

**ΣΧΟΛΗ Ν. ΔΟΚΙΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΤΕΧΝΙΑΣ & Η/Υ**

**ΘΕΩΡΙΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ ΙΙ
και εισαγωγή στα Σ.Α.Ε.**

**Δρ. Α. ΜΑΓΟΥΛΑΣ
Επικ. Καθηγητής Σ.Ν.Δ.**

2014

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΥΠΟΒΑΘΡΟΥ

1.1	Μιγαδικοί αριθμοί	1
1.1.1	Ορισμός φανταστικής μονάδας	1
1.1.2	Μιγαδικοί αριθμοί – μιγαδικό επίπεδο	1
1.1.3	Πράξεις μεταξύ μιγαδικών αριθμών.	2
1.1.4	Απόλυτη τιμή (ή μέτρο) μιγαδικού αριθμού	4
1.1.5	Πολική – εκθετική μορφή μιγαδικού αριθμού	4
1.1.6	Υπολογισμός γινομένου και πηλίκου μιγαδικών σε εκθετική μορφή	6
1.1.7	Έκφραση συζυγούς και αντιστρόφου μιγαδικού σε εκθετική μορφή	7
1.1.8	Δυνάμεις μιγαδικών αριθμών	7
1.1.9	Ρίζες μιγαδικών αριθμών	8
1.1.10	Στρεφόμενοι μιγαδικοί αριθμοί	8
1.2	Η ημιτονοειδής συνάρτηση.	10
1.2.1	Γενικά για την ημιτονοειδή συνάρτηση.	10
1.2.2	Παράσταση ημιτονοειδών συναρτήσεων με χρήση μιγαδικών αριθμών	12
1.2.3	Εφαρμογές.	14
1.3	Η εκθετική συνάρτηση	17
1.3.1	Γενικά για την εκθετική συνάρτηση	17
1.3.2	Μορφές εκθετικών συναρτήσεων	17
1.4	Γραμμική ανεξαρτησία συναρτήσεων	19
1.4.1	Ορισμός	19
1.4.2	Παραδείγματα	19
1.5	Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές	20
1.5.1	Εισαγωγικά	20
1.5.2	Γενικός τρόπος επίλυσης γραμμικής Δ.Ε	21
1.5.3	Επίλυση γραμμικής Δ.Ε. 1 ^{ης} τάξεως	22
1.5.4	Παραδείγματα επίλυσης γραμμικών Δ.Ε. 1 ^{ης} τάξεως	24
1.5.5.	Επίλυση γραμμικής Δ.Ε. 2 ^{ας} τάξεως	30
1.5.6	Παραδείγματα επίλυσης γραμμικών Δ.Ε. 2 ^{ας} τάξεως	31
1.5.7	Επίλυση γραμμικών Δ.Ε. 3 ^{ης} και ανωτέρας τάξεως	37

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ

2.1	Η έννοια του συστήματος	41
2.1.1	Ορισμός του συστήματος	41
2.1.2	Κατηγορίες συστημάτων	42
2.1.3	Προβλήματα συστημάτων	43
2.2	Το ηλεκτρικό στοιχείο	46

2.2.1	Ορισμός του ηλεκτρικού στοιχείου – φορές αναφοράς	46
2.2.2	Το ηλεκτρικό στοιχείο στο πεδίο του χρόνου	47
2.2.3	Τα 3 βασικά ηλεκτρικά στοιχεία	48
2.2.4	Η έννοια της τελέστριας σύνθετης αντίστασης $Z (D)$	50
2.3	Διαιρέτης τάσεως και ρεύματος	54
2.3.1	Εισαγωγικά	54
2.3.2	Διαιρέτης τάσεως	54
2.3.3	Διαιρέτης ρεύματος	55
2.4	Θεώρημα Millman	56
2.5	Θεώρημα Επαλληλίας	57

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΣΗΜΑΤΑ

3.1	Ορισμός του σήματος	59
3.2	Κατηγορίες σημάτων	59
3.3	Παράμετροι σημάτων	60
3.4	Στοιχειώδη σήματα	61
3.5	Στοιχειώδη ανώμαλα σήματα	61
3.5.1	Μοναδιαία βηματική συνάρτηση $u (t)$	62
3.5.2	Μοναδιαία αναρριχητική συνάρτηση $r (t)$	62
3.5.3	Μοναδιαία κρουστική συνάρτηση $\delta (t)$ ή συνάρτηση του Dirac	63
3.6	Παράγωγος ασυνεχούς συναρτήσεως	65
3.7	Παραδείγματα κατασκευής συνθετωτέρων σημάτων με βάση τα στοιχειώδη ανώμαλα σήματα	66

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 ΜΕΛΕΤΗ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

4.1	Εισαγωγικά	73
4.2	Το πρόβλημα αναλύσεως δικτύου	74
4.3	Παρατηρήσεις σχετικά με τις αρχικές συνθήκες	75

4.4	Μεταβατική και μόνιμη απόκριση	76
4.5	Συνέχεια ρεύματος πηνίου και τάσεως πυκνωτή	77
4.6	Βηματική απόκριση δικτύου	81
4.7	Κρουστική απόκριση δικτύου	81
	Τρόπος υπολογισμού της κρουστικής απόκρισης	82
	Κρουστική απόκριση συστήματος 1 ^{ης} τάξεως	84
	Κρουστική απόκριση συστήματος 2 ^{ας} τάξεως	88
	Γενική μεθοδολογία υπολογισμού κρουστικής απόκρισης	91
4.8	Παραδείγματα υπολογισμού αποκρίσεων δικτύων	92
	Παράδειγμα 1 (κύκλωμα R-C)	92
	Παράδειγμα 2 (κύκλωμα R-L)	97
	Παράδειγμα 3 (κύκλωμα R-L-C σειράς)	102
	Παράδειγμα 4	112
	Παράδειγμα 5	118
4.9	Περιγραφή δικτύων και συστημάτων με χρήση των Μεταβλητών Καταστάσεως	122
4.9.1	Εισαγωγικά	122
4.9.2	Διατύπωση των εξισώσεων καταστάσεως	123
4.9.3	Διατύπωση των εξισώσεων καταστάσεως για γραμμικό σύστημα μίας εισόδου – μίας εξόδου	126
4.9.4	Εξισώσεις καταστάσεως σε ηλεκτρικά δίκτυα	128

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 ΜΕΛΕΤΗ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ ΣΤΗΝ ΗΜΙΤΟΝΙΚΗ ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ

5.1	Γενικά για την Ημιτονική Μόνιμη Κατάσταση (Η.Μ.Κ.)	133
5.2	Παραστατικοί μιγαδικοί (phasors)	133
5.3	Σχέσεις τάσεως ρεύματος των τριών βασικών ηλεκτρικών στοιχείων στην Η.Μ.Κ.	135
5.3.1	Ωμική αντίσταση R	135
5.3.2	Πηνίο με αυτεπαγωγή L	136
5.3.3	Πυκνωτής με χωρητικότητα C	136
5.4	Σύνθετη αντίσταση στην Η.Μ.Κ.	136
5.5	Ισχύς στην Η.Μ.Κ.	139

5.6	Εύρεση της μόνιμης απόκρισης γραμμικού δικτύου σε ημιτονοειδή διέγερση	141
5.7	Η συνάρτηση μεταφοράς	145
5.8	Παραδείγματα	146

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 ΑΝΑΛΥΣΗ FOURIER ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ

6.1	Ανάλυση Fourier περιοδικών συναρτήσεων	155
	Εισαγωγικά	155
	Σειρά Fourier - τριγωνομετρικές μορφές A και B	155
	Μιγαδική μορφή σειράς Fourier	159
6.2	Παραδείγματα αναπτυγμάτων Fourier περιοδικών συναρτήσεων	162
6.3	Φάσματα Fourier	182
6.4	Τύπος του Parseval	186
6.5	Παράμετροι σημάτων αναλυμένων σε σειρά Fourier	187
6.5.1	Ποσοστό ισχύος της k-οστης αρμονικής και ζώνης αρμονικών	187
6.5.2	Υπόλοιπο αρμονικών	187
6.5.3	Περιεχόμενο αρμονικών	187
6.6	Αριθμητικό παράδειγμα αναλύσεως σήματος σε σειρά Fourier	191
6.7	Παράδειγμα επίλυσης ηλεκτρικού δικτύου με χρήση ανάλυσης Fourier	194
6.7.1	Εύρεση αναπτυγμάτων Fourier του σήματος εισόδου $E(t)$	195
6.7.2	Επίλυση του κυκλώματος	202
6.7.3	Υπολογισμός ισχύος στην αντίσταση R	212
6.8	Μετασχηματισμός Fourier	213
6.9	Διακριτά σήματα και Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier	217
6.9.1	Γενικά για τα διακριτά σήματα	217
6.9.2	Διακριτοποίηση σήματος	218
6.9.3	Ψηφιοποίηση σήματος	221
6.9.4	Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (D.F.T.)	223
6.9.5	Σχέση του διακριτού μετασχηματισμού Fourier με τις σειρές Fourier	226
6.9.6	Παραδείγματα εφαρμογής του Διακριτού Μετασχηματισμού Fourier	227

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 ΜΕΛΕΤΗ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ ΣΤΗΝ ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ (Ε. Μ. Κ.)

