Εφαρμογές - Παραδείγματα: Δ.Ε ($1^{ης}$, $2^{ας}$ ταξ.) υπολογ $Z(D)$

① Παραδείγματα Δ.Ε.

ΠΑΡΑΔ 1.

Να λυθεί η Δ.Ε.

$$\left\{\begin{aligned} (2D+5)y(t) &= 8\sin\left(20t+\frac{\pi}{3}\right) \\ y(0^+) &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Λύση:

Χαρακτ. εξίσωση $\quad 2s+5=0 \quad$ ρίζα $\quad s_1 = -\frac{5}{2}$

άρα $\quad \boxed{y_{ομογ}(t) = Ce^{-\frac{5}{2}t}}$

αναζητώ $\quad y_{μερ}(t) = K_1\sin 20t + K_2\cos 20t$

άρα $\quad Dy_{μερ}(t) = 20K_1\cos 20t - 20K_2\sin 20t$

αντικαθ στη Δ.Ε.

$$2Dy_{μερ}(t) + 5y_{μερ}(t) = 8\sin\left(20t+\frac{\pi}{3}\right)$$

άρα $\quad 40K_1\cos 20t - 40K_2\sin 20t + 5K_1\sin 20t +$

$$+ 5K_2\cos 20t = 8\sin\left(20t+\frac{\pi}{3}\right)$$

από την ταυτότητα:

$$\boxed{\sin(\alpha+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a}$$

έχω: $\quad (5K_1 - 40K_2)\sin 20t + (40K_1 + 5K_2)\cos 20t =$

$$= 8\sin 20t\cos\frac{\pi}{3} + 8\cos 20t\sin\frac{\pi}{3}$$

ή

$$\left(5K_1 - 40K_2 - 8\cos\frac{\pi}{3}\right)\sin 20t + \left(40K_1 + 5K_2 - 8\sin\frac{\pi}{3}\right)\cos 20t =$$
$$= 0 \quad \forall t$$

άρα πρέπει

$$\left\{\begin{aligned} 5K_1 - 40K_2 &= 8\cos\frac{\pi}{3} = 4 \\ 40K_1 + 5K_2 &= 8\sin\frac{\pi}{3} = 8\frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \end{aligned}\right\}$$

(σύστημα 2×2)

λύση $K_1 = \dfrac{20+160\sqrt{3}}{1625}$, $K_2 = \dfrac{20\sqrt{3}-160}{1625}$

ή $\underline{K_1 = 0.182848}$ $\underline{K_2 = -0.077144}$

άρα $\boxed{y_{μερ} = 0.182848\sin 20t - 0.077144\cos 20t}$

ή ισοδύναμα

$\boxed{y_{μερ} = 0.198455\sin(20t - 22.87^\circ)}$ (*)

όπου έγινε χρήση της ταυτότητας:

$$a\sin\omega t + b\cos\omega t = \underbrace{\sqrt{a^2+b^2}}_{\text{πλάτος}}\sin\left(\omega t + \underbrace{\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)}_{\text{φάση}}\right)$$

ίδιο ω

(*) Β' τρόπος (με μιγαδική άλγεβρα)

$$\bar{Y} = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)}\bar{F} \rightarrow \bar{Y} = \frac{8}{2(j\omega)+5}\,1e^{j\frac{\pi}{3}}$$

$$\bar{Y} = \frac{8}{2(j20)+5}\,1\angle 60^\circ = 0.198455\angle -22.87^\circ$$

Συνεπώς

$$y_{γεν}(t) = y_{ομογ}(t) + y_{μερ}(t)$$

$$= c e^{-\frac{5}{2}t} + 0.198455 \sin(20t - 22.87°)$$

για να βρω $y_{αδ}(t) = y(t)$

εφαρμόζω την Α.Σ.

