ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Ένα γραμμικό σύστημα έχει την ακόλουθη Δ.Ε.

$$\boxed{(D^2 + 3D + 1)\,y(t) = D^2 f(t)}$$

Δίδεται η βηματική απόκριση του συστήματος

$$y_{βημ}(t) = -0.1708\,e^{-0.382t} + 1.1708\,e^{-2.618t}$$

Ζητείται να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του συστήματος με 2 τρόπους

Απ/

Η κρουστική απόκριση $h(t)$ θα υπολογιστεί με 2 ανεξάρτητους τρόπους

Α΄ τρόπος

ισχύει $\boxed{h(t) = \frac{d}{dt} y_{βημ}(t)}$ → ΠΡΟΣΟΧΗ ΟΜΩΣ!!!

Ξέρουμε ότι οπωσδήποτε ισχύει:

$$y_{βημ}(0^-) = 0 \quad (\text{γιατί;;})$$

Παρατηρούμε ότι:

$$y_{βημ}(0^+) = -0.1708 + 1.1708 = 1$$

άρα $y_{βημ}(0^-) \neq y_{βημ}(0^+)$

με $y_{βημ}(0^+) - y_{βημ}(0^-) = 1$ (δηλαδή η $y_{βημ}(t)$ είναι ΑΣΥΝΕΧΗΣ για $t=0$)

άρα
$$\frac{d}{dt} y_{βημ}(0) = h(0) = \left(y_{βημ}(0^+) - y_{βημ}(0^-)\right)\delta(t)$$
$$= 1 \cdot \delta(t) = \delta(t)$$

και για $t > 0$ (ή $t \geq 0^+$) θα έχουμε

$$h(t) = \frac{d}{dt} y_{βημ}(t) = (-0.382)\cdot(-0.1708)\,e^{-0.382t} +$$
$$+ (-2.618)\cdot(1.1708)\,e^{-2.618t}$$

συνεπώς η κρουστική απόκριση $h(t)$ θα είναι:

$$\boxed{h(t) = 0.0652\, e^{-0.382t} - 3.0651\, e^{-2.618t} + \delta(t)}$$

(δηλ. η απόκριση θα περιέχει την $\delta(t)$)
για $t=0$ ΑΚΡΙΒΩΣ

Β' Τρόπος

Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος θα είναι:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{s^2}{s^2+3s+1} \qquad \text{(γιατί;;)}$$

και προφανώς

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{κρουστική}\\ \text{απόκριση}\\ h(t)\end{array} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{array}{c}\text{συνάρτησης}\\ \text{μεταφοράς}\\ H(s)\end{array}\right\}}$$

άρα $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^2}{s^2+3s+1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{P(s)}{Q(s)}\right\}$

ΠΡΟΣΟΧΗ ΕΔΩ!!!

Το πολυώνυμο $P(s)$ (αριθμητής) έχει τον ίδιο βαθμό με το $Q(s)$ (παρονομαστής), για το λόγο αυτό εκτελούμε την διαίρεση και γράφουμε.

$$\frac{s^2}{s^2+3s+1} = 1 - \frac{3s+1}{s^2+3s+1}$$

άρα $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^2}{s^2+3s+1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\{1\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s+1}{s^2+3s+1}\right\}$

$$= \delta(t) - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+1}{s^2+3s+1}\right\}$$

$A(s) = 3s+1$

$B(s) = s^2+3s+1$, ρίζες $s_1 = -0.382$, $s_2 = -2.618$

$B'(s) = 2s+3$

και

$$\frac{3s+1}{s^2+3s+1} = \frac{A(s_1)}{B'(s_1)}\frac{1}{s-s_1} + \frac{A(s_2)}{B'(s_2)}\frac{1}{s-s_2} =$$

$$= \frac{3\cdot(-0.382)+1}{2(-0.382)+3}\left(\frac{1}{s+0.382}\right) + \frac{3\cdot(-2.618)+1}{2\cdot(-2.618)+3}\left(\frac{1}{s+2.618}\right)$$

$$= \frac{-0.146}{2.236}\left(\frac{1}{s+0.382}\right) + \frac{-6.854}{-2.236}\left(\frac{1}{s+2.618}\right)$$

$$= -0.0652\left(\frac{1}{s+0.382}\right) + 3.0652\left(\frac{1}{s+2.618}\right)$$

