ΣΧΟΛΗ. Ν. ΔΟΚΙΜΩΝ

ΜΑΘΗΜΑ: ΘΕΩΡΙΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ ΙΙ – ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ Σ.Α.Ε.

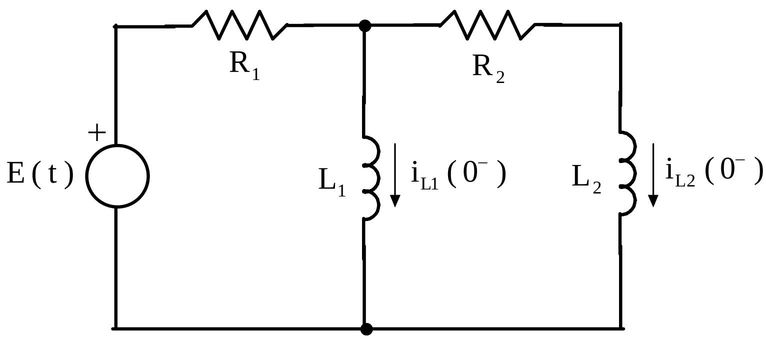
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΓΡΑΦΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΣ ΣΕ ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ

Δρ. Α. Μαγουλάς

Οκτώβριος 2014

<u>Παράδειγμα 1</u>

Δίδεται το ακόλουθο δίκτυο:



Είσοδος: E (t)
Έξοδος: δεν αναφέρεται
Ζητείται να γραφούν οι εξισώσεις καταστάσεως του δικτύου.

<u>Παρατήρηση.</u> Επειδή στο παρόν πρόβλημα ΔΕΝ δίδεται ποιο (ή ποια) μέγεθος (ή μεγέθη) είναι τα σήματα εξόδου, προφανώς ΔΕΝ ζητούνται οι εξισώσεις εξόδου. Ζητούνται μόνον οι εξισώσεις καταστάσεως.

Λύση:

Εκλογή των μεταβλητών καταστάσεως.
Τάξη δικτύου n = 2 (δύο δυναμικά στοιχεία (πηνία)). Ως μεταβλητές καταστάσεως εκλέγονται τα 2 ρεύματα των πηνίων: $i_{L1}(t)$, $i_{L2}(t)$

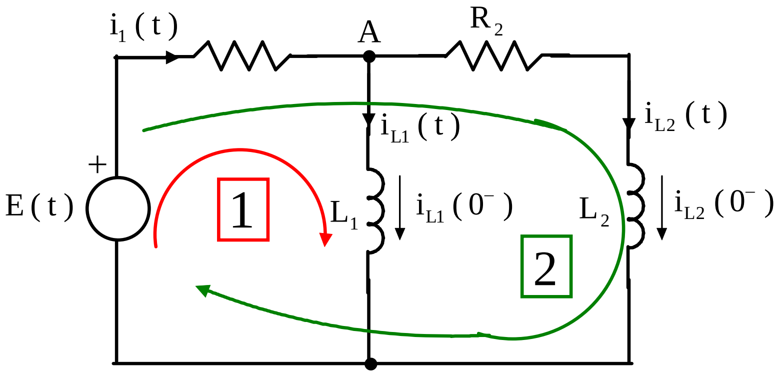
Άρα $$\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} i_{L1}(t) \\ i_{L2}(t) \end{bmatrix}$$ διάνυσμα καταστάσεως

Για την εύρεση των Ε.Κ. χρησιμοποιούμε τα μαθηματικά «εργαλεία» που διαθέτουμε. Δηλαδή:

- Νόμους Kirchhoff
- Σχέσεις τάσεως – ρεύματος των ηλ. στοιχείων

Ξανασχεδιάζουμε το δίκτυο και τοποθετούμε ρεύματα κλάδων

Έτσι έχουμε:



N.P.K. **A** $$i_1(t) - i_{L1}(t) - i_{L2}(t) = 0 \qquad (1)$$

N.T.K. $\boxed{1}$ $$-E(t) + i_1(t)R_1 + L_1 \frac{d\,i_{L1}(t)}{dt} = 0 \qquad (2)$$

N.T.K. $\boxed{2}$ $$-E(t) + i_1(t)R_1 + i_{L2}(t)R_2 + L_2 \frac{d\,i_{L2}(t)}{dt} = 0 \qquad (3)$$

η (1) δίνει : $$i_1(t) = i_{L1}(t) + i_{L2}(t) \qquad (4)$$

και από (2) και (4) παίρνουμε:

$$-E(t) + i_{L1}(t)R_1 + i_{L2}(t)R_1 + L_1 \frac{d\,i_{L1}(t)}{dt} = 0$$

ή

$$\boxed{\frac{d\,i_{L1}(t)}{dt} = -\frac{R_1}{L_1} i_{L1}(t) - \frac{R_1}{L_1} i_{L2}(t)R_1 + \frac{1}{L_1}E(t)} \qquad (5)$$

Δηλ. εκφράσαμε την 1^{η} παράγωγο του $i_{L1}(t)$ (πρώτη μεταβλητή καταστάσεως) συναρτήσει των $i_{L1}(t)$, $i_{L2}(t)$ (των δύο μεταβλητών καταστάσεως) και της εισόδου $E(t)$.