$$\boxed{y(0^+) = 1}$$

άρα:

$$y(0^+) = c + 0.198455 \sin(-22.87°) = 1$$

ή $\quad c - 0.07713 = 1$

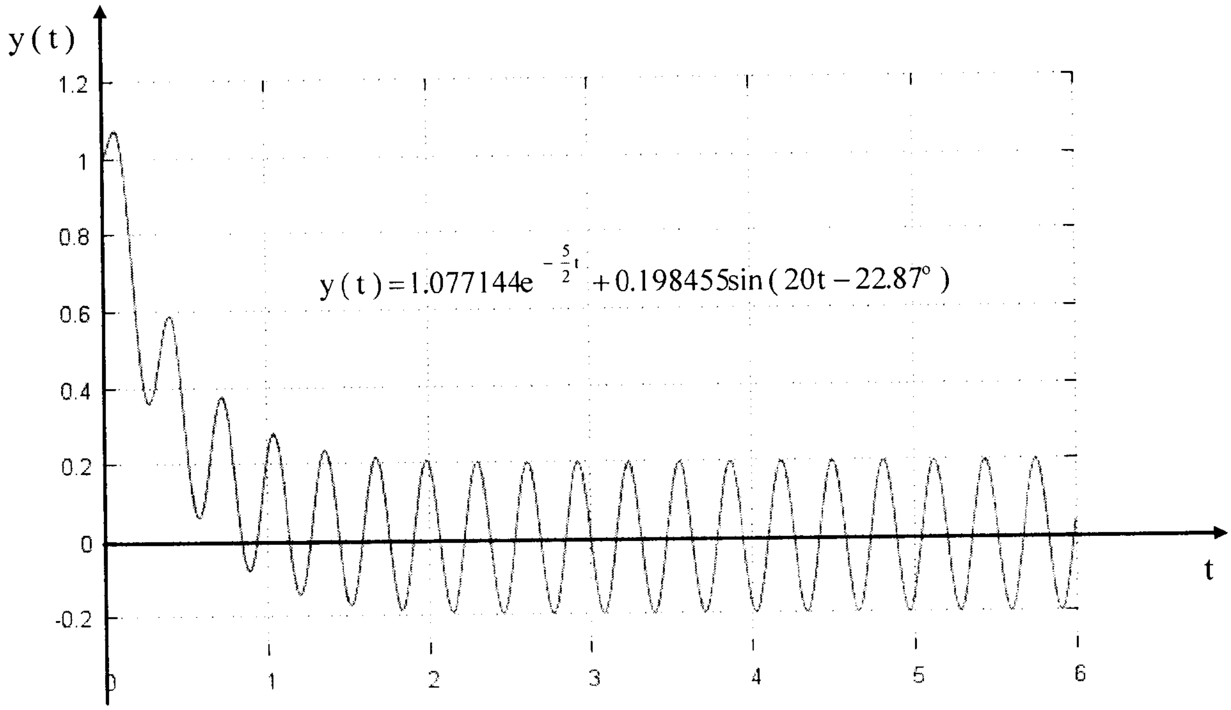
$$c = 1.07713$$

άρα

$$\boxed{y(t) = 1.07713\, e^{-\frac{5}{2}t} + 0.198455 \sin(20t - 22.87°)}$$

ακολουθεί γραφική παράσταση της λύσης $y(t)$

(<u>Παρατήρηση</u>: εξετάστε αν η $y(t)$ επαληθεύει πράγματι την Δ.Ε. $(2D+5)y(t) = 8\sin(20t+\frac{\pi}{3})$ και την Α.Σ. $y(0^+)=1$
Αντικαταστήστε την $y(t)$ στη Δ.Ε και κάνετε τις πράξεις...)


y(t)
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
$y(t) = 1.077144e^{-\frac{5}{2}t} + 0.198455\sin(20t - 22.87^\circ)$
0
1
2
3
4
5
6
t

ΠΑΡΑΔ. 2

Να λυθεί η Δ.Ε.

$$\left\{\begin{array}{l}(D^2 + D + 1)y(t) = 2\sin(5t + 25^\circ) \\ y(0^+) = 0 \quad , \quad Dy(0^+) = -1\end{array}\right\}$$

Λύση:

Χαρακτ. εξίσωση $\quad s^2 + s + 1 = 0$

ρίζες $\quad s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$

άρα

$$\boxed{y_{ομογ}(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(c_1 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)}$$