άρα συνοψίζουμε:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{s^2+3s+1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\{1\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+1}{s^2+3s+1}\right\}$$

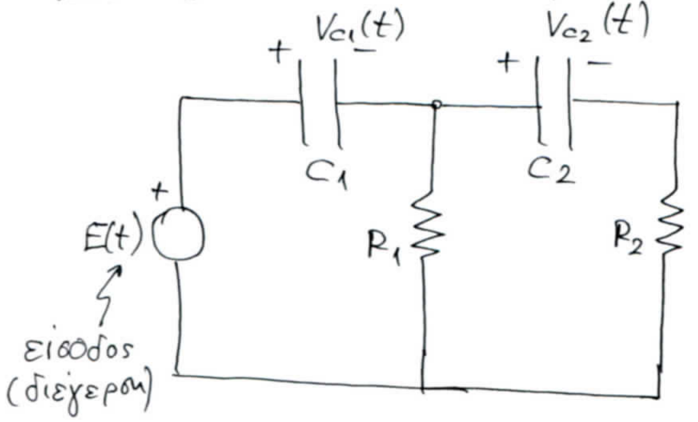
$$= \mathcal{L}^{-1}\{1\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{-0.0652\frac{1}{s+0.382}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{3.0652\frac{1}{s+2.618}\right\}$$

$$= \boxed{\delta(t) + 0.0652e^{-0.382t} - 3.0652e^{-2.618t}}$$

Άρα βρήκαμε ακριβώς την ίδια απόκριση!!!
(όπως αναμένονταν)

ΑΣΚΗΣΗ 2

Στο δίκτυο του σχήματος



i) Να γίνει μια κατάλληλη εκλογή μεταβλητών καταστάσεως

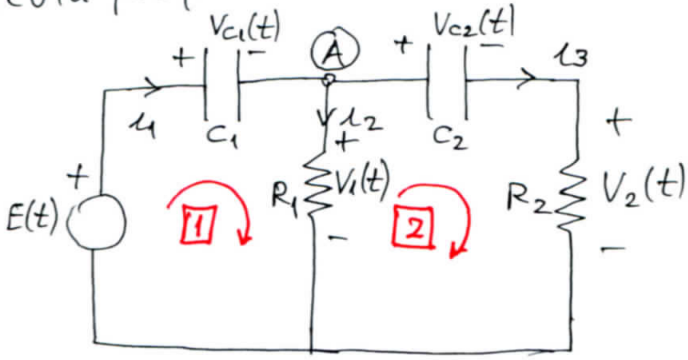
ii) Να γραφούν σε μορφή πινάκων οι εξισώσεις καταστάσεως

Απ/ Το δίκτυο είναι 2ας τάξεως (περιέχει 2 πυκνωτές)
Ως μεταβλητές καταστάσεως επιλέγονται οι τάσεις

$$V_{C_1}(t) \quad , \quad V_{C_2}(t)$$

Γραφή των Ε.Κ.

Ξανασχεδιάζουμε το δίκτυο σημειώνοντας ρεύματα κλάδων



Γράφουμε τους νόμους του Kirchhoff

Ν.Ρ.Κ. (A) $\quad i_1 - i_2 - i_3 = 0 \quad$ ή $\quad C_1 \dfrac{dV_{C_1}(t)}{dt} - \dfrac{V_1(t)}{R_1} - \dfrac{V_2(t)}{R_2} = 0 \quad (1)$

Ν.Τ.Κ. $\boxed{1}$ $\quad -E(t) + V_{C_1}(t) + V_1(t) = 0 \Rightarrow V_1(t) = E(t) - V_{C_1}(t) \quad (2)$

Ν.Τ.Κ. $\boxed{2}$ $\quad -V_1(t) + V_{C_2}(t) + V_2(t) = 0 \Rightarrow V_2(t) = V_1(t) - V_{C_2}(t) \quad (3)$

ή (1) γράφεται $\quad \dfrac{dV_{C_1}(t)}{dt} = \dfrac{1}{R_1 C_1} V_1(t) + \dfrac{1}{R_2 C_1} V_2(t) \quad (4)$