Η σχέση (5) είναι η 1^{η} εξίσωση καταστάσεως.

Στη συνέχεια από τις σχέσεις (3) και (4) παίρνουμε:

$$-E(t) + i_{L1}(t)R_1 + i_{L2}(t)R_1 + i_{L2}(t)R_2 + L_2 \frac{d\,i_{L2}(t)}{dt} = 0$$

ή

$$\boxed{\frac{d\,i_{L2}(t)}{dt} = -\frac{R_1}{L_2} i_{L1}(t) - \frac{R_1 + R_2}{L_2} i_{L2}(t)R_1 + \frac{1}{L_2}E(t)} \qquad (6)$$

Η σχέση (6) είναι η 2^{η} εξίσωση καταστάσεως

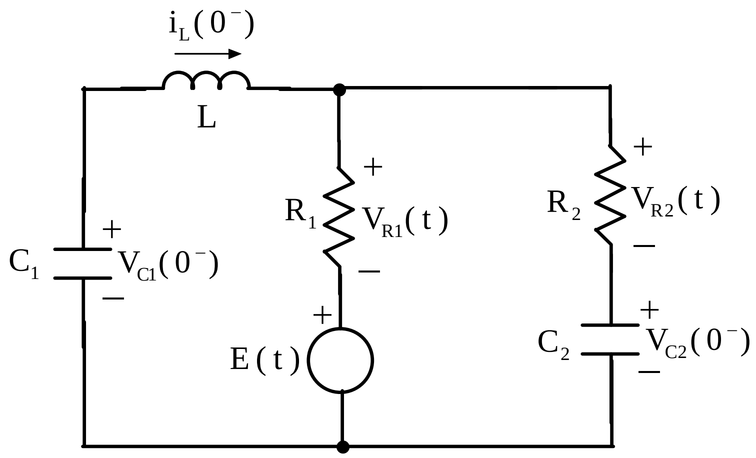
Οι Ε.Κ. σε μητρική μορφή γράφονται:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_{L1}(t) \\ i_{L2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & -\frac{R_1}{L_1} \\ -\frac{R_1}{L_2} & -\frac{R_1+R_2}{L_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{L1}(t) \\ i_{L2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{L_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E(t) \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = \hat{A} \cdot \hat{x}(t) + \hat{B} \cdot \hat{f}(t)$$

<u>Παράδειγμα 2</u>

Δίδεται το ακόλουθο δίκτυο:



Είσοδος: $E(t)$
Έξοδοι: $V_{R1}(t)$, $V_{R2}(t)$
Ζητείται να γραφούν οι εξισώσεις καταστάσεως και οι εξισώσεις εξόδου του δικτύου.
Λύση:
Εκλογή των μεταβλητών καταστάσεως.
Τάξη δικτύου $n = 3$ (τρία δυναμικά στοιχεία , 2 πυκνωτές και ένα πηνίο). Ως μεταβλητές καταστάσεως εκλέγονται τα μεγέθη: $V_{C1}(t)$, $i_L(t)$, $V_{C2}(t)$. Άρα:

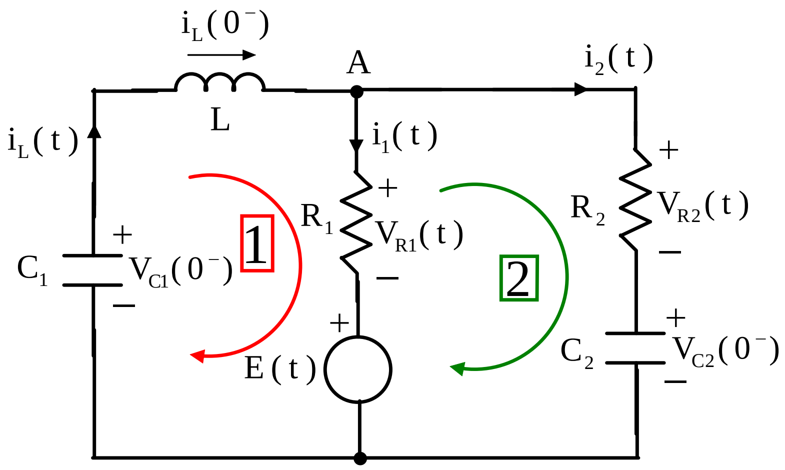
$$\hat{f}(t) = [E(t)] \qquad \hat{x}(t) = \begin{bmatrix} V_{C1}(t) \\ i_L(t) \\ V_{C2}(t) \end{bmatrix} \qquad \hat{y}(t) = \begin{bmatrix} V_{R1}(t) \\ V_{R2}(t) \end{bmatrix}$$