αναζητώ

$$y_{μερ}(t) = K_1 \sin 5t + K_2 \cos 5t$$

$$Dy_{μερ}(t) = 5K_1 \cos 5t - 5K_2 \sin 5t$$

$$D^2 y_{μερ}(t) = -25K_1 \sin 5t - 25K_2 \cos 5t$$

Αντικαθιστώ στην Δ.Ε.

$$D^2 y_{μερ}(t) + Dy_{μερ}(t) + y_{μερ}(t) = 2\sin(5t + 25^\circ)$$

άρα:

$$-25K_1 \sin 5t - 25K_2 \cos 5t + 5K_1 \cos 5t - 5K_2 \sin 5t +$$

$$+ K_1 \sin 5t + K_2 \cos 5t = 2\sin(5t + 25^\circ)$$

ή

$$\sin 5t\left(-25k_1 - 5k_2 + k_1\right) + \cos 5t\left(-25k_2 + 5k_1 + k_2\right) =$$

$$= 2\sin(5t + 30^\circ) = 2\sin 5t \cos 25^\circ + 2\cos 5t \sin 25^\circ$$

εδώ $\cos 25^\circ = 0.90630$

$\sin 25^\circ = 0.42262$

άρα

$$\sin 5t\left(-24k_1 - 5k_2\right) + \cos 5t\left(-24k_2 + 5k_1\right) =$$

$$= 1.8126 \sin 5t + 0.84524 \cos 5t$$

ή

$$\left.\begin{aligned} -24k_1 - 5k_2 &= 1.8126 \\ 5k_1 - 24k_2 &= 0.84524 \end{aligned}\right\} \text{ λύση } \quad \begin{aligned} k_1 &= -0.06535 \\ k_2 &= -0.04883 \end{aligned}$$

άρα

$$\boxed{y_{μερ}(t) = -0.06535 \sin 5t - 0.04883 \cos 5t}$$

ή

$$\boxed{y_{μερ}(t) = 0.081578 \sin(5t - 143.2^\circ)}$$

άρα

$$y_{γεν}(t) = y_{ομογ}(t) + y_{μερ}(t) =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}t}\left(c_1 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) -$$

$$- 0.06535 \sin(5t) - 0.04883 \cos(5t)$$

$$Dy_{γεν}(t) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\left(c_1 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) +$$

$$+ e^{-\frac{1}{2}t}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) -$$

$$- 5 \times 0.06535 \cos(5t) + 5 \times 0.04883 \sin(5t)$$

Εφαρμογή Α.Σ. (για προσδιορισμό των c_1, c_2)

$$\left.\begin{aligned} y(0^+) = 0 &\Rightarrow c_2 - 0.04883 = 0 \\ Dy(0^+) = -1 &\Rightarrow -\frac{1}{2}c_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}c_1 - 0.32675 = -1 \end{aligned}\right\}$$

προκύπτει $\quad c_1 = -0.74921 \quad , \quad c_2 = 0.04883$

άρα

$$\boxed{\begin{aligned} y(t) = {} & e^{-\frac{1}{2}t}\left(-0.74921 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + 0.04883 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) \\ & - 0.06535 \sin(5t) - 0.04883 \cos(5t) \end{aligned}}$$

ή ισοδύναμα, κάνοντας χρήση των σχέσεων

$$-0.74921 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + 0.04883 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) =$$

$$= 0.7508 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + 176.3°\right)$$

