική λύση:

$$V_{AB,\,\text{μερ.}}(t) = 1 \quad (\text{γιατι;})$$

συνεπώς:

$$V_{AB,\,\text{βηματική}}(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left[C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right] + 1$$

από τις Α.Σ: $V_{AB}(0^+) = 0$, $DV_{AB}(0^+) = 0$ θα προσδιορίσουμε τις τιμές των C_1 και C_2 .

Έχουμε:

$$\frac{d}{dt} V_{AB,\,\text{βηματική}}(t) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t}\left[C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right] +$$
$$+\ e^{-\frac{1}{2}t}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]$$

και

$V_{AB}(0^+) = V_{AB,\,\text{βηματική}}(0^+) = 0 \;\Rightarrow\; C_2 + 1 = 0$

$DV_{AB}(0^+) = DV_{AB,\,\text{βηματική}}(0^+) = 0 \;\Rightarrow\; -\frac{1}{2} C_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} C_1 = 0$

άρα προκύπτουν οι τιμές: $C_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $C_2 = -1$

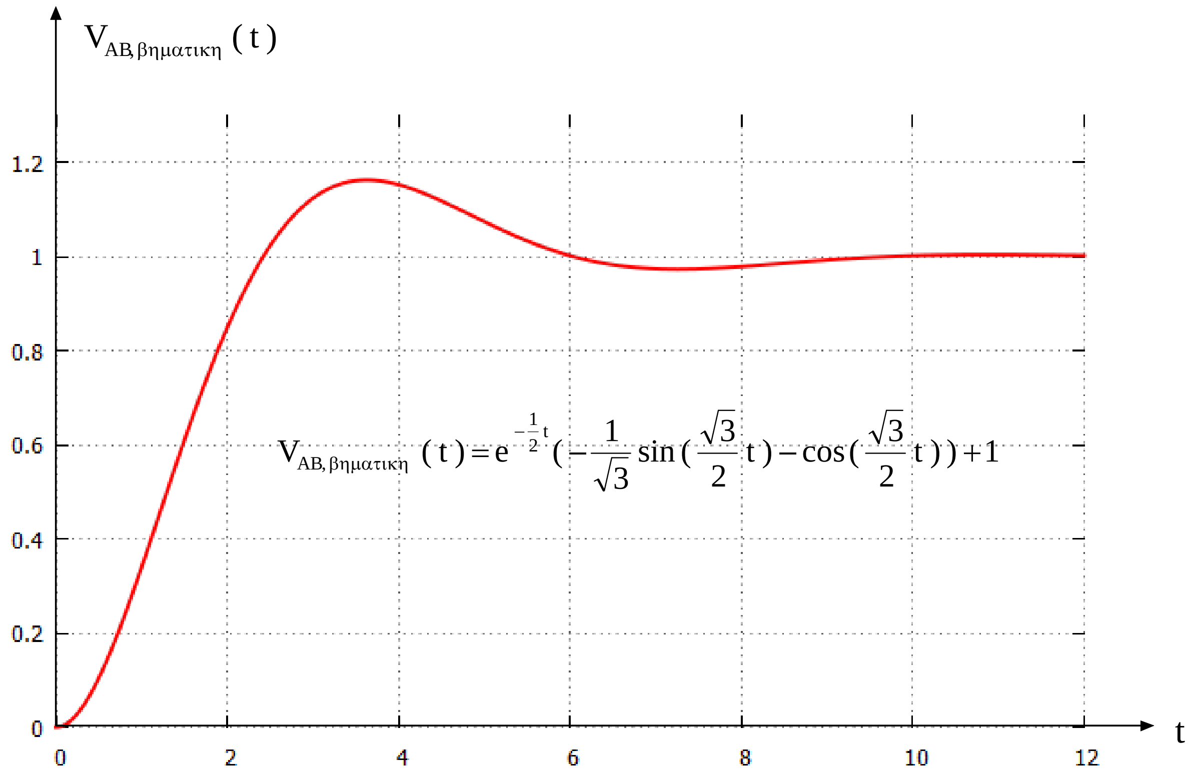
Συνεπώς η βηματική απόκριση θα είναι:

$$\boxed{V_{AB,\,\beta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\acute{\eta}}(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right] + 1}$$

Που μπορεί να γραφεί και ως:

$$\boxed{V_{AB,\,\beta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\acute{\eta}}(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - 120^{o}\right) + 1}$$

Παρακάτω δίδεται μια γραφική παράσταση της βηματικής απόκρισης.