7.1	Γενικά για την Εκθετική Μόνιμη Κατάσταση (Ε.Μ.Κ.)	235
7.2	Χρήση παραστατικών μιγαδικών	236
7.3	Σχέσεις τάσεως ρεύματος των τριών βασικών ηλεκτρικών στοιχείων στην Ε.Μ.Κ.	237
7.3.1	Ωμική αντίσταση R	237
7.3.2	Πηνίο με αυτεπαγωγή L.	238
7.3.3	Πυκνωτής με χωρητικότητα C	238
7.4	Σύνθετη αντίσταση στην Ε.Μ.Κ.	239
7.5	Η συνάρτηση μεταφοράς στην Ε.Μ.Κ	241

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8 ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ

8.1	Το πεδίο της μιγαδικής συχνότητας	243
8.2	Ορισμός του Μετασχηματισμού Laplace	244
8.3	Μετασχηματισμοί Laplace βασικών συναρτήσεων	245
8.4	Βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace	246
8.5	Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace	249
8.6	Μετασχηματισμένα κατά Laplace στοιχεία κυκλωμάτων	251
8.6.1	Ωμική αντίσταση R	251
8.6.2	Πηνίο με αυτεπαγωγή L	252
8.6.3	Πυκνωτής με χωρητικότητα C	254
8.7	Πορεία επίλυσης ενός ηλεκτρικού δικτύου με τη μέθοδο Laplace	255
8.8	Παραδείγματα επίλυσεως ηλεκτρικών δικτύων	256

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

9.1	Η έννοια του Συστήματος Αυτομάτου Ελέγχου	265
9.2	Η συνάρτηση μεταφοράς (Transfer function)	267
9.3	Σχέση συνάρτησης μεταφοράς και Δ.Ε. συστήματος.	269
9.4	Γραφική παράσταση της συνάρτησης μεταφοράς	270
9.5	Αποκρίσεις συστημάτων στα στοιχειώδη σήματα	271
9.5.1	Απόκριση σε είσοδο κρουστική συνάρτηση	272
9.5.2	Απόκριση σε τυχαία είσοδο με χρήση του συνελκτικού ολοκληρώματος	272
9.5.3	Απόκριση σε είσοδο βηματική συνάρτηση	272
9.5.4	Απόκριση σε είσοδο ημιτονοειδή συνάρτηση`	273
9.6	Διαγράμματα βαθμίδων	274
9.6.1	Σύνδεση βαθμίδων εν σειρά.	274
9.6.2	Σύνδεση βαθμίδων παράλληλα.	275
9.6.3	Ανάδραση	275
9.7	Ελεγκτές	275
9.7.1	Γενικά για τους ελεγκτές	275
9.7.2	Τύποι ελεγκτών	276
9.8	Χαρακτηριστικά μεγέθη της αποκρίσεως συστημάτων	282
	ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	283

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΥΠΟΒΑΘΡΟΥ

1. 1) Μιγαδικοί αριθμοί

Αναφέρουμε αρχικά ότι οι μιγαδικοί αριθμοί χρησιμοποιούνται ευρύτατα στην επιστήμη της Ηλεκτρολογίας. Παρακάτω δίδονται οι βασικές γνώσεις της μιγαδικής άλγεβρας απαραίτητες για όλα τα μαθήματα Ηλεκτρολογίας.

1. 1. 1) Ορισμός φανταστικής μονάδας

Η λύση της εξίσωσης $x^2 = -1$ ορίζεται στα μαθηματικά ως η φανταστική μονάδα και συμβολίζεται με τα γράμματα i ή j (στην Ηλεκτρολογία χρησιμοποιείται το j για αποφυγή σύγχυσης με το σύμβολο του ηλεκτρικού ρεύματος i).

Αρα λοιπόν ισχύει: $j^2 = -1$

και επίσης ισχύουν: $(-j)^2 = -1$, $j^3 = j^2 j = -j$ και $j^4 = j^2 j^2 = 1$

Με βάση τη φανταστική μονάδα σχηματίζονται οι φανταστικοί αριθμοί που έχουν τη γενική μορφή:

$$j y$$

όπου y οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.

1. 1. 2) Μιγαδικοί αριθμοί – μιγαδικό επίπεδο

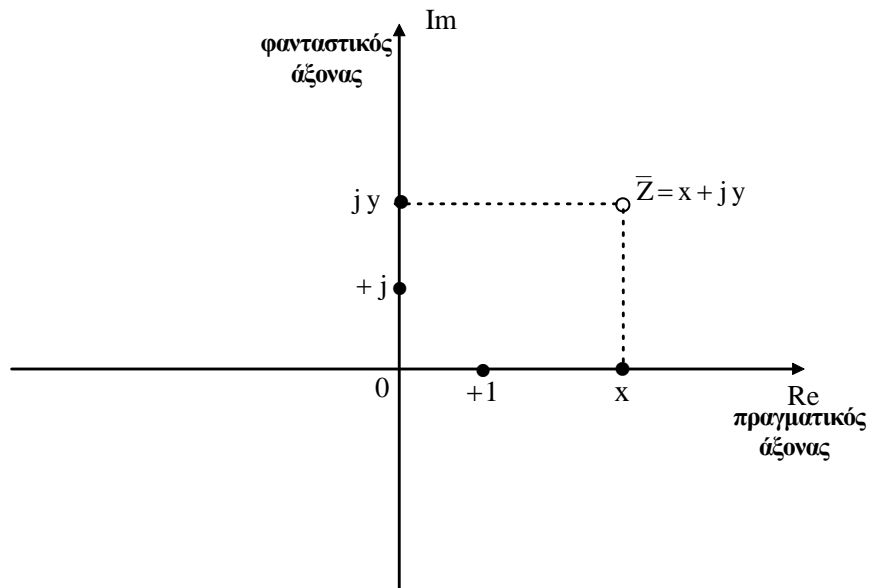
Ένας μιγαδικός αριθμός \bar{z} (complex number) σχηματίζεται από το άθροισμα ενός πραγματικού αριθμού x και ενός φανταστικού αριθμού $j y$.

Δηλαδή: $\bar{z} = x + j y$

Η γραμμή που υπάρχει πάνω από το z συμβολίζει μιγαδικό αριθμό και έτσι γίνεται η διάκριση από ένα πραγματικό αριθμό.

Είναι αντιληπτό ότι ή έννοια του μιγαδικού αριθμού θυμίζει αρκετά τη έννοια του διανύσματος στον χώρο δύο διαστάσεων (επίπεδο). Άρα λοιπόν μπορούμε να θεωρήσουμε, αντίστοιχα, το λεγόμενο «μιγαδικό επίπεδο» το οποίο θα διαθέτει δύο κάθετους άξονες, τον άξονα των πραγματικών και τον άξονα των φανταστικών αριθμών. Στο επίπεδο αυτό μπορούν να παρασταθούν όλοι οι μιγαδικοί αριθμοί.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το μιγαδικό επίπεδο.



Ο μιγαδικός αριθμός $\bar{z} = x + jy$ παριστάνεται στο μιγαδικό επίπεδο, με τον μικρό κύκλο (ο)

Ο πραγματικός αριθμός x ονομάζεται πραγματικό μέρος του \bar{z} , συμβολισμός $x = \text{Re} \{ \bar{z} \}$ (το σύμβολο $\text{Re} \{ \}$ από το real). Αντίστοιχα ο πραγματικός y ονομάζεται φανταστικό μέρος του \bar{z} , $y = \text{Im} \{ \bar{z} \}$ (το σύμβολο $\text{Im} \{ \}$ από το imaginary)

1. 1. 3) Πράξεις μεταξύ μιγαδικών αριθμών

Αρχικά θα δώσουμε τον ορισμό του συζυγούς μιγαδικού αριθμού

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $\bar{z} = x + jy$. Ως συζυγής μιγαδικός του \bar{z} ορίζεται ο μιγαδικός αριθμός :

$$\bar{z}^* = x - jy$$

Δηλ. δύο συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί έχουν ίσα πραγματικά μέρη και αντίθετα φανταστικά μέρη. Το αστεράκι (*) συμβολίζει τον συζυγή μιγαδικό.

Οι 4 βασικές πράξεις της αριθμητικής εκτελούνται στους μιγαδικούς αριθμούς ως εξής:

α) Πρόσθεση και αφαίρεση

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $\bar{z}_1 = x_1 + jy_1$ και $\bar{z}_2 = x_2 + jy_2$

Τότε:

$$\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = x_1 + jy_1 + x_2 + jy_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

$$\text{και } \bar{z}_1 - \bar{z}_2 = x_1 + jy_1 - (x_2 + jy_2) = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$$

Δηλαδή η πρόσθεση και η αφαίρεση δύο μιγαδικών ανάγονται σε πρόσθεση και αφαίρεση των αντίστοιχων πραγματικών και φανταστικών μερών τους. Αυτό παρουσιάζει πλήρη ταύτιση με την πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων, εφ' όσον θεωρήσουμε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος ενός μιγαδικού αριθμού ως τις «συνιστώσες» x και y ενός διανύσματος.

γ) Πολλαπλασιασμός

$$\text{Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί } \bar{z}_1 = x_1 + jy_1 \text{ και } \bar{z}_2 = x_2 + jy_2$$

Ο πολλαπλασιασμός $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ εκτελείται κατά τα γνωστά έχοντας υπ' όψη την βασική σχέση

$$j \cdot j = j^2 = -1$$

$$\text{άρα } \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (x_1 + jy_1) \cdot (x_2 + jy_2) = x_1 x_2 + j x_1 y_2 + j y_1 x_2 + j^2 y_1 y_2$$

$$\text{ή } \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

γ) Διαίρεση

$$\text{Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί } \bar{z}_1 = x_1 + jy_1 \text{ και } \bar{z}_2 = x_2 + jy_2$$

Το πηλίκο $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2}$ υπολογίζεται ως εξής:

Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή επί τον συζυγή μιγαδικό του παρονομαστή

$$\bar{z}_2^* = x_2 - jy_2 \text{ και έχουμε:}$$

$$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} = \frac{(x_1 + jy_1) \cdot (x_2 - jy_2)}{(x_2 + jy_2) \cdot (x_2 - jy_2)} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} + j \frac{(y_1 x_2 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

Ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση μιγαδικών αριθμών **δεν** συμβαδίζουν τους κανόνες της διανυσματικής άλγεβρας (όπως συμβαίνει με την πρόσθεση και την αφαίρεση)

Ειδικά για τον πολλαπλασιασμό και την διαίρεση θα δούμε παρακάτω έναν πιο αποτελεσματικό τρόπο εκτελέσεώς τους.

1. 1. 4) Απόλυτη τιμή (ή μέτρο) μιγαδικού αριθμού

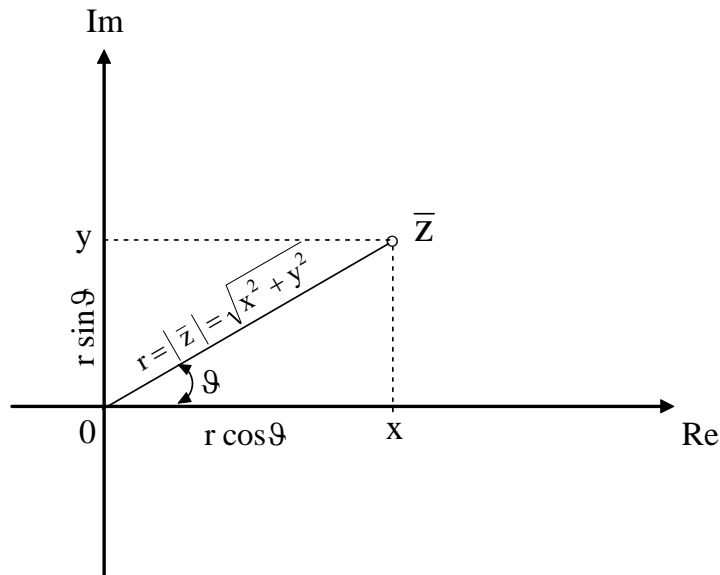
Ως απόλυτη τιμή, ή μέτρο, $|\bar{z}|$ του μιγαδικού αριθμού $\bar{z} = x + j y$ ορίζεται ο θετικός πραγματικός αριθμός:

$$|\bar{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

1. 1. 5) Πολική – εκθετική μορφή μιγαδικού αριθμού

Οι μιγαδικοί αριθμοί μπορούν να γραφούν και σε μια άλλη εναλλακτική μορφή η οποία μπορεί να φανεί πολύ χρήσιμη σε πληθώρα περιπτώσεων.