και

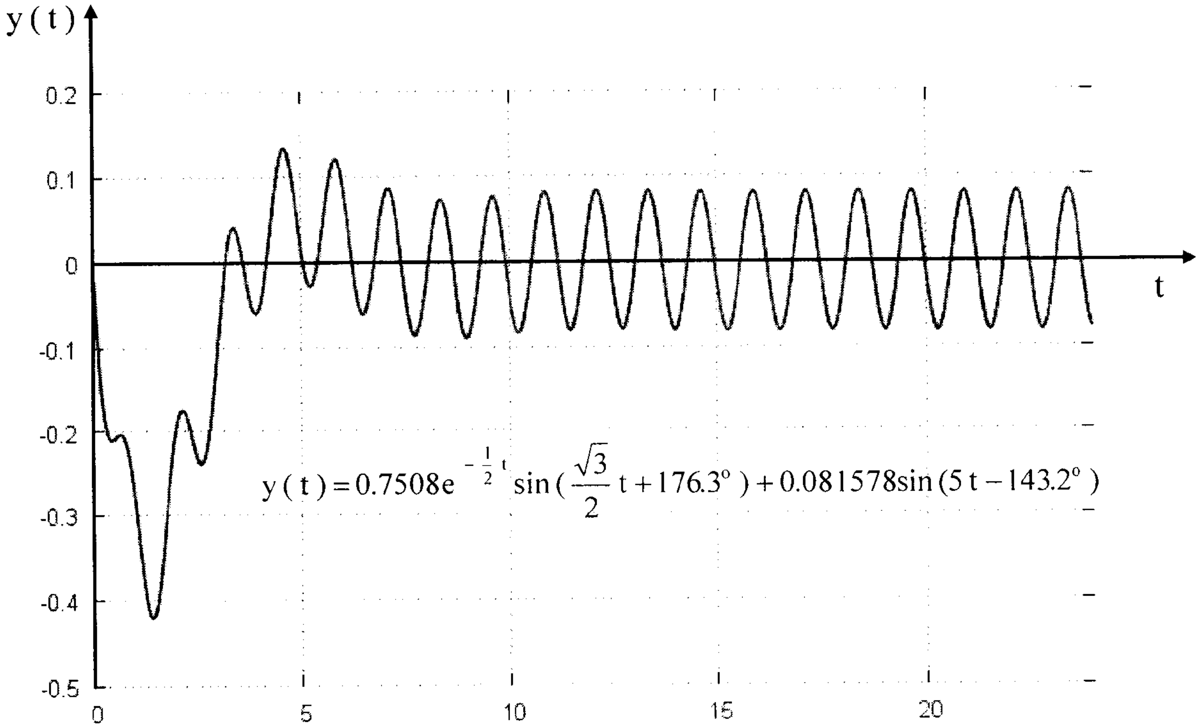
$$-0.06535 \sin(5t) - 0.04883 \cos(5t) =$$

$$= 0.081578 \sin(5t - 143.2°)$$

έχουμε

$$\boxed{y(t) = 0.7508\, e^{-\frac{1}{2}t} \underline{\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + 176.3°\right)} + 0.081578 \sin(5t - 143.2°)}$$

ακολουθεί γραφική παράσταση της $y(t)$

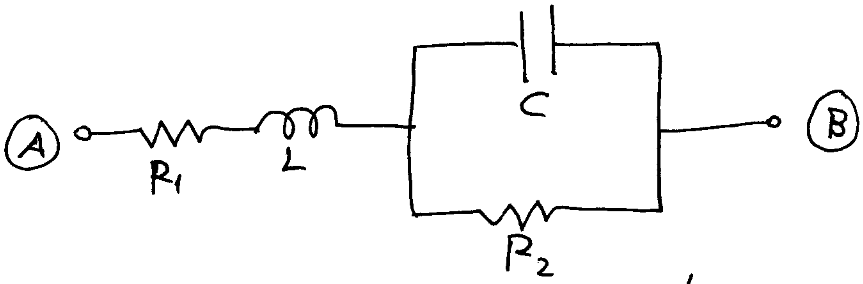

y(t)
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
-0.5
0
5
10
15
20
t
$y(t)=0.7508e^{-\frac{1}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t+176.3^{\circ})+0.081578\sin(5t-143.2^{\circ})$

2

Παραδείγματα με $Z(D)$

ΠΑΡΑΔ 1.