διάνυσμα εισόδου (1 X 1)

διάνυσμα καταστάσεως (3 X 1)

διάνυσμα εξόδου (2 X 1)

Ξανασχεδιάζουμε το δίκτυο και τοποθετούμε ρεύματα κλάδων



Γράφουμε τις 3 εξισώσεις από τους Νόμους Kirchhoff

Ν.Ρ.Κ. **A** $$i_L(t) - i_1(t) - i_2(t) = 0 \qquad (1)$$

Ν.Τ.Κ. $\boxed{1}$ $$-V_{C1}(t) + L\frac{di_L(t)}{dt} + i_1(t)R_1 + E(t) = 0 \qquad (2)$$

Ν.Τ.Κ. $\boxed{2}$ $$i_2(t)R_2 + V_{C2}(t) - E(t) - i_1(t)R_1 = 0 \qquad (3)$$

Επίσης έχουμε τις σχέσεις τάσεως – ρεύματος

$$i_{C1}(t) = i_L(t) = -C_1\frac{dV_{C1}(t)}{dt} \qquad (4)$$

προσοχή στο «μείον»
μη συσχετισμένες
φορές αναφοράς

$$i_{C2}(t) = i_2(t) = C_2\frac{dV_{C2}(t)}{dt} \qquad (5)$$

Παρατηρούμε αμέσως ότι η απλή σχέση τάσεως – ρεύματος για τον πυκνωτή C_1 (σχέση (4)) αποτελεί εξίσωση καταστάσεως, διότι συνδέει την $1^η$ παράγωγο του $V_{C1}(t)$ (μεταβλητή καταστάσεως) με το $i_L(t)$ (μεταβλητή καταστάσεως)

Άρα η $1^η$ εξίσωση καταστάσεως θα είναι:

$$\boxed{\frac{dV_{C1}(t)}{dt} = -\frac{1}{C_1}i_L(t)}$$

Βρήκαμε λοιπόν εύκολα την 1^{η} Εξίσωση Καταστάσεως, αλλά για τις υπόλοιπες 2 χρειάζεται προσοχή και σχετική εμπειρία.
Παρατηρούμε τις σχέσεις (1) και (3) , τις ξαναγράφουμε παρακάτω:

$$i_L(t) - i_1(t) - i_2(t) = 0 \qquad (1)$$

$$i_2(t) R_2 + V_{C2}(t) - E(t) - i_1(t) R_1 = 0 \qquad (3)$$

Οι δύο αυτές σχέσεις μπορούν να σχηματίσουν ένα σύστημα (2Χ2) με αγνώστους τα ρεύματα $i_1(t)$ και $i_2(t)$.

<u>ΔΗΛΑΔΗ:</u> Μπορούμε να βρούμε 2 εκφράσεις που να δίνουν τα ρεύματα $i_1(t)$ και $i_2(t)$ συναρτήσει των $i_L(t), V_{C2}(t)$ και $E(t)$
μεταβλητές καταστάσεως **είσοδος**

Αυτό είναι πολύ σημαντικό! Στην ουσία απαλείφονται τα $i_1(t)$ και $i_2(t)$ και προκύπτουν σχέσεις που περιέχουν μόνον τα μεγέθη που ενδιαφέρουν δηλαδή τα:

$$V_{C1}(t),\ i_L(t), V_{C2}(t),\ E(t)$$

Έχουμε λοιπόν το σύστημα εξισώσεων:

$$i_1(t) + i_2(t) = i_L(t)$$
$$-R_1 i_1(t) + R_2 i_2(t) = E(t) - V_{C2}(t)$$

Η λύση θα είναι:

$$i_1(t) = \frac{R_2 i_L(t) - E(t) + V_{C2}(t)}{R_1 + R_2} \qquad (6)$$

$$i_2(t) = \frac{E(t) - V_{C2}(t) + R_1 i_L(t)}{R_1 + R_2} \qquad (7)$$

Παρατηρούμε αμέσως ότι η σχέση (2)

$$-V_{C1}(t) + L\frac{d i_L(t)}{dt} + i_1(t) R_1 + E(t) = 0$$

και η σχέση (6)
θα δώσουν αμέσως την 2^{η} εξίσωση καταστάσεως
Έχουμε λοιπόν από (2) και (6):

$$-V_{C1}(t) + L\frac{d i_L(t)}{dt} + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_L(t) - \frac{R_1}{R_1 + R_2} E(t) + \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{C2}(t) + E(t) = 0$$