Στο μιγαδικό επίπεδο θεωρούμε τον μιγαδικό αριθμό $\bar{z} = x + j y$



Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $0\bar{z}$ είναι ίσο με r όπου $r = |\bar{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ το **μέτρο** του μιγαδικού \bar{z} . Έστω ότι θ είναι η γωνία που σχηματίζεται από τον πραγματικό άξονα και το ευθύγραμμο τμήμα $0\bar{z}$. Η γωνία θ λέγεται **όρισμα** του μιγαδικού αριθμού \bar{z} και μεταβάλλεται μεταξύ των ορίων $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

Παρατηρούμε ότι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του μιγαδικού \bar{z} γράφονται:

$$x = \text{Re} \{ \bar{z} \} = r \cos \theta \quad \text{και} \quad y = \text{Im} \{ \bar{z} \} = r \sin \theta$$

άρα ο $\bar{z} = x + jy$ γράφεται

$$\bar{z} = x + jy = r \cos \vartheta + j r \sin \vartheta = r (\cos \vartheta + j \sin \vartheta)$$

αυτή η μορφή γραφής $\bar{z} = r (\cos \vartheta + j \sin \vartheta)$ ονομάζεται **πολική μορφή** του μιγαδικού \bar{z} γιατί έχει άμεση σχέση με τις πολικές συντεταγμένες ενός σημείου (x, y) στο επίπεδο.

Συνοψίζουμε:

Καρτεσιανή (αλγεβρική) μορφή μιγαδικού: $\bar{z} = x + jy$

Πολική μορφή μιγαδικού: $\bar{z} = r (\cos \vartheta + j \sin \vartheta)$

όπου: $x = r \cos \vartheta$, $y = r \sin \vartheta$

και $r = |\bar{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\vartheta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$

(Σημ. η συνάρτηση \tan^{-1} (τόξο εφαπτομένης) χρειάζεται προσοχή, κατά τον υπολογισμό της, δηλαδή την εύρεση της γωνίας ϑ στο σωστό τεταρτημόριο, ανάλογα με τα πρόσημα των αριθμών x και y . Πάντως όλες οι αριθμομηχανές (calculators) που έχουν τη δυνατότητα μετατροπής συντεταγμένων από καρτεσιανές σε πολικές, έχουν ενσωματωμένο ειδικό πρόγραμμα που υπολογίζει σωστά τη γωνία ϑ)

Επανερχόμαστε στην πολική μορφή μιγαδικού $\bar{z} = r (\cos \vartheta + j \sin \vartheta)$ και αναφέρουμε μια βασική ταυτότητα που αποδεικνύεται στα Μαθηματικά (τύπος του Euler)

$$e^{j\vartheta} = \cos \vartheta + j \sin \vartheta \quad \text{για κάθε πραγματικό αριθμό } \vartheta$$

Με βάση τον τύπο του Euler ο μιγαδικός \bar{z} γράφεται:

$$\bar{z} = r (\cos \vartheta + j \sin \vartheta) = r e^{j\vartheta} = |\bar{z}| e^{j\vartheta}$$

Αυτός ο τρόπος γραφής $\bar{z} = |\bar{z}| e^{j\vartheta}$ ονομάζεται **εκθετική μορφή μιγαδικού αριθμού** και χρησιμοποιείται ευρύτατα στην πράξη.

1. 1. 6) Υπολογισμός γινομένου και πηλίκου μιγαδικών σε εκθετική μορφή

Το άθροισμα και η διαφορά δύο μιγαδικών υπολογίζονται πολύ εύκολα σε αλγεβρική – καρτεσιανή μορφή. Ο υπολογισμός όμως του γινομένου και ιδίως του πηλίκου παρουσιάζει κάποια πολυπλοκότητα στη μορφή αυτή.

Η χρήση όμως της εκθετικής μορφής απλοποιεί πάρα πολύ τα πράγματα για τις δύο αυτές πράξεις (γινόμενο – πηλίκο). Συγκεκριμένα θα έχουμε:

Έστω οι μιγαδικοί $\bar{z}_1 = |\bar{z}_1| e^{j\theta_1}$ και $\bar{z}_2 = |\bar{z}_2| e^{j\theta_2}$

Το γινόμενο $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ υπολογίζεται κατά τα γνωστά

$$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = |\bar{z}_1| e^{j\theta_1} \cdot |\bar{z}_2| e^{j\theta_2} = |\bar{z}_1| \cdot |\bar{z}_2| e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

δηλαδή το γινόμενο $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ έχει μέτρο το γινόμενο των μέτρων των \bar{z}_1 και \bar{z}_2 και όρισμα το άθροισμα των ορισμάτων θ_1 και θ_2 .

(Σημ. οι πράξεις με τους μιγαδικούς εκθέτες ακολουθούν τους ίδιους νόμους με τις πράξεις με πραγματικούς εκθέτες)

Με όμοιο τρόπο το πηλίκο $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ υπολογίζεται ως εξής:

$$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{|\bar{z}_1| e^{j\theta_1}}{|\bar{z}_2| e^{j\theta_2}} = \frac{|\bar{z}_1|}{|\bar{z}_2|} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

δηλαδή το πηλίκο $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ έχει μέτρο το πηλίκο των μέτρων των \bar{z}_1 και \bar{z}_2 και όρισμα την

διαφορά των ορισμάτων αριθμητή μείον παρονομαστή ($\theta_1 - \theta_2$).

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι είναι προτιμότερο η πρόσθεση και η αφαίρεση δύο μιγαδικών να γίνονται σε αλγεβρική – καρτεσιανή μορφή ενώ ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση να γίνονται σε εκθετική μορφή. Χρειάζεται βέβαια κάθε φορά ή αντίστοιχη μετατροπή των μιγαδικών από την μία μορφή στην άλλη με χρήση των γνωστών τύπων.

1. 1. 7) Έκφραση συζυγούς και αντιστρόφου μιγαδικού σε εκθετική μορφή

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $\bar{z} = x + jy = |\bar{z}| (\cos \vartheta + j \sin \vartheta) = |\bar{z}| e^{j\vartheta}$

Ο συζυγής του γράφεται: $\bar{z}^* = x - jy = |\bar{z}| (\cos \vartheta - j \sin \vartheta) = |\bar{z}| e^{-j\vartheta}$

διότι ισχύει ως γνωστόν $e^{-j\vartheta} = \cos(-\vartheta) + j \sin(-\vartheta) = \cos \vartheta - j \sin \vartheta$

Δηλαδή στην εκθετική μορφή ο συζυγής μιγαδικός του \bar{z} έχει το ίδιο μέτρο $|\bar{z}|$ και αντίθετο όρισμα $-\vartheta$

Επίσης θα ισχύει $\bar{z} \cdot \bar{z}^* = |\bar{z}| e^{j\vartheta} \cdot |\bar{z}| e^{-j\vartheta} = |\bar{z}|^2$

Δηλαδή το γινόμενο ενός μιγαδικού \bar{z} επί τον συζυγή του είναι ίσο με το τετράγωνο του μέτρου του \bar{z} .

Ο αντίστροφος ενός μιγαδικού $\bar{z} = |\bar{z}| e^{j\vartheta}$ γράφεται:

$$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{|\bar{z}| e^{j\vartheta}} = \frac{1 e^{j0}}{|\bar{z}| e^{j\vartheta}} = \frac{1}{|\bar{z}|} e^{-j\vartheta}$$

Δηλαδή ο αντίστροφος του \bar{z} έχει μέτρο το αντίστροφο του μέτρου του και όρισμα το αντίθετο του ορίσματός του.

1. 1. 8) Δυνάμεις μιγαδικών αριθμών

Οι δυνάμεις μιγαδικών αριθμών υπολογίζονται σύμφωνα με τους γνωστούς κανόνες που ισχύουν για τους πραγματικούς αριθμούς και ο υπολογισμός απλοποιείται σημαντικά όταν ο μιγαδικός είναι γραμμένος σε εκθετική μορφή.

Έστω ο μιγαδικός $\bar{z} = |\bar{z}| e^{j\vartheta}$

Τότε: $\bar{z}^n = |\bar{z}|^n e^{jn\vartheta}$ και $\bar{z}^{-n} = |\bar{z}|^{-n} e^{-jn\vartheta}$

όπου n ακέραιος

Αλλά και γενικότερα ισχύει $\bar{z}^{\frac{n}{m}} = |\bar{z}|^{\frac{n}{m}} e^{j\frac{n\vartheta}{m}}$ όπου n, m ακέραιοι

1. 1. 9) Ρίζες μιγαδικών αριθμών

Ο μιγαδικός αριθμός $\bar{z} = |\bar{z}| e^{j\theta}$

έχει n τον αριθμό n -οστές ρίζες $\sqrt[n]{\bar{z}}$ οι οποίες υπολογίζονται από τον ακόλουθο τύπο:

$$\bar{z}_k = \sqrt[n]{|\bar{z}|} e^{j \frac{\theta + 2k\pi}{n}} \quad \text{όπου } k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

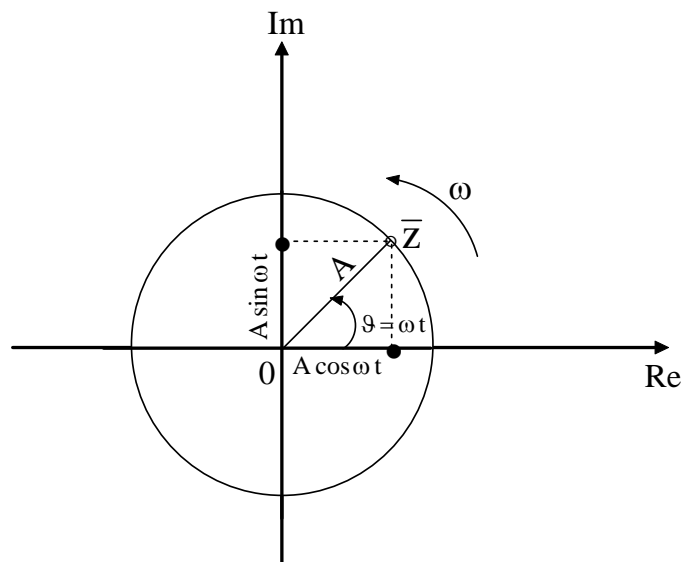
1. 1. 10) Στρεφόμενοι μιγαδικοί αριθμοί

Θεωρούμε τον μιγαδικό αριθμό, η ακριβέστερα την μιγαδική συνάρτηση:

$$\bar{z}(t) = A e^{j\omega t}$$

όπου A και ω σταθεροί πραγματικοί αριθμοί και t πραγματική μεταβλητή (χρόνος).