από (4) και (2), (3) έχουμε:

$$\boxed{\frac{dV_{C_1}(t)}{dt} = \frac{1}{R_1C_1}E(t) - \frac{1}{R_1C_1}V_{C_1}(t) + \frac{1}{R_2C_1}E(t) - \frac{1}{R_2C_1}V_{C_1}(t) - \frac{1}{R_2C_1}V_{C_2}(t)} \quad (5)$$

αυτή είναι η 1η εξίσωση καταστάσεως

επίσης έχουμε:

$$i_3(t) = C_2 \frac{dV_{c_2}(t)}{dt} = \frac{V_2(t)}{R_2}$$

άρα $$\frac{dV_{c_2}(t)}{dt} = \frac{1}{R_2 C_2} V_2(t)$$

ή $$\frac{dV_{c_2}(t)}{dt} = \frac{1}{R_2 C_2} V_1(t) - \frac{1}{R_2 C_2} V_{c_2}(t)$$

ή $$\boxed{\frac{dV_{c_2}(t)}{dt} = \frac{1}{R_2 C_2} E(t) - \frac{1}{R_2 C_2} V_{c_1}(t) - \frac{1}{R_2 C_2} V_{c_2}(t)} \quad (6)$$

(2η εξίσωση καταστάσεως)

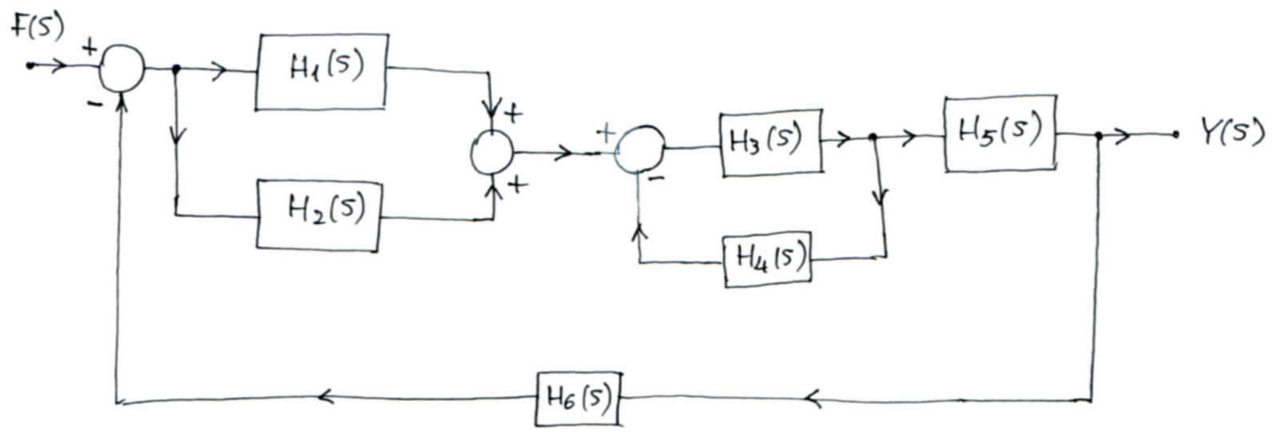
Σε μορφή πινάκων

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} V_{c_1}(t) \\ V_{c_2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} - \frac{1}{R_2 C_1} & -\frac{1}{R_2 C_1} \\ -\frac{1}{R_2 C_2} & -\frac{1}{R_2 C_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} \\ \frac{1}{R_2 C_2} \end{bmatrix} E(t)$$