Στην παρακάτω συνδεσμολογία να βρεθεί η $Z_{AB}(D)$



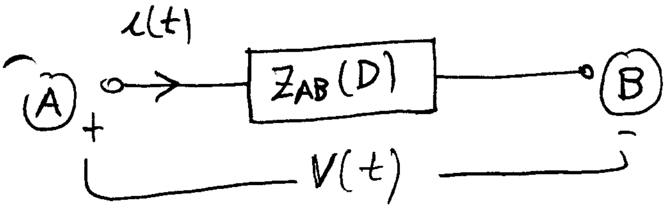
$$Z_{AB}(D) = R_1 + LD + \frac{R_2 \frac{1}{CD}}{R_2 + \frac{1}{CD}}$$

$$= R_1 + LD + \frac{\frac{R_2}{CD}}{\frac{R_2CD+1}{CD}} = R_1 + LD + \frac{R_2}{R_2CD+1}$$

ή

$$Z_{AB}(D) = \frac{R_1R_2CD + R_1 + R_2LCD^2 + LD + R_2}{R_2CD+1} = \frac{P(D)}{Q(D)}$$ (ρητή συνάρτηση του D)

δηλαδή



$$Z_{AB}(D) = \frac{V(t)}{i(t)} = \frac{R_2LCD^2 + (R_1R_2C+L)D + R_1 + R_2}{R_2CD+1}$$

αν θεωρήσω: $\boxed{\text{γνωστό}}$ το $V(t)$ και $\boxed{\text{άγνωστο}}$ το $i(t)$

τότε

$$\left[R_2LCD^2 + (R_1R_2C+L)D + R_1 + R_2\right]\underbrace{i(t)}_{\text{άγνωστο}} = \left[R_2CD+1\right]\underbrace{V(t)}_{\text{γνωστό}}$$

<u>Δ.Ε. 2ας τάξεως</u>

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ! στην τάξη της Δ.Ε.</u> (τάξη = αρ(L) + αρ(C)) εφ' όσον

όχι βρόχοι με πυκνωτές και πηγές τάσεως,
κόμβοι με πηνία και πηγές ρεύματος

Προσέξτε τις φυσικές διαστάσεις (μονάδες) στην ισότητα (Δ.Ε.)

$$\Big[\underbrace{R_2LCD^2}_{\Omega} + \underbrace{(R_1R_2C + L)D}_{\Omega} + \underbrace{R_1+R_2}_{\Omega}\Big]\underbrace{i(t)}_{Amp} = \Big[\underbrace{R_2CD}_{\text{αδιαστ.}} + \underbrace{1}_{\text{αδιαστ.}}\Big]\underbrace{V(t)}_{Volt}$$

Πράγματι

το $D = \frac{d\ldots}{dt}$ έχει φυσικές διαστάσεις $\frac{1}{sec}$

το $D^2 = \frac{d\ldots}{dt^2} \sim \frac{1}{sec^2}$

το $C = Farad = \frac{Cb}{V} = \frac{A \cdot sec}{V}$, το $L = H = \frac{V \cdot sec}{A}$

άρα

$$R_2CD \rightarrow \Omega \cdot Farad \cdot \frac{1}{sec} = \frac{\cancel{V}}{\cancel{A}} \cdot \frac{\cancel{A} \cdot \cancel{sec}}{\cancel{V}} \frac{1}{\cancel{sec}} = \text{αδιάστατ.}$$

το $(R_1R_2C + L)D \rightarrow \left(\Omega^2 \cdot Farad + \frac{V \cdot sec}{A}\right)\frac{1}{sec}$

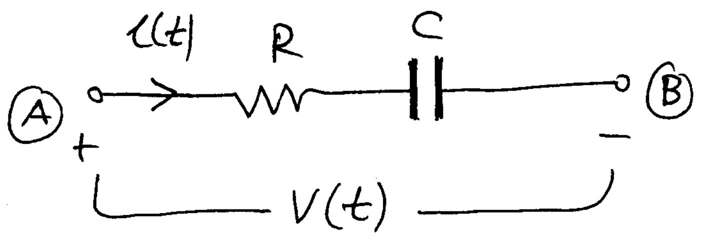
$$= \left(\frac{V^{\cancel{2}}}{A^{\cancel{2}}} \frac{\cancel{A} \cdot \cancel{sec}}{\cancel{V}} + \frac{V \cdot \cancel{sec}}{A}\right)\frac{1}{\cancel{sec}}$$

$$= \frac{V}{A} = \Omega$$

όμοια $R_2LCD^2 \rightarrow \Omega$ (γιατί;;)

ΠΑΡΑΔ. 2

Δίδεται η συνδεσμολογία (απλό κύκλωμα R-C)