Παρατηρούμε ότι ο $\bar{z}(t)$ έχει σταθερό μέτρο A ενώ το όρισμά του αυξάνει γραμμικά συναρτήσει του χρόνου. Αυτό σημαίνει ότι ο $\bar{z}(t)$, στο μιγαδικό επίπεδο, κινείται πάνω σε μία περιφέρεια με ακτίνα A με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω . (βλ. και κατωτέρω σχήμα)



Το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του $\bar{z}(t)$ θα είναι αντίστοιχα:

$$\text{Re} \{ \bar{z}(t) \} = A \cos \omega t \quad \text{και} \quad \text{Im} \{ \bar{z}(t) \} = A \sin \omega t$$

Από τις σχέσεις αυτές γίνεται δυνατή η παράσταση ημιτονοειδών συναρτήσεων με χρήση μιγαδικών αριθμών. Ο μιγαδικός αριθμός $\bar{z}(t)$ λέγεται και στροφέας (phasor).

Η χρονική παράγωγος και το ολοκλήρωμα του $\bar{z}(t)$ μπορούν εύκολα να υπολογιστούν εφαρμόζοντας τους κανόνες παραγωγίσις που ισχύουν για πραγματικές συναρτήσεις. Έτσι θα έχουμε:

$$\frac{d \bar{z}(t)}{d t} = \frac{d}{d t} A e^{j \omega t} = A j \omega e^{j \omega t} = A \omega e^{j \omega t} e^{j \frac{\pi}{2}} = A \omega e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})}$$

(διότι ισχύει $e^{j \frac{\pi}{2}} = j$)

Άρα παραγωγή του $\bar{z}(t) = A e^{j \omega t}$ σημαίνει πολλαπλασιασμό του μέτρου του επί ω και ταυτόχρονα αύξηση κατά γωνία $\frac{\pi}{2}$ του ορίσματός του.

Αντίστοιχα για το ολοκλήρωμα:

$$\int \bar{z}(t) d t = \int A e^{j \omega t} d t = \frac{A}{j \omega} e^{j \omega t} = \frac{A}{\omega} e^{j \omega t} e^{-j \frac{\pi}{2}} = \frac{A}{\omega} e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})}$$

(διότι ισχύει $\frac{1}{j} = -j = e^{-j \frac{\pi}{2}}$)

Άρα ολοκλήρωση του $\bar{z}(t) = A e^{j \omega t}$ σημαίνει διαίρεση μέτρου του δια ω και ταυτόχρονα μείωση κατά γωνία $\frac{\pi}{2}$ του ορίσματός του.

1. 2) Η ημιτονοειδής συνάρτηση

1. 2. 1) Γενικά για την ημιτονοειδή συνάρτηση

Η συνάρτηση αυτή χρησιμοποιείται πολύ στην Ηλεκτρολογία αλλά και σε άλλες Τεχνικές Επιστήμες. Οι λόγοι είναι οι ακόλουθοι:

α) Με την ημιτονοειδή συνάρτηση περιγράφονται πολλά φυσικά φαινόμενα και τούτο γιατί οι ημιτονοειδείς συναρτήσεις μαζί με τις εκθετικές συναρτήσεις, αλλά και συνδυασμοί αυτών των δύο, αποτελούν τις γενικές λύσεις των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές. Με τις εξισώσεις αυτές περιγράφεται πληθώρα φυσικών φαινομένων (π.χ. οι ταλαντώσεις).

β) Από μαθηματική άποψη είναι μια πολύ «ομαλή» συνάρτηση. Η παράγωγός της είναι επίσης μια ημιτονοειδής συνάρτηση με κάποια διαφορά φάσεως.

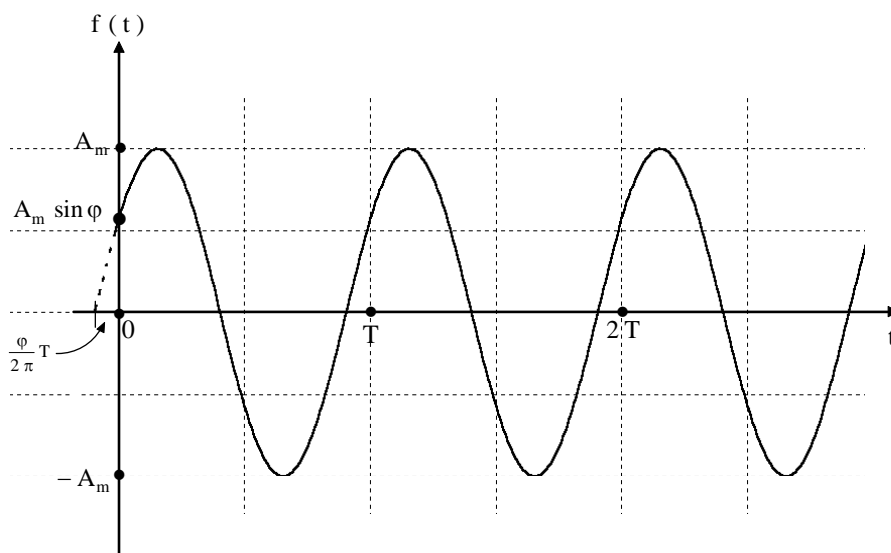
γ) Με την ημιτονοειδή συνάρτηση μπορούν να περιγραφούν και να μελετηθούν συνθετότερα σήματα (περιοδικά ή όχι) μέσω της ανάλυσης Fourier (όπως θα δούμε στα επόμενα)

Μια ημιτονοειδής συνάρτηση $f(t) = A_m \sin(\omega t + \varphi)$ χαρακτηρίζεται πλήρως από 3 μεγέθη:

- Το πλάτος A_m (με μονάδα ανάλογη του φυσικού μεγέθους που περιγράφεται)
- Την κυκλική συχνότητα ω (rad /sec)
- Την αρχική φάση φ (rad ή μοίρες)

Το μέγεθος $\omega t + \varphi$ (rad), δηλ. το όρισμα, λέγεται φάση της ημιτονοειδούς συνάρτησης. Επίσης το μέγεθος $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (sec) λέγεται περίοδος της ημιτονοειδούς συνάρτησης και το αντίστροφο της περιόδου $f = \frac{1}{T}$ (Hz = sec⁻¹) λέγεται συχνότητα. Ο χρόνος μιας πλήρους περιόδου T , αντιστοιχεί προφανώς σε 2π rad (ακτίνια)

Παρακάτω δίνεται μια τυπική γραφική παράσταση της ημιτονοειδούς συνάρτησης $f(t) = A_m \sin(\omega t + \varphi)$



Παρατηρείστε ότι για $t = 0$ η τιμή είναι $f(0) = A_m \sin \varphi$

Το χρονικό διάστημα αριστερά του μηδενός το οποίο απαιτείται για να μηδενιστεί η $f(t)$

είναι ίσο με $\frac{\varphi}{2\pi} T$.

Γενικά γωνία φ_0 (rad) αντιστοιχεί σε χρονικό διάστημα $\Delta t_0 = \frac{\varphi_0}{2\pi} T$ (sec)

Αντί για την ημιτονοειδή συνάρτηση μπορεί να χρησιμοποιηθεί, για την περιγραφή των ίδιων φαινομένων, και η συνημιτονοειδής συνάρτηση

$$f(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi)$$

Υπενθυμίζονται από την Τριγωνομετρία οι σχέσεις:

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{και} \quad \sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

άρα:

$$f(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi) = A_m \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

και αντίστοιχα:

$$f(t) = A_m \sin(\omega t + \varphi) = A_m \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

Δηλαδή η περιγραφή ενός μεγέθους με ημιτονοειδή ή συνημιτονοειδή συνάρτηση σημαίνει απλά μια μετατόπιση στη φάση κατά $+$ ή $- \pi/2$ rad (ή αντίστοιχα $+$ ή $- 90$ μοίρες).

Στην πράξη είναι ορθότερο, κατά την μελέτη των προβλημάτων, να χρησιμοποιείται **μόνον** ή μία από τις δύο μορφές δηλαδή να εκφράζουμε **όλα** τα μεγέθη με ημιτονοειδείς ή **όλα** με συνημιτονοειδείς συναρτήσεις.

Σε ολόκληρο το σύγγραμμα αυτό επιλέγεται η έκφραση με ημιτονοειδείς συναρτήσεις.

1. 2. 2) Παράσταση ημιτονοειδών συναρτήσεων με χρήση μιγαδικών αριθμών

Αποδεικνύεται στα Μαθηματικά, ότι για κάθε πραγματικό αριθμό x , ισχύει η παρακάτω ταυτότητα (τύπος του Euler):

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

Άρα αν θεωρήσουμε τον μιγαδικό αριθμό (η ακριβέστερα την μιγαδική συνάρτηση)

$$\bar{A}(t) = A_m e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Ο μιγαδικός $\bar{A}(t) = A_m e^{j(\omega t + \varphi)}$ έχει σταθερό μέτρο A_m και όρισμα το οποίο αυξάνει γραμμικά συναρτήσει του χρόνου t . Αυτό σημαίνει ότι ο $\bar{A}(t)$ εκτελεί, στο μιγαδικό επίπεδο, ομαλή κυκλική κίνηση με γωνιακή ταχύτητα ω .

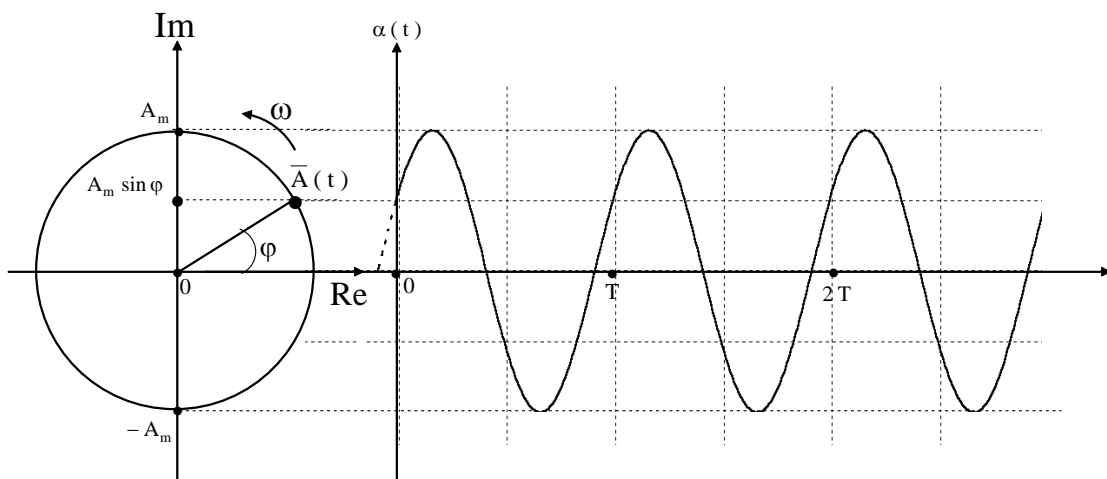
Με εφαρμογή του τύπου του Euler έχουμε:

$$\bar{A}(t) = A_m e^{j(\omega t + \varphi)} = A_m \cos(\omega t + \varphi) + j A_m \sin(\omega t + \varphi)$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι:

$$\operatorname{Re}\{\bar{A}(t)\} = A_m \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{και} \quad \operatorname{Im}\{\bar{A}(t)\} = A_m \sin(\omega t + \varphi)$$

δηλαδή το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του $\bar{A}(t)$ είναι, αντίστοιχα, μια συνημιτονοειδής και μια ημιτονοειδής συνάρτηση.