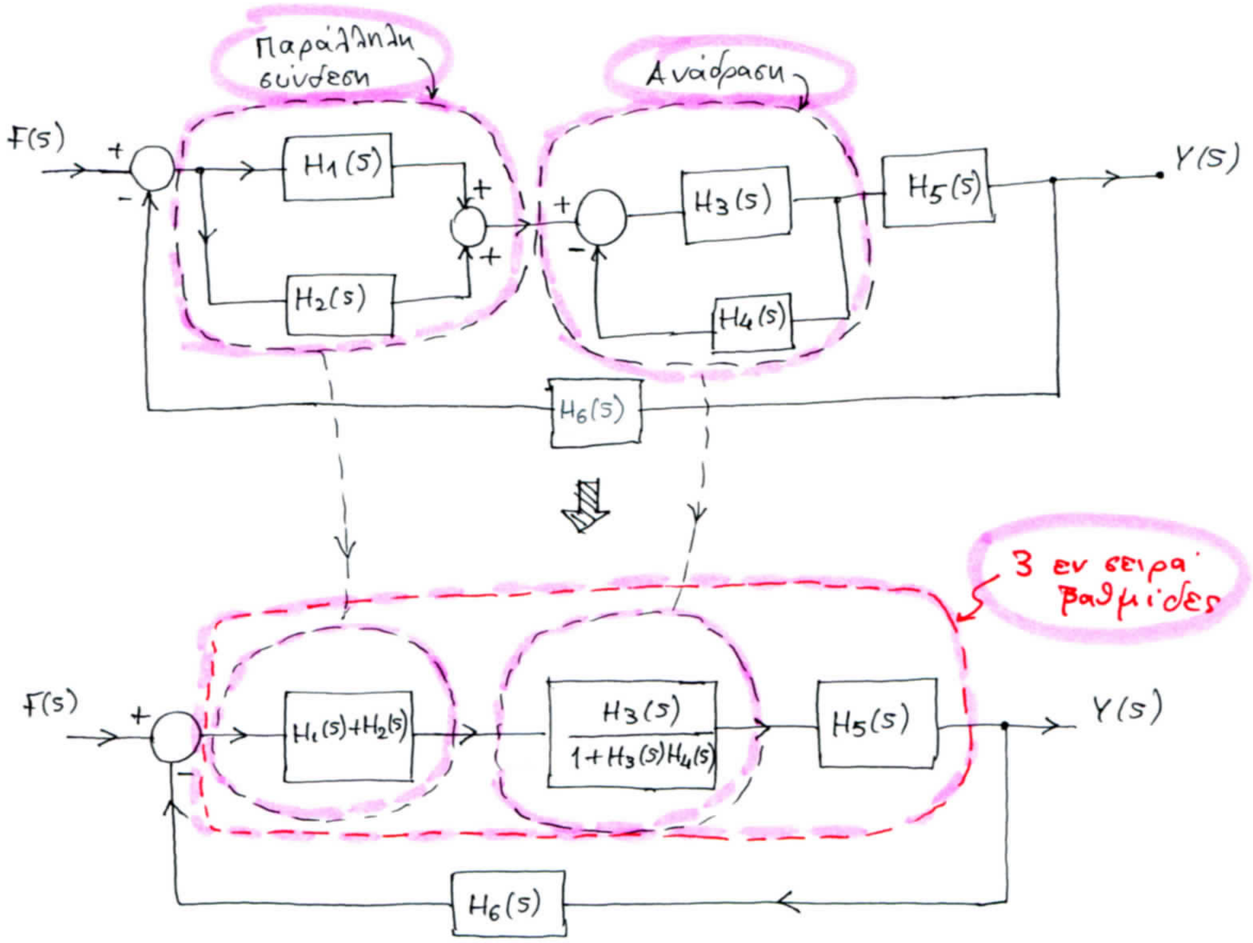
ΑΣΚΗΣΗ 3

Στο παρακάτω σύστημα να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς

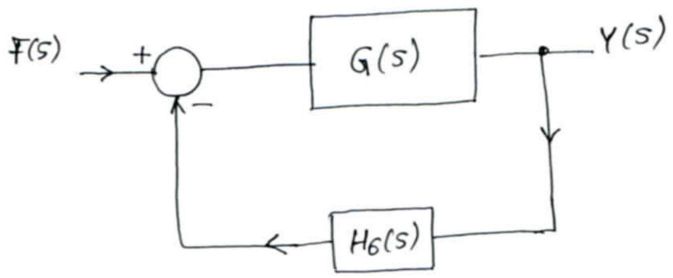
$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)}$$



Απ/ Απλοποιούμε διαδοχικά το διάγραμμα



Άρα θα έχουμε:



οπου $G(s) = \left(H_1(s) + H_2(s)\right)\left(\dfrac{H_3(s)}{1+H_3(s)H_4(s)}\right)H_5(s)$