$R = 1\Omega$

$C = 0.5F$

αν $V(t) = 10\sin(2t + 30°)$

βρείτε το ρεύμα $i(t)$ στη <u>ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ</u>

(ΠΡΟΣΟΧΗ ΕΔΩ! η <u>ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ</u> εκφράζεται από την <u>μερική λύση</u> της Δ.Ε. που συνδέει το $i(t)$ με το $V(t)$)

$$Z_{AB}(D) = \frac{V(t)}{i(t)} = R + \frac{1}{CD} = \frac{RCD+1}{CD} = \frac{V(t)}{i(t)}$$

άρα $(RCD + 1)\,i(t) = CDV(t)$

αντικαθιστώ τιμές

$$(0.5D + 1)\,i(t) = 0.5D\big(10\sin(2t + 30°)\big) \quad (\Delta.E.)$$

ή

$$\boxed{(0.5D + 1)\,i(t) = 10\cos(2t + 30°)}$$

ψάχνω για $i_{\mu\varepsilon\rho}(t) = k_1 \sin 2t + k_2 \cos 2t$

άρα $D i_{\mu\varepsilon\rho}(t) = 2k_1 \cos 2t - 2k_2 \sin 2t$

αντικαθιστώ στην Δ.Ε.

$$(0.5D + 1)\, i_{μερ}(t) = 10\cos(2t + 30°)$$

ή

$$0.5\,D\, i_{μερ}(t) + i_{μερ}(t) = 10\cos(2t + 30°)$$

άρα

$$0.5 \times 2K_1 \cos 2t - 0.5 \times 2K_2 \sin 2t + K_1 \sin 2t + K_2 \cos 2t =$$
$$= 10\cos(2t + 30°)$$

ή

$$\sin 2t\,(K_1 - K_2) + \cos 2t\,(K_1 + K_2) =$$
$$= 10\cos 2t \cos 30° - 10 \sin 2t \sin 30°$$

έγινε χρήση της ταυτότητας

$$\cos(\alpha + b) = \cos\alpha \cos b - \sin\alpha \sin b$$

άρα

$$\left.\begin{aligned} K_1 - K_2 &= -10\sin 30° = -5 \\ K_1 + K_2 &= 10\cos 30° = 8.66025 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} K_1 &= 1.830125 \\ K_2 &= 6.830125 \end{aligned}$$

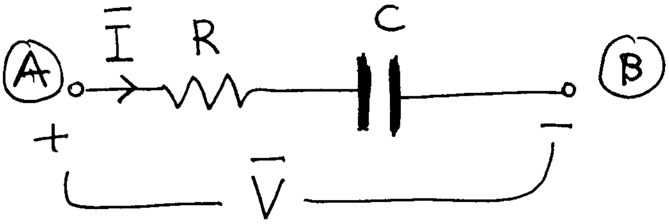
άρα

$$\boxed{\begin{aligned} i_{μερ}(t) &= 1.830125 \sin 2t + 6.830125 \cos 2t = \\ &= 7.071065 \sin(2t + 75°) \quad \text{Amp} \end{aligned}}$$

ρεύμα $i(t)$ στη <u>ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ</u>

Λύση με χρήση των phasors

$$\bar{Z}_{AB}(\omega) = R + \frac{1}{j\omega C} = \frac{j\omega RC + 1}{j\omega C} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}}$$



αριθμητικές τιμές

$R = 1\,\Omega$, $C = 0.5\,F$, $\omega = 2\, r/s$

$$\bar{Z}_{AB}(\omega) = \frac{j+1}{j} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} \Rightarrow \bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_{AB}(\omega)}$$

όπου $\bar{V} = 10\angle 30^\circ$ (διότι $v(t) = 10\sin(2t + 30^\circ)$)

άρα $$\bar{I} = \frac{10\angle 30^\circ}{\frac{1+j}{j}} = \frac{10\angle 30^\circ}{1-j} = \frac{10\angle 30^\circ}{\sqrt{2}\angle -45^\circ} = 7.07106\angle 75^\circ$$

άρα $i_{\mu\epsilon\rho} = 7.07106\sin(2t + 75^\circ)$ Amp

ίδιο αποτέλεσμα!