Επιλέγουμε στο σημείο αυτό την χρήση της ημιτονοειδούς συνάρτησης ^(*) (φανταστικό μέρος)

^(*) Εξ' ίσου θα μπορούσαμε να επιλέξουμε την συνημιτονοειδή συνάρτηση (πραγματικό μέρος)

Άρα:
$$A_m \sin(\omega t + \varphi) = \text{Im} \left\{ A_m e^{j(\omega t + \varphi)} \right\} = \text{Im} \left\{ A_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} \right\}$$

Στο σημείο αυτό κάνουμε την ακόλουθη παρατήρηση:

Έστω ότι έχουμε να υπολογίσουμε ένα άθροισμα ή μία διαφορά δύο ημιτονοειδών συναρτήσεων με την **ίδια κυκλική συχνότητα ω** . Από την Τριγωνομετρία είναι γνωστό ότι το αποτέλεσμα είναι επίσης μια ημιτονοειδής συνάρτηση με την ίδια κυκλική συχνότητα ω . Στην περίπτωση λοιπόν που έχουμε να υπολογίσουμε ένα τέτοιο αλγεβρικό άθροισμα μπορούμε, για την περιγραφή των ημιτονοειδών συναρτήσεων, αντί του στρεφομένου μιγαδικού αριθμού:

$$\bar{A}(t) = A_m e^{j(\omega t + \varphi)} = A_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}$$

να χρησιμοποιήσουμε τον **σταθερό** μιγαδικό:

$$\bar{A} = A_m e^{j\varphi}$$

Αυτό φαίνεται εύκολα με βάση τον παρακάτω συλλογισμό:

έστω:

$$\alpha_1(t) = A_{m1} \sin(\omega t + \varphi_1) = \text{Im} \left\{ A_{m1} e^{j(\omega t + \varphi_1)} \right\} = \text{Im} \left\{ A_{m1} e^{j\varphi_1} e^{j\omega t} \right\} \quad \text{και}$$

$$\alpha_2(t) = A_{m2} \sin(\omega t + \varphi_2) = \text{Im} \left\{ A_{m2} e^{j(\omega t + \varphi_2)} \right\} = \text{Im} \left\{ A_{m2} e^{j\varphi_2} e^{j\omega t} \right\}$$

τότε

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) \pm \alpha_2(t) &= \text{Im} \left\{ A_{m1} e^{j\varphi_1} e^{j\omega t} \right\} \pm \text{Im} \left\{ A_{m2} e^{j\varphi_2} e^{j\omega t} \right\} = \\ &= \text{Im} \left\{ A_{m1} e^{j\varphi_1} e^{j\omega t} \pm A_{m2} e^{j\varphi_2} e^{j\omega t} \right\} = \text{Im} \left\{ e^{j\omega t} (A_{m1} e^{j\varphi_1} \pm A_{m2} e^{j\varphi_2}) \right\} = \\ &= \text{Im} \left\{ e^{j\omega t} A_{m0} e^{j\varphi_0} \right\} = \text{Im} \left\{ A_{m0} e^{j(\omega t + \varphi_0)} \right\} \end{aligned}$$

όπου: $A_{m0} e^{j\varphi_0} = A_{m1} e^{j\varphi_1} \pm A_{m2} e^{j\varphi_2}$

άρα: $\alpha_1(t) \pm \alpha_2(t) = \text{Im} \left\{ A_{m0} e^{j(\omega t + \varphi_0)} \right\} = A_{m0} \sin(\omega t + \varphi_0)$

Δηλαδή παρατηρούμε ότι για τον υπολογισμό, με χρήση στρεφομένων μιγαδικών αριθμών, της παράστασης

$$A_{m1} \sin(\omega t + \varphi_1) \pm A_{m2} \sin(\omega t + \varphi_2) = A_{m0} \sin(\omega t + \varphi_0)$$

ο όρος $e^{j\omega t}$ δεν υπεισέρχεται στους υπολογισμούς του πλάτους A_{m0} και της γωνίας φ_0 και κατά συνέπεια μπορεί (προσωρινά) να απαλειφθεί.

Είναι προφανές ότι αντί για αλγεβρικό άθροισμα μόνον δύο ημιτονοειδών όρων, μπορούμε να έχουμε αλγεβρικό άθροισμα οποιουδήποτε αριθμού ημιτονοειδών όρων, με την προϋπόθεση να έχουν όλοι την **ίδια κυκλική συχνότητα ω** .

Συνοψίζουμε εδώ την μεθοδολογία:

Η ημιτονοειδής συνάρτηση:

$$a(t) = A_m \sin(\omega t + \varphi)$$

μπορεί να παρασταθεί από τον στρεφόμενο μιγαδικό αριθμό:

$$\bar{A}(t) = A_m e^{j(\omega t + \varphi)}$$

ο οποίος αποκαλείται και στροφέας ή phasor

Πρακτικά όμως χρησιμοποιείται ο σταθερός μιγαδικός αριθμός:

$$\bar{A} = A_m e^{j\varphi}$$

Αντίστροφα αν είναι γνωστός ο $\bar{A} = A_m e^{j\varphi}$ και η κυκλική συχνότητα ω , τότε η ημιτονοειδής συνάρτηση $a(t)$ προκύπτει από τη σχέση:

$$a(t) = \text{Im} \left\{ \bar{A} e^{j\omega t} \right\} = \text{Im} \left\{ A_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} \right\} = A_m \sin(\omega t + \varphi)$$

Με την χρήση των μιγαδικών αριθμών οι πράξεις μεταξύ ημιτονοειδών συναρτήσεων ανάγονται σε πράξεις μιγαδικών αριθμών. Έτσι αποφεύγονται πολύπλοκες τριγωνομετρικές εκφράσεις και αντικαθίστανται από απλή μιγαδική άλγεβρα.

Ας δούμε παρακάτω δύο απλές εφαρμογές:

1. 2. 3) Παραδείγματα

Παράδειγμα 1) Η έκφραση $f(t) = \alpha_1 \sin \omega t + \alpha_2 \cos \omega t$ όπου τα α_1 και α_2 πραγματικοί αριθμοί (θετικοί ή αρνητικοί) μπορεί να γραφεί και ως:

$$f(t) = \alpha_m \sin(\omega t + \varphi)$$

τα μεγέθη α_m και φ υπολογίζονται ως εξής:

- ο όρος $\alpha_1 \sin \omega t$ αν $\alpha_1 > 0$ παριστάνεται με στροφέα $\bar{A}_1 = \alpha_1$

- ο όρος $\alpha_2 \cos \omega t = \alpha_2 \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$ αν $\alpha_2 > 0$ παριστάνεται με στροφέα $\bar{A}_2 = \alpha_2 e^{j\frac{\pi}{2}}$

Προσθέτοντας τους στροφείς \bar{A}_1 και \bar{A}_2 θα πάρουμε:

$$\bar{F} = \alpha_1 + \alpha_2 e^{j\frac{\pi}{2}} = \alpha_1 + j\alpha_2 = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} e^{j \tan^{-1}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)}$$

άρα:
$$f(t) = \text{Im}\{\bar{F} e^{j\omega t}\} = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \sin\left(\omega t + \tan^{-1}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\right)$$

συνεπώς
$$\alpha_m = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \quad \text{και} \quad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)$$

Προσοχή όμως χρειάζεται στον σωστό υπολογισμό της γωνίας $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)$

ανάλογα με τα πρόσημα των α_1 και α_2 !

Δίνουμε παρακάτω δύο αριθμητικά παραδείγματα της εφαρμογής αυτής

Παράδειγμα 2)

Η έκφραση $f(t) = 5 \sin(10t) + 7 \cos(10t)$ γράφεται:

$5 \sin(10t) \rightarrow$ στροφέας $\bar{A}_1 = 5$

$7 \cos(10t) = 7 \sin(10t + \pi/2) \rightarrow$ στροφέας $\bar{A}_2 = 7 e^{j\frac{\pi}{2}} = j7$

άρα:
$$\bar{F} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 = 5 + j7 = \sqrt{5^2 + 7^2} e^{j \tan^{-1}\left(\frac{7}{5}\right)} = 8.602 e^{j0.95}$$

και
$$f(t) = 8.602 \sin(10t + 0.95)$$

ή σε μοίρες
$$f(t) = 8.602 \sin(10t + 54.46^\circ)$$

Παράδειγμα 3)

Η έκφραση $f(t) = 3 \sin(20t) - 2 \cos(20t)$ γράφεται:

$3 \sin(20t) \rightarrow$ στροφέας $\bar{A}_1 = 3$

$-2 \cos(20t) = -2 \sin(20t + \pi/2) = 2 \sin(20t + \pi/2 - \pi) \rightarrow$ στροφέας $\bar{A}_2 = 2 e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j2$

άρα:
$$\bar{F} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 = 3 - j2 = \sqrt{3^2 + 2^2} e^{j \tan^{-1}\left(\frac{-2}{3}\right)} = 3.606 e^{-j0.59}$$

και
$$f(t) = 3.606 \sin(20t - 0.59)$$

ή σε μοίρες
$$f(t) = 3.606 \sin(20t - 33.7^\circ)$$

Παράδειγμα 4

Να υπολογιστεί το άθροισμα:

$$f(t) = 6 \sin(100t - 0.23) + 5 \sin(100t + 0.78) - 3 \sin(100t + 1.23) + 2 \sin(100t - 0.56)$$

(οι γωνίες σε rad)

οι αντίστοιχοι στροφείς θα είναι:

$$6 \sin(100t - 0.23) \rightarrow \bar{\alpha}_1 = 6 e^{-j0.23} = 5.842 - j 1.368$$

$$5 \sin(100t + 0.78) \rightarrow \bar{\alpha}_2 = 5 e^{j0.78} = 3.554 + j 3.516$$

$$\begin{aligned} -3 \sin(100t + 1.23) &= 3 \sin(100t + 1.23 - \pi) = 3 \sin(100t - 1.91) \rightarrow \bar{\alpha}_3 = 3 e^{-j1.91} = \\ &= -0.998 - j 2.829 \end{aligned}$$

$$2 \sin(100t - 0.56) \rightarrow \bar{\alpha}_4 = 2 e^{-j0.56} = 1.694 - j 1.062$$

άρα: $\bar{f} = \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_3 + \bar{\alpha}_4 = 10.092 - j 1.743 = 10.241 e^{-j0.17}$

συνεπώς: $f(t) = \text{Im} \left\{ \bar{f} e^{j100t} \right\} = 10.241 \sin(100t - 0.17)$

ή σε μοίρες $f(t) = 10.241 \sin(100t - 9.7^\circ)$

1.3) Η εκθετική συνάρτηση

1.3.1) Γενικά για την εκθετική συνάρτηση

Η εκθετική συνάρτηση, έχει εξ' ίσου με την ημιτονοειδή συνάρτηση, σημαντικότερη αξία για την Ηλεκτρολογία. Οι εκθετικές συναρτήσεις, όπως είναι γνωστό, αποτελούν γενικές λύσεις των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές.