και τελικα

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{G(s)}{1 + H_6(s)G(s)}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier (Μορφή Β) ενός περιοδικού σήματος τάσεως $v(t)$ είναι:

$$v(t) = 1.25 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(4.502 \sqrt{\frac{1-(-1)^n \cos(1.25n\pi)}{n^2}} \right) \sin\left(\frac{n\pi}{4} t + \vartheta_n\right)$$

όπου $\vartheta_n = \tan^{-1}\left(\dfrac{\sin(1.25n\pi)}{(-1)^n - \cos(1.25n\pi)} \right)$

(ο χρόνος t σε sec και οι γωνίες σε rad)

Να βρεθούν:

α) Η περίοδος T του σήματος

Απ/ Στη μορφή Β το ανάπτυγμα γράφεται

$$v(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\omega_1 t + \vartheta_n)$$

εδώ $n\omega_1 t = n\frac{\pi}{4} t \Rightarrow \omega_1 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{4}$

άρα $\frac{2}{T} = \frac{1}{4} \Rightarrow T = 2 \cdot 4 = 8$ sec

β) Η μέση τιμή του σήματος

Απ/ Προφανώς $V_{μεση} = C_0$ όπου εδώ $C_0 = 1.25$ Volts γ) Η ενεργός τιμή του σήματος (Να κάνετε προσεγγιστικό υπολογισμό εργαζόμενοι μέχρι και την 4η αρμονική)

Απ/ Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του Parseval

όπου: $$V_{\varepsilon\nu} \approx \sqrt{C_0^2 + \left(\frac{C_1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{C_4}{\sqrt{2}}\right)^2} \qquad (*)$$

και οι τιμές θα είναι

$$C_0 = 1.25$$

$$C_1 = 4.502\sqrt{\frac{1+\cos(1.25\pi)}{1}} = 2.436$$

$$C_2 = 4.502\sqrt{\frac{1-\cos(2.5\pi)}{4}} = 2.251$$

$$C_3 = 4.502\sqrt{\frac{1+\cos(3.75\pi)}{9}} = 1.961$$

$$C_4 = 4.502\sqrt{\frac{1-\cos(5\pi)}{16}} = 1.592$$

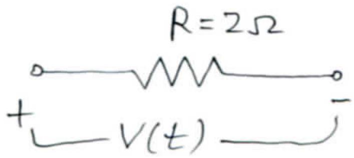
άρα η (*) δίνει

$$V_{\varepsilon\nu} \approx \sqrt{1.25^2 + \left(\frac{2.436}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{2.251}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1.961}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1.592}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$\Rightarrow V_{\varepsilon\nu} \approx 3.202 \text{ Volts}$$

δ) Αν η τάση $V(t)$ εφαρμοστεί στα άκρα μιας ωμικής αντίστασης $R = 2\Omega$, ποια θα είναι η πραγματική ισχύς που θα απορροφήσει η αντίσταση;

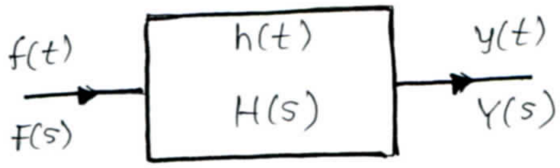
Απ/



$$P_{\varepsilon\nu} = P_{\pi\rho\alpha\gamma\mu} = \frac{V_{\varepsilon\nu}^2}{R} = \frac{(3.202)^2}{2} = 5.126 \text{ W}$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Δίνεται το γραμμικό σύστημα



η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι:

$$h(t) = 4e^{-t} - 4e^{-2t}$$

Να βρεθούν

α) Η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$

β) Η Διαφορική Εξίσωση που συνδέει διέγερση με απόκριση

γ) Η πλήρης απόκριση του συστήματος στο σήμα εισόδου

$$f(t) = e^{-5t}$$

με μηδενικές Α.Σ. $\left(y(0^+) = 0, \quad Dy(0^+) = 0 \right)$

Απ/ α) προφανώς $H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \mathcal{L}\{4e^{-t} - 4e^{-2t}\}$

άρα $H(s) = 4\dfrac{1}{s+1} - 4\dfrac{1}{s+2} = \dfrac{4(s+2) - 4(s+1)}{(s+1)(s+2)}$