Για τον υπολογισμό της **κρουστικής** απόκρισης ισχύουν:

$$i_L(0^-) = 0\,,\quad V_C(0^-) = 0$$
$$E(t) = \delta(t)$$

και στο συγκεκριμένο πρόβλημα έχουμε:

$$\Delta.\mathrm{E.}\quad (D^2 + D + 1)\,V_{AB}(t) = \delta(t)$$

$$\mathrm{A.}\Sigma\quad (\text{για } t = 0^-)\qquad V_{AB}(0^-) = 0\ ,\quad DV_{AB}(0^-) = 0$$

και για $t > 0$

$$\Delta.\mathrm{E.}\quad (D^2 + D + 1)\,V_{AB}(t) = 0$$

$$\mathrm{A.}\Sigma\quad V_{AB}(0^+) = \,?\ ,\quad DV_{AB}(0^+) = \,?$$

Δηλαδή έχουμε το γνωστό πρόβλημα υπολογισμού των Α.Σ. για $t = 0^+$

Υπενθυμίζεται ότι στην περίπτωση που έχουμε ως διέγερση ενός ηλ. δικτύου μια κρουστική συνάρτηση δ(t) , <u>δεν εξασφαλίζεται</u> η ισχύς των σχέσεων

$$\mathbf{V_C(0^+) = V_C(0^-)}$$
$$\mathbf{i_L(0^+) = i_L(0^-)}$$

δηλαδή μπορεί να ισχύουν μπορεί και όχι!

Επανερχόμαστε στο συγκεκριμένο παράδειγμα και γράφουμε για την Δ.Ε. για $t = 0$ ακριβώς

α' μέλος	**β' μέλος**
$\mathbf{V_{AB}(t)}$ $\mathbf{D\,V_{AB}(t)}$ $\mathbf{D^2\,V_{AB}(t)}$	$\boldsymbol{\delta(t)}$

Η υπόθεση $V_{AB}(t) = k\,\delta(t)$ $(k\in R)$ έχει σαν συνέπεια ότι $DV_{AB}(t) = k\,D\,\delta(t)$ και επίσης $D^2 V_{AB}(t) = k\,D^2\,\delta(t)$. Αλλά οι όροι $D\,\delta(t)$ και $D^2\,\delta(t)$ **δεν υπάρχουν** στο β' μέλος άρα:

$$\mathbf{V_{AB}(t) = k\,\delta(t) \rightarrow \text{ΑΤΟΠΟ!}}$$

Με όμοιο τρόπο η υπόθεση $DV_{AB}(t) = k\,\delta(t)$ $(k\in R)$ έχει σαν συνέπεια ότι $D^2V_{AB}(t) = k\,D\,\delta(t)$, αλλά ο όρος $D\,\delta(t)$ **δεν υπάρχει** στο β' μέλος άρα:

$$\mathbf{D\,V_{AB}(t) = k\,\delta(t) \rightarrow \text{ΑΤΟΠΟ!}}$$

Τέλος η υπόθεση $D^2 V_{AB}(t) = k\,\delta(t)$ $(k\in R)$ δεν μπορεί να αποκλειστεί , δεν οδηγεί σε άτοπο. Δηλαδή ο κρουστικός όρος $\delta(t)$ «φορτώνεται» στην μεγαλύτερη παράγωγο που υπάρχει στο αριστερό μέλος, η οποία είναι η $D^2 V_{AB}(t)$.

Σημειώνουμε εδώ ότι στο δεξιό μέλος <u>θα μπορούσαν να υπάρχουν</u> και οι όροι $D\,\delta(t)$ και $D^2\,\delta(t)$, και τότε το πρόβλημα θα χρειαζόταν διαφορετική αντιμετώπιση!