Στο σημείο αυτό αναφέρουμε την ακόλουθη παρατήρηση:

- Δεν είναι ποτέ δυνατόν από πραγματικό – φυσικό σύστημα να προκύψει ως απόκριση εκθετική συνάρτηση με θετικό εκθέτη, δηλαδή συνάρτηση της μορφής $f(t) = e^{at}$ όπου το $a > 0$.

Είναι προφανές ότι η $f(t) = e^{at}$ τείνει στο άπειρο καθώς ο χρόνος t τείνει στο άπειρο και μια τέτοια απόκριση δεν μπορεί να προκύψει από πραγματικό - φυσικό σύστημα.

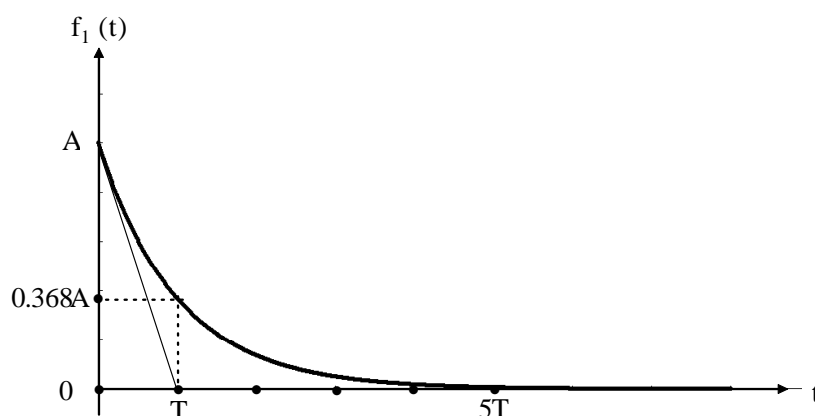
Άρα λοιπόν οι εκθετικές συναρτήσεις που χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν φυσικά φαινόμενα έχουν **πάντοτε** αρνητικούς εκθέτες.

1.3.2) Μορφές εκθετικών συναρτήσεων

Στην πράξη χρησιμοποιούνται οι ακόλουθες δύο μορφές εκθετικών συναρτήσεων.

α) Η κατερχόμενη εκθετική συνάρτηση: $f_1(t) = A e^{-\frac{t}{T}}$ όπου T η σταθερά χρόνου

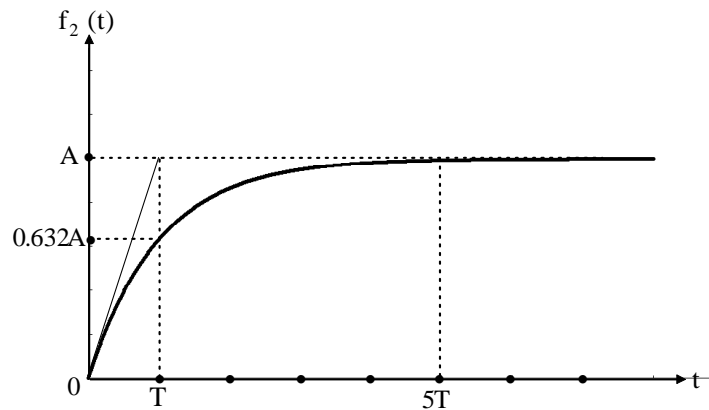
Η συνάρτηση $f_1(t)$ τείνει ασυμπτωτικά στο 0 και η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο $(0, A)$ τέμνει τον άξονα των t στο σημείο $t = T$.



Για $t = T$ η $f_1(t)$ παίρνει την τιμή $f_1(T) = A e^{-1} = 0.368 A$

Για $t = 5T$ έχουμε $f_1(5T) = A e^{-5} = 0.0067A$ τιμή που θεωρείται πολύ μικρή σε σχέση με το A , και έτσι η τιμή $t = 5T$ θεωρείται ως το «πρακτικό» χρονικό όριο στο οποίο η $f_1(t)$ μηδενίζεται.

β) Η ανερχόμενη εκθετική συνάρτηση: $f_2(t) = A(1 - e^{-\frac{t}{T}})$ όπου T η σταθερά χρόνου
 Η συνάρτηση $f_2(t)$ τείνει ασυμπτωτικά στο A και η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο $(0, 0)$ τέμνει την ασύμπτωτο ευθεία σε ένα σημείο από το οποίο αν φέρουμε την κάθετο στον άξονα των t θα συναντήσει το σημείο $t = T$.



Για $t = T$ η $f_2(t)$ παίρνει την τιμή $f_2(T) = A(1 - e^{-1}) = 0.632 A$

Για $t = 5T$ έχουμε $f_2(5T) = A(1 - e^{-5}) = 0.9933 A$ τιμή που θεωρείται πολύ κοντά στο A , και έτσι η τιμή $t = 5T$ θεωρείται ως το «πρακτικό» χρονικό όριο στο οποίο η $f_2(t)$ παίρνει την τελική της τιμή A .

1.4) Γραμμική ανεξαρτησία συναρτήσεων

1.4.1) Ορισμός

Οι συναρτήσεις $f_1(t)$ και $f_2(t)$ θα λέγονται **γραμμικά ανεξάρτητες** όταν η σχέση

$$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) = 0 \quad \text{για κάθε } t$$

ισχύει μόνον όταν $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Αν μπορούν να βρεθούν δυο πραγματικοί αριθμοί α_1, α_2 διάφοροι του μηδενός και να ικανοποιείται η ανωτέρω σχέση τότε οι συναρτήσεις $f_1(t)$ και $f_2(t)$ λέγονται **γραμμικά εξαρτημένες**.

1.4.2) Παραδείγματα

α) Οι συναρτήσεις $\sin \omega t$ και $\cos \omega t$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες διότι δεν μπορούν να βρεθούν δυο πραγματικοί αριθμοί α_1, α_2 (διάφοροι του μηδενός) ώστε να ισχύει

$$\alpha_1 \sin \omega t + \alpha_2 \cos \omega t = 0 \quad \text{για κάθε } t$$

β) Οι συναρτήσεις $\sin \omega_1 t$ και $\sin \omega_2 t$, όπου $\omega_1 \neq \omega_2$, είναι γραμμικά ανεξάρτητες διότι δεν μπορούν να βρεθούν δυο πραγματικοί αριθμοί α_1, α_2 (διάφοροι του μηδενός) ώστε να ισχύει

$$\alpha_1 \sin \omega_1 t + \alpha_2 \sin \omega_2 t = 0 \quad \text{για κάθε } t$$

γ) Οι συναρτήσεις e^{-kt} και e^{-mt} , όπου $k \neq m$, είναι γραμμικά ανεξάρτητες διότι δεν μπορούν να βρεθούν δυο πραγματικοί αριθμοί α_1, α_2 (διάφοροι του μηδενός) ώστε να ισχύει

$$\alpha_1 e^{-kt} + \alpha_2 e^{-mt} = 0 \quad \text{για κάθε } t$$

δ) Οι συναρτήσεις $C_1 e^{-kt}$ και $C_2 e^{-kt}$, είναι γραμμικά εξαρτημένες διότι:

η σχέση $\alpha_1 C_1 e^{-kt} + \alpha_2 C_2 e^{-kt} = 0$ επαληθεύεται για κάθε t αν έχουμε π.χ.

$\alpha_1 = \beta$ ($\beta =$ τυχαίος πραγματικός αριθμός) και $\alpha_2 = -\beta C_1 / C_2$

1. 5) Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές

1. 5. 1) Εισαγωγικά

Η γενική μορφή μιας γραμμικής Διαφορικής Εξίσωσης (Δ.Ε.) με σταθερούς συντελεστές είναι:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = f(t)$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό:

$$D \equiv \frac{d}{dt}$$

όπου ο τελεστής D υποδηλώνει την παράγωγο, και επομένως θα ισχύουν:

$$D^2 = \frac{d^2}{dt^2}, \quad D^3 = \frac{d^3}{dt^3} \quad \dots \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Με βάση τα προηγούμενα η διαφορική εξίσωση μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$a_n D^n y(t) + a_{n-1} D^{n-1} y(t) + \dots + a_1 D y(t) + a_0 y(t) = f(t)$$

$$\text{ή} \quad [a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0] y(t) = f(t)$$

όπου:

$y(t)$: άγνωστη συνάρτηση (απόκριση ή «έξοδος»)

$f(t)$: γνωστή συνάρτηση (διέγερση ή «είσοδος»)

n : μέγιστη τάξη παραγώγου της άγνωστης συνάρτησης που λέγεται και **τάξη** της διαφορικής εξίσωσης

$[a_0, a_1 \dots a_{n-1}, a_n]$ σταθεροί πραγματικοί αριθμοί (συντελεστές της διαφορικής εξίσωσης)

Για να λυθεί η διαφορική αυτή εξίσωση πρέπει να είναι γνωστές και n το πλήθος Αρχικές Συνθήκες (Α.Σ.) οι οποίες συνήθως είναι οι τιμές:

$$y(0^+), D y(0^+), \dots, D^{n-2} y(0^+), D^{n-1} y(0^+)$$

Η τιμή $t = 0^+$ σημαίνει ότι το t είναι απείρως κοντά στο 0 αλλά από τις θετικές τιμές, δηλαδή ισχύει $t > 0$.

Οι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές εμφανίζονται στην περιγραφή πάρα πολλών φυσικών φαινομένων και βέβαια στην ανάλυση των ηλεκτρικών κυκλωμάτων.

1. 5. 2) Γενικός τρόπος επίλυσης γραμμικής Δ.Ε.

Αποδεικνύεται στα Μαθηματικά ότι η γενική λύση μιας Δ.Ε. n- τάξεως:

$$\left[a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0 \right] y(t) = f(t)$$

είναι η ακόλουθη:

$$y_{\text{γενική}}(t) = y_{\text{ομογενής}}(t) + y_{\text{μερική}}(t)$$

όπου:

$y_{\text{ομογενής}}(t)$: η γενική λύση της αντίστοιχης **ομογενούς** Δ.Ε.

$$\left[a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0 \right] y(t) = 0$$

$y_{\text{μερική}}(t)$: μία συνάρτηση του t η οποία δεν προκύπτει από την λύση της ομογενούς και ταυτόχρονα αποτελεί λύση της Δ.Ε.

Η **ειδική** λύση της Δ.Ε. $y_{\text{ειδική}}(t)$ προκύπτει από την $y_{\text{γενική}}(t)$ μετά από εφαρμογή των δεδομένων **αρχικών συνθηκών** (Α.Σ.)

$$y(0^+), D y(0^+), \dots, D^{n-2} y(0^+), D^{n-1} y(0^+)$$

Παρακάτω θα ασχοληθούμε με την επίλυση γραμμικών Δ.Ε. με σταθερούς συντελεστές 1^{ης} και 2^{ας} τάξεως και στη συνέχεια θα γενικεύσουμε τον τρόπο επίλυσης για Δ.Ε. n-τάξεως.

1. 5. 3) Επίλυση γραμμικής Δ.Ε. 1^{ης} τάξεως

Η γενική μορφή μια γραμμικής Δ.Ε. 1^{ης} τάξεως είναι:

$$\Delta.E. : \quad (a_1 D + a_0) y (t) = f (t)$$

$$A.S. : \quad y (0^+) = y_0$$

$$\text{Αντίστοιχη ομογενής Δ.Ε.:} \quad (a_1 D + a_0) y (t) = 0$$

Από την ομογενή Δ.Ε. προκύπτει η λεγόμενη **χαρακτηριστική εξίσωση** της Δ.Ε. θέτοντας αντί του τελεστή **D** την **αλγεβρική μεταβλητή s**. Έτσι θα πάρουμε:

$$\text{Χαρακτηριστική εξίσωση:} \quad a_1 s + a_0 = 0$$

(δηλ. η χαρακτηριστική εξίσωση της Δ.Ε. είναι πάντα μία πολυωνυμική εξίσωση με **βαθμό** ίσο με την **τάξη** της Δ.Ε. , άρα η Δ.Ε. 1^{ης} τάξεως θα έχει χαρακτηριστική εξίσωση πρώτου βαθμού)

$$\text{Η ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης θα είναι:} \quad s_1 = - \frac{a_0}{a_1}$$

$$\text{Αποδεικνύεται ότι η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς} \quad (a_1 D + a_0) y (t) = 0$$

$$\text{θα είναι:} \quad y_{\text{ομογενής}} (t) = C_1 e^{s_1 t}$$

$$\text{όπου η σταθερά } C_1 \text{ προσδιορίζεται από την δεδομένη αρχική συνθήκη } y (0^+) = y_0$$

Σύμφωνα με την μεθοδολογία επίλυσης , πρέπει να βρούμε και μία μερική λύση της Δ.Ε. την οποία θα προσθέσουμε στη γενική λύση της ομογενούς και στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε τη δεδομένη αρχική συνθήκη για την εύρεση της σταθεράς C_1 .

Στο σημείο αυτό θα περιορίσουμε το πρόβλημα της εύρεσης μερικής λύσης της Δ.Ε. για ορισμένες ειδικές μορφές της συνάρτησης $f (t)$. Οι μορφές αυτές φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί.

ΜΟΡΦΕΣ ΜΕΡΙΚΩΝ ΛΥΣΕΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ Δ.Ε.

Μορφή $f(t)$	Μορφή $y_{\text{μερική}}(t)$
Σταθερή συνάρτηση: $f(t) = k_1$	Σταθερή συνάρτηση: $y_{\text{μερική}}(t) = k_2$ η σταθερά k_2 προσδιορίζεται με απλή αναγωγή
Πολυώνυμο m - βαθμού: $f(t) = b_m t^m + b_{m-1} t^{m-1} + \dots + b_1 t + b_0$	Πολυώνυμο m - βαθμού: $y_{\text{μερ}}(t) = d_m t^m + d_{m-1} t^{m-1} + \dots + d_1 t + d_0$ οι σταθερές d_0, d_1, \dots, d_m προσδιορίζονται με απλή αναγωγή
Εκθετική Συνάρτηση: $f(t) = k_1 e^{k_2 t}$	Εκθετική Συνάρτηση: $y_{\text{μερική}}(t) = k_3 e^{k_2 t}$ Παρατηρούμε ότι ο εκθέτης παραμένει ο ίδιος η σταθερά k_3 προσδιορίζεται με απλή αναγωγή
Ημιτονοειδής συνάρτηση: $f(t) = k_1 \sin(\omega t)$	Άθροισμα ημιτόνου και συνημιτόνου με την ίδιο ω : $y_{\text{μερική}}(t) = k_2 \sin(\omega t) + k_3 \cos(\omega t)$ ή ισοδύναμα: $y_{\text{μερική}}(t) = k_4 \sin(\omega t + \varphi)$ οι σταθερές (k_2, k_3) ή (k_4, φ) προσδιορίζονται με απλή αναγωγή
Εκθετικά αποσβεννόμενη ημιτονοειδής $f(t) = k_1 e^{k_2 t} \sin(\omega t)$	Άθροισμα ημιτόνου και συνημιτόνου με την ίδιο ω και τον ίδιο συντελεστή απόσβεσης k_2 $y_{\text{μερ}}(t) = e^{k_2 t} [k_3 \sin(\omega t) + k_4 \cos(\omega t)]$ ή ισοδύναμα: $y_{\text{μερ}}(t) = k_5 e^{k_2 t} \sin(\omega t + \varphi)$ οι σταθερές (k_3, k_4) ή (k_5, φ) προσδιορίζονται με απλή αναγωγή

1. 5. 4) Παραδείγματα επίλυσης γραμμικών Δ.Ε. 1^{ης} τάξεως

Παρ. 1) Να λυθεί η Δ.Ε. $(2D + 1)y(t) = 0$ με Α.Σ. $y(0^+) = 1$ (ομογενής Δ.Ε.)

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $2s + 1 = 0$ με ρίζα $s_1 = -0.5$

Άρα η γενική λύση της ομογενούς Δ.Ε. θα είναι:

$$y_{\text{ομογ}}(t) = C_1 e^{s_1 t} = C_1 e^{-0.5 t}$$

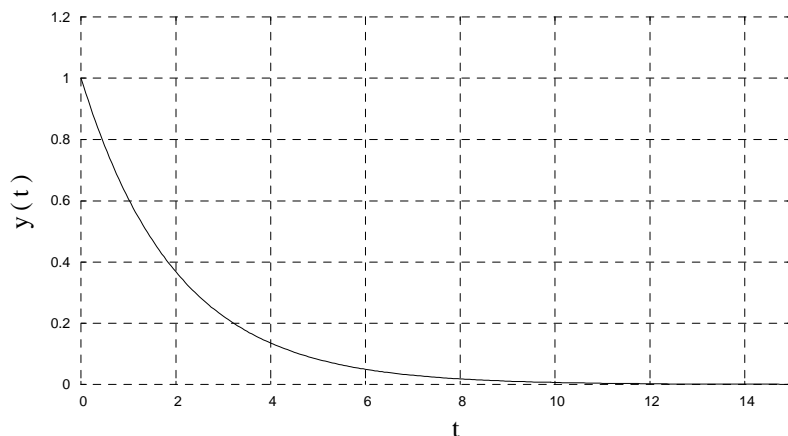
Με εφαρμογή της δεδομένης Α.Σ. $y(0^+) = 1$ θα πάρουμε:

$$y_{\text{ομογ}}(0^+) = C_1 = 1$$

άρα η ειδική λύση της Δ.Ε. θα είναι:

$$y_{\text{ειδ.}}(t) = y(t) = e^{-0.5 t}$$

Παρακάτω φαίνεται η γραφική παράσταση της λύσης



Παρ. 2) Να λυθεί η Δ.Ε. $(D + 3)y(t) = 3$ με Α.Σ. $y(0^+) = 2$

Χαρακτηριστική εξίσωση: $s + 3 = 0$ με ρίζα $s_1 = -3$

Άρα η γενική λύση της ομογενούς Δ.Ε. θα είναι:

$$y_{\text{ομογ}}(t) = C_1 e^{-3 t}$$

Εύρεση μερικής λύσης:

Εδώ έχουμε $f(t) = 3 = \text{σταθ.}$, άρα δοκιμάζουμε ως $y_{\text{μερ}}(t) = k = \text{σταθ.}$

Θέτουμε την $y_{\text{μερ}}(t)$ στη Δ.Ε. και έχουμε:

$$(D + 3) y_{\text{μερ}}(t) = 3 \quad \text{ή} \quad (D + 3)k = 3 \quad \text{άρα} \quad 3k = 3 \Rightarrow k = 1$$

επομένως η συνάρτηση $y_{\text{μερ}}(t) = 1$ είναι μια μερική λύση της Δ.Ε.

Άρα η γενική λύση: $y_{\text{γεν}}(t) = y_{\text{ομογ}}(t) + y_{\text{μερ}}(t)$

$$\text{ή} \quad y_{\text{γεν}}(t) = C_1 e^{-3t} + 1$$

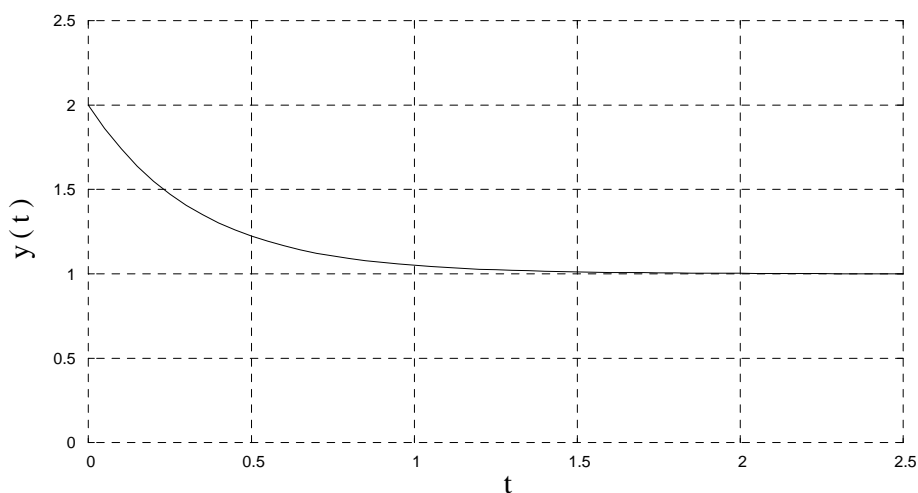
Με εφαρμογή της δεδομένης Α.Σ. $y(0^+) = 2$ θα πάρουμε:

$$y_{\text{γεν}}(0^+) = C_1 + 1 = 2 \Rightarrow C_1 = 1$$

άρα η ειδική λύση της Δ.Ε. θα είναι:

$$y_{\text{ειδ.}}(t) = y(t) = e^{-3t} + 1$$

Παρακάτω φαίνεται η γραφική παράσταση της λύσης



Παρ. 3) Να λυθεί η Δ.Ε. $(3D + 2)y(t) = 10e^{-2t}$ με Α.Σ. $y(0^+) = 1$

Χαρακτηριστική εξίσωση: $3s + 2 = 0$ με ρίζα $s_1 = -\frac{2}{3}$

Άρα η γενική λύση της ομογενούς Δ.Ε. θα είναι:

$$y_{\text{ομογ}}(t) = C_1 e^{-\frac{2}{3}t}$$

Εύρεση μερικής λύσης:

Εδώ έχουμε $f(t) = 10e^{-2t}$, άρα δοκιμάζουμε ως $y_{\text{μερ}}(t) = ke^{-2t}$

Θέτουμε την $y_{\mu\epsilon\rho}(t)$ στη Δ.Ε. και έχουμε:

$$(3D + 2)y_{\mu\epsilon\rho}(t) = 10e^{-2t} \Rightarrow (3D + 2)ke^{-2t} = 10e^{-2t}$$

$$\Rightarrow -6ke^{-2t} + 2ke^{-2t} = 10e^{-2t} \Rightarrow -6k + 2k = 10 \Rightarrow k = -2.5$$

Επομένως η συνάρτηση $y_{\mu\epsilon\rho}(t) = -2.5e^{-2t}$ είναι μια μερική λύση της Δ.Ε.

Άρα η γενική λύση: $y_{\gamma\epsilon\nu}(t) = y_{\omicron\mu\omicron\gamma}(t) + y_{\mu\epsilon\rho}(t)$

ή
$$y_{\gamma\epsilon\nu}(t) = C_1 e^{-\frac{2}{3}t} - 2.5e^{-2t}$$

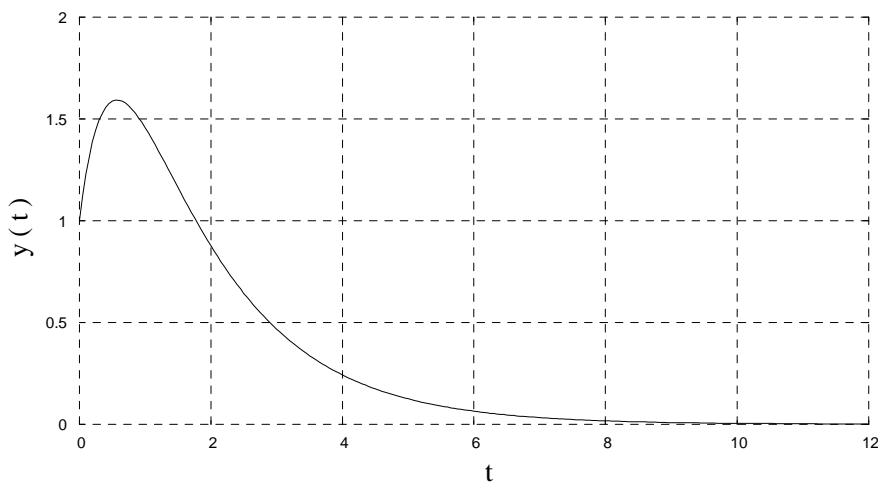
Με εφαρμογή της δεδομένης Α.Σ. $y(0^+) = 1$ θα πάρουμε:

$$y_{\gamma\epsilon\nu}(0^+) = C_1 - 2.5 = 1 \Rightarrow C_1 = 3.5$$

Άρα η ειδική λύση της Δ.Ε. θα είναι:

$$y_{\epsilon\iota\delta}(t) = y(t) = 3.5e^{-\frac{2}{3}t} - 2.5e^{-2t}$$

Παρακάτω φαίνεται η γραφική παράσταση της λύσης



Παρ. 4) Να λυθεί η Δ.Ε. $(D + 1)y(t) = 2e^{-t}$ με Α.Σ. $y(0^+) = 1$

Χαρακτηριστική εξίσωση: $s + 1 = 0$ με ρίζα $s_1 = -1$

Άρα η γενική λύση της ομογενούς Δ.Ε. θα είναι:

$$y_{\omicron\mu\omicron\gamma}(t) = C_1 e^{-t}$$

Εύρεση μερικής λύσης:

Εδώ έχουμε $f(t) = 2e^{-t}$, και παρατηρούμε ότι ο εκθέτης της εκθετικής συνάρτησης της $f(t)$ είναι ίδιος με αυτόν της $y_{ομογ}(t) = C_1 e^{-t}$, επομένως οι συναρτήσεις $f(t)$ και $y_{ομογ}(t)$ δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητες

Στην περίπτωση αυτή δοκιμάζουμε ως $y_{μερ}(t) = kt e^{-t}$

Θέτουμε την $y_{μερ}(t)$ στη Δ.Ε. και έχουμε:

$$\begin{aligned} (D+1)y_{μερ}(t) &= 2e^{-t} \Rightarrow (D+1)kte^{-t} = 2e^{-t} \\ \Rightarrow D(kte^{-t}) + kte^{-t} &= 2e^{-t} \Rightarrow ke^{-t} - kte^{-t} + kte^{-t} = 2e^{-t} \Rightarrow \\ \Rightarrow k &= 2 \end{aligned}$$

Επομένως η συνάρτηση $y_{μερ}(t) = 2te^{-t}$ είναι μια μερική λύση της Δ.Ε.

Άρα η γενική λύση: $y_{γεν}(t) = y_{ομογ}(t) + y_{μερ}(t)$

ή $y_{γεν}(t) = C_1 e^{-t} + 2te^{-t}$

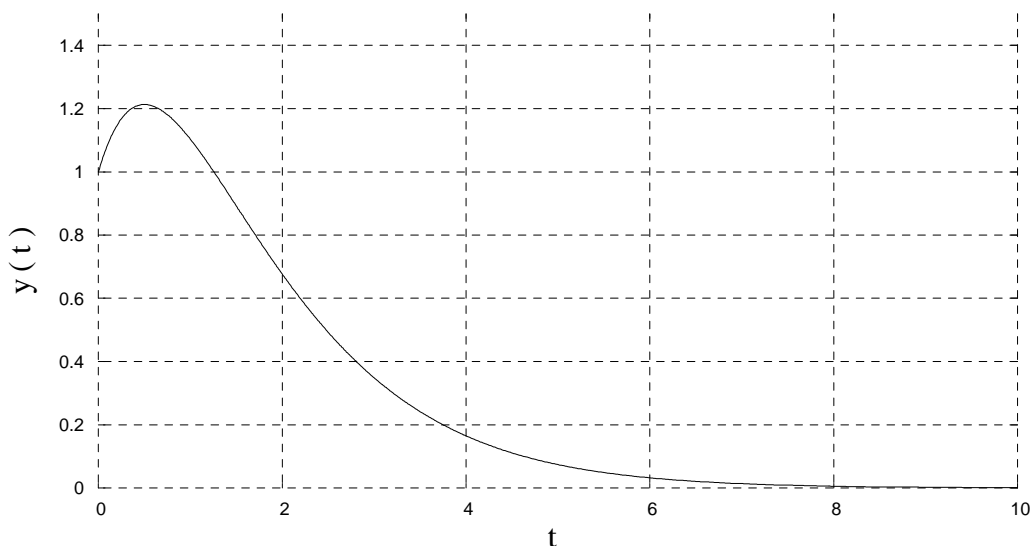
Με εφαρμογή της δεδομένης Α.Σ. $y(0^+) = 1$ θα πάρουμε:

$$y_{γεν}(0^+) = C_1 = 1$$

άρα η ειδική λύση της Δ.Ε. θα είναι:

$$y_{ειδ}(t) = y(t) = e^{-t} + 2te^{-t}$$

Παρακάτω φαίνεται η γραφική παράσταση της λύσης



Παρ. 5) Να λυθεί η Δ.Ε. $(2D + 3)y(t) = 10\sin(3t)$ με Α.Σ. $y(0^+) = 0$

Χαρακτηριστική εξίσωση: $2s + 3 = 0$ με ρίζα $s_1 = -1.5$

Άρα η γενική λύση της ομογενούς Δ.Ε. θα είναι:

$$y_{\text{ομογ}}(t) = C_1 e^{-1.5t}$$

Εύρεση μερικής λύσης:

Εδώ έχουμε $f(t) = 10\sin(3t)$

Δοκιμάζουμε ως $y_{\text{μερ}}(t) = k_1 \cos(3t) + k_2 \sin(3t)$

Θέτουμε την $y_{\text{μερ}}(t)$ στη Δ.Ε. και έχουμε:

$$\begin{aligned} (2D + 3)y_{\text{μερ}}(t) &= 10\sin(3t) \Rightarrow 2D[k_1 \cos(3t) + k_2 \sin(3t)] + \\ &+ 3[k_1 \cos(3t) + k_2 \sin(3t)] = 10\sin(3t) \Rightarrow \\ \Rightarrow -6k_1 \sin(3t) + 6k_2 \cos(3t) + 3k_1 \cos(3t) + 3k_2 \sin(3t) &= 10\sin(3t) \Rightarrow \\ \Rightarrow [3k_1 + 6k_2] \cos(3t) + [-6k_1 + 3k_2] \sin(3t) &= 10\sin(3t) \end{aligned}$$

Άρα λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας των συναρτήσεων $\sin\omega t$ και $\cos\omega t$ (εδώ $\omega=3$) θα

$$\begin{aligned} \text{έχουμε:} \quad & 3k_1 + 6k_2 = 0 \\ & -6k_1 + 3k_2 = 10 \end{aligned}$$

Η λύση του συστήματος είναι: $k_1 = -\frac{4}{3}$, $k_2 = \frac{2}{3}$

Άρα η συνάρτηση $y_{\text{μερ}}(t) = -\frac{4}{3}\cos(3t) + \frac{2}{3}\sin(3t)$ είναι μια μερική λύση της Δ.Ε.

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα:

$$a \cos \omega t + b \sin \omega t = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{όπου } \varphi = \tan^{-1}(a/b)$$

(εδώ, για την τιμή του φ , προσοχή χρειάζεται στα πρόσημα των a και b !)

η $y_{\text{μερ}}(t)$ γράφεται και ως $y_{\text{μερ}}(t) = 1.4907 \sin(3t - 63.43^\circ)$

Άρα η γενική λύση: $y_{\text{γεν}}(t) = y_{\text{ομογ}}(t) + y_{\text{μερ}}(t)$

ή $y_{\text{γεν}}(t) = C_1 e^{-1.5t} + 1.4907 \sin(3t - 63.43^\circ)$