οπότε $\boxed{H(s) = \dfrac{Y(s)}{F(s)} = \dfrac{4}{s^2 + 3s + 2}}$

β) Η Δ.Ε. θα προκύψει άμεσως απο την $H(s)$

$$\boxed{(D^2 + 3D + 2)\,y(t) = 4f(t)}$$

γ) Ζητείται η πλήρης απόκριση $y(t)$ στο σήμα εισόδου

$$f(t) = e^{-5t}$$

Μπορεί να βρεθεί <u>με 3 τρόπους</u>

1ος Τρόπος Με χρήση της σχέσης

$$Y(s) = H(s)F(s) \quad \text{και} \quad y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$$

άρα
$$Y(s) = \frac{4}{s^2+3s+2} \cdot F(s)$$

όπου
$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{e^{-5t}\} = \frac{1}{s+5}$$

επομένως
$$Y(s) = \frac{4}{s^2+3s+2} \cdot \left(\frac{1}{s+5}\right)$$

(το s^2+3s+2 έχει ρίζες $s_1=-1$, $s_2=-2$)

ή
$$Y(s) = \frac{4}{(s+1)(s+2)} \cdot \left(\frac{1}{s+5}\right)$$

ή
$$Y(s) = \frac{4}{(s+1)(s+2)(s+5)} = \frac{4}{s^3+8s^2+17s+10}$$

$A(s) = 4$

$B(s) = s^3 + 8s^2 + 17s + 10$, ρίζες $s_1=-1$, $s_2=-2$, $s_3=-5$ (γιατί;)

$B'(s) = 3s^2 + 16s + 17$

άρα
$$Y(s) = \frac{A(s_1)}{B'(s_1)}\left(\frac{1}{s-s_1}\right) + \frac{A(s_2)}{B'(s_2)}\left(\frac{1}{s-s_2}\right) + \frac{A(s_3)}{B'(s_3)}\left(\frac{1}{s-s_3}\right)$$

ή
$$Y(s) = \frac{4}{4}\left(\frac{1}{s+1}\right) + \frac{4}{-3}\left(\frac{1}{s+2}\right) + \frac{4}{12}\left(\frac{1}{s+5}\right)$$

και
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{4}{4}\mathcal{L}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \frac{4}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+5}\right\}$$

άρα
$$\boxed{y(t) = e^{-t} - \frac{4}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-5t}}$$

$\boxed{2^{\text{ος}} \text{ τρόπος}}$ Με επίλυση της Δ.Ε.

$$(D^2 + 3D + 2)y(t) = 4f(t)$$

όπου $f(t) = e^{-5t}$

και Α.Σ. $y(0^+) = 0$, $Dy(0^+) = 0$

άρα θα έχουμε:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Δ.Ε.} & (D^2 + 3D + 2)y(t) = 4e^{-5t} \\ \text{Α.Σ.} & y(0^+) = 0, \quad Dy(0^+) = 0 \end{array}\right\}$$

αντιστ. ομογενής

$$(D^2 + 3D + 2)y(t) = 0$$

χαρακτ. εξίσωση $x^2 + 3x + 2 = 0$ ρίζες $x_1 = -1$, $x_2 = -2$

άρα $y_{ομογ}(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$

αναζητώ $y_{μερ}(t)$ της μορφής $y_{μερ}(t) = k e^{-5t}$

θα πρέπει:

$$D^2 y_{μερ}(t) + 3D y_{μερ}(t) + 2 y_{μερ}(t) = 4e^{-5t}$$

ή

$$25k e^{-5t} - 15k e^{-5t} + 2k e^{-5t} = 4e^{-5t}$$

άρα $12k = 4 \Rightarrow k = \frac{1}{3}$

συνεπώς $y_{μερ}(t) = \frac{1}{3} e^{-5t}$

και $y(t) = y_{ομογ}(t) + y_{μερ}(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + \frac{1}{3} e^{-5t}$

εφαρμόζω Α.Σ.

$$\left.\begin{array}{l} y(0^+) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 + \frac{1}{3} = 0 \\ Dy(0^+) = 0 \Rightarrow -c_1 - 2c_2 - \frac{5}{3} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c_1 = 1 \\ c_2 = -\frac{4}{3} \end{array}\right\}$$