Πράγματι η σχέση αυτή περιέχει την 1^{η} παράγωγο του $i_L(t)$ και τα μεγέθη $V_{C1}(t)$, $i_L(t)$ $V_{C2}(t)$, $E(t)$

Η τελευταία σχέση ξαναγράφεται στην τελική μορφή της, δηλ. έχοντας στο αριστερό μέλος μόνον την παράγωγο $\frac{d\, i_L(t)}{d t}$ και δεξιά τους υπόλοιπους όρους:

$$L \frac{d\, i_L(t)}{d t} = V_{C1}(t) - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_L(t) - \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{C2}(t) + \frac{R_1}{R_1 + R_2} E(t) - E(t)$$

ή

$$\boxed{\frac{d\, i_L(t)}{d t} = \frac{1}{L} V_{C1}(t) - \frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} i_L(t) - \frac{R_1}{L(R_1 + R_2)} V_{C2}(t) - \frac{R_2}{L(R_1 + R_2)} E(t)}$$

η σχέση αυτή αποτελεί την 2^{η} εξίσωση καταστάσεως

Με όμοιο τρόπο συνδυάζοντας τις σχέσεις:

$$i_{C2}(t) = i_2(t) = C_2 \frac{d\, V_{C2}(t)}{d t}$$

$$\text{και} \quad i_2(t) = \frac{E(t) - V_{C2}(t) + R_1 i_L(t)}{R_1 + R_2}$$

θα πάρουμε:

$$C_2 \frac{d\, V_{C2}(t)}{d t} = \frac{1}{R_1 + R_2} E(t) - \frac{1}{R_1 + R_2} V_{C2}(t) + \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_L(t)$$

ή

$$\boxed{\frac{d\, V_{C2}(t)}{d t} = \frac{R_1}{C_2(R_1 + R_2)} i_L(t) - \frac{1}{C_2(R_1 + R_2)} V_{C2}(t) + \frac{1}{C_2(R_1 + R_2)} E(t)}$$

η σχέση αυτή αποτελεί την 3^{η} εξίσωση καταστάσεως

Παρακάτω γράφουμε τις εξισώσεις καταστάσεως σε «μητρική» μορφή

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} V_{C1}(t) \\ i_L(t) \\ V_{C2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C_1} & 0 \\ \frac{1}{L} & -\frac{R_1 R_2}{L(R_1+R_2)} & -\frac{R_1}{L(R_1+R_2)} \\ 0 & \frac{R_1}{C_2(R_1+R_2)} & -\frac{1}{C_2(R_1+R_2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{C1}(t) \\ i_L(t) \\ V_{C2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{R_2}{L(R_1+R_2)} \\ \frac{1}{C_2(R_1+R_2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E(t) \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = \hat{A} \cdot \hat{x}(t) + \hat{B} \cdot \hat{f}(t)$$

Τέλος αναζητούμε και τις εξισώσεις εξόδου

Οι δύο έξοδοι είναι:

$$V_{R1}(t) = R_1 i_1(t)$$

$$V_{R2}(t) = R_2 i_2(t)$$

Αλλά τα ρεύματα $i_1(t)$ και $i_2(t)$ έχουν εκφραστεί ήδη συναρτήσει των Μεταβλητών Καταστάσεως και της Εισόδου (σχέσεις (6) και (7)). Συνεπώς οι εξισώσεις εξόδου γράφονται:

$$V_{R1}(t) = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_L(t) + \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{C2}(t) - \frac{R_1}{R_1 + R_2} E(t)$$

$$V_{R2}(t) = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_L(t) - \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{C2}(t) + \frac{R_2}{R_1 + R_2} E(t)$$

και σε μητρική μορφή:

$$\begin{bmatrix} V_{R1}(t) \\ V_{R2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{R_1 R_2}{(R_1+R_2)} & \frac{R_1}{(R_1+R_2)} \\ 0 & \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} & -\frac{R_2}{R_1+R_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{C1}(t) \\ i_L(t) \\ V_{C2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{(R_1+R_2)} \\ \frac{R_2}{R_1+R_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E(t) \end{bmatrix}$$

$$\hat{y}(t) = \hat{C} \cdot \hat{x}(t) + \hat{D} \cdot \hat{f}(t)$$