Με βάση τα προηγούμενα συμπεράσματα έχουμε:
- $V_{AB}(t)$ δεν περιέχει $\delta(t)$

- $DV_{AB}(t)$ δεν περιέχει $\delta(t)$ άρα $V_{AB}(t)$ συνεχής για t = 0 δηλαδή $V_{AB}(0^-) = V_{AB}(0^+)$

- $D^2 V_{AB}(t) = k\,\delta(t)$, αντικαθιστούμε αυτή την σχέση στην Δ.Ε και έχουμε (για t = 0)

$$(D^2 + D + 1)\,V_{AB}(t) = \delta(t)$$

$$\text{ή} \qquad D^2 V_{AB}(t) + D V_{AB}(t) + V_{AB}(t) = \delta(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D^2 V_{AB}(t) = \delta(t)$$

(διότι οι όροι $D V_{AB}(t)$, $V_{AB}(t)$ δεν περιέχουν κρουστική συνάρτηση, όπως εξηγήθηκε προηγουμένως)
άρα , και εφ' όσον $D^2 V_{AB}(t) = k\,\delta(t)$, θα πάρουμε:

$$k\,\delta(t) = \delta(t) \Rightarrow k = 1$$

δηλαδή:

$$D^2 V_{AB}(t) = \delta(t) \Rightarrow [\,D V_{AB}(0^+) - D V_{AB}(0^-)\,] = 1$$

και επειδή $D V_{AB}(0^-) = 0$ προκύπτει αμέσως ότι $D V_{AB}(0^+) = 1$

Συνοψίζουμε όλα τα προηγούμενα και καταλήγουμε:

για t > 0

$$\textbf{Δ.Ε.} \quad (D^2 + D + 1)\,V_{AB}(t) = 0$$

$$\textbf{Α.Σ} \quad V_{AB}(0^+) = 0 \;,\quad DV_{AB}(0^+) = 1$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Από την σχετική ανάλυση που προηγήθηκε προέκυψε ότι

i) $V_{AB}(0^-) = V_{AB}(0^+)$ και επειδή $V_{AB}(t) = V_C(t)$ προκύπτει ότι , στο συγκεκριμένο παράδειγμα, παρά την κρουστική διέγερση $E(t) = \delta(t)$ η τάση $V_C(t)$ του πυκνωτή, παραμένει συνεχής συνάρτηση για t = 0.

i i) $DV_{AB}(0^-) \neq DV_{AB}(0^+)$ και επειδή:

$$\underbrace{DV_{AB}(t)}_{\substack{\text{ασυνεχής} \\ \text{στο } t=0}} = -\frac{1}{RC}\underbrace{V_C(t)}_{\substack{\text{συνεχής} \\ \text{στο } t=0}} - \underbrace{\frac{1}{C} i_L(t)}_{\substack{\text{πρέπει ασυνεχής} \\ \text{στο } t=0}}$$

την ασυνέχεια της $DV_{AB}(t)$ στο t = 0 την «φορτώνεται» η συνάρτηση $i_L(t)$, δηλαδή το ρεύμα του πηνίου παρουσιάζει εδώ ασυνέχεια.

Υπολογίζουμε τώρα την κρουστική απόκριση:

Δ.Ε. $(D^2 + D + 1)\, V_{AB}(t) = 0$

Α.Σ $V_{AB}(0^+) = 0$, $DV_{AB}(0^+) = 1$

χαρακτ. εξίσωση : $s^2 + s + 1 = 0$

ρίζες $s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$

άρα $V_{AB}(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left[C_1 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + C_2 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) \right]$

από Α.Σ.

$V_{AB}(0^+) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$ άρα $V_{AB}(t) = e^{-\frac{1}{2}t} C_1 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)$

και $DV_{AB}(t) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t} C_1 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + e^{-\frac{1}{2}t} C_1 \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t)$

$DV_{AB}(0^+) = 1 \Rightarrow C_1 \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \Rightarrow C_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Συνεπώς η κρουστική απόκριση θα είναι:

$$\boxed{V_{AB,\ \text{κρουστική}}(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)}$$

Εύκολα επαληθεύεται ή σχέση:

$$\mathbf{V_{AB,\ \text{κρουστική}}(t) = \frac{d}{dt} V_{AB,\ \text{βηματική}}(t)}$$

Παρακάτω δίδεται μια γραφική παράσταση της κρουστικής απόκρισης.