άρα τελικά:

$$\boxed{y(t) = e^{-t} - \frac{4}{3} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^{-5t}}$$

<u>ίδια λύση</u>

3ος τρόπος

Με το ολοκλήρωμα της συνέλιξης

$$y(t)=\int_0^t h(t-\tau)f(\tau)d\tau=\int_0^t h(\tau)f(t-\tau)d\tau$$

χρησιμοποιώ την 2η έκφραση

άρα: $y(t)=\int_0^t h(\tau)f(t-\tau)d\tau$ όπου $h(\tau)=4e^{-\tau}-4e^{-2\tau}$, $f(t-\tau)=e^{-5(t-\tau)}$

$$y(t)=\int_0^t (4e^{-\tau}-4e^{-2\tau})e^{-5(t-\tau)}d\tau=$$

$$=\int_0^t (4e^{-\tau}-4e^{-2\tau})e^{-5t}e^{5\tau}d\tau=$$

$$=\int_0^t 4e^{-5t}e^{-\tau}e^{5\tau}d\tau-\int_0^t 4e^{-5t}e^{-2\tau}e^{5\tau}d\tau$$

άρα $y(t)=4e^{-5t}\int_0^t e^{4\tau}d\tau-4e^{-5t}\int_0^t e^{3\tau}d\tau$

ή $y(t)=4e^{-5t}\left[\frac{1}{4}e^{4\tau}\right]_0^t-4e^{-5t}\left[\frac{1}{3}e^{3\tau}\right]_0^t$

ή $y(t)=4e^{-5t}\left(\frac{1}{4}e^{4t}-\frac{1}{4}\right)-4e^{-5t}\left(\frac{1}{3}e^{3t}-\frac{1}{3}\right)$

$$y(t)=e^{-t}-e^{-5t}-\frac{4}{3}e^{-2t}+\frac{4}{3}e^{-5t}$$

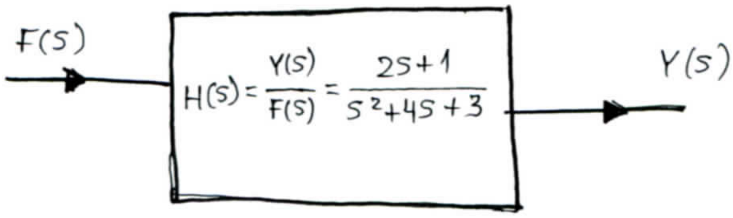
και τελικά

$$\boxed{y(t)=e^{-t}-\frac{4}{3}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{-5t}}$$

ίδια λύση

ΑΣΚΗΣΗ 6

Ένα γραμμικό σύστημα έχει την ακόλουθη συνάρτηση μεταφοράς



έστω ότι το σήμα εισόδου, στο πεδίο του χρόνου, είναι

$$f(t)=10e^{-0.5t}\sin(5t+30^\circ)$$

(α) Ποιά είναι στην περίπτωση αυτή η τιμή της μιγαδικής συχνότητας s;

Απ/ στο σήμα $f(t)=A_m e^{\sigma t}\sin(\omega t+\varphi)$

το s έχει τιμή $s=\sigma+j\omega$

άρα εδώ $\boxed{s=-0.5+j5}$

(β) Υπολογίστε την <u>μόνιμη απόκριση</u> του συστήματος στο σήμα $f(t)$

Απ/ Αν $f(t)=10e^{-0.5t}\sin(5t+30^\circ)$

ο phasor $F(s)$ θα γράφεται $F(s)=10e^{j30^\circ}$

(με $s=-0.5+j5$)

άρα $Y(s)=H(s)F(s)$

ή $$Y(s)=\frac{2s+1}{s^2+4s+3}10e^{j30^\circ}=\frac{2(-0.5+j5)+1}{(-0.5+j5)^2+4(-0.5+j5)+3}\cdot 10e^{j30^\circ}$$

ή $$Y(s)=\frac{-1+j10+1}{0.25-25-j5-2+j20+3}10e^{j30^\circ}=\frac{j10}{-23.75+j15}10e^{j30^\circ}=3.56\,e^{-j27.7^\circ}$$

άρα $$\boxed{y_{MON}(t)=3.56\,e^{-0.5t}\sin(5t-27.7^\circ)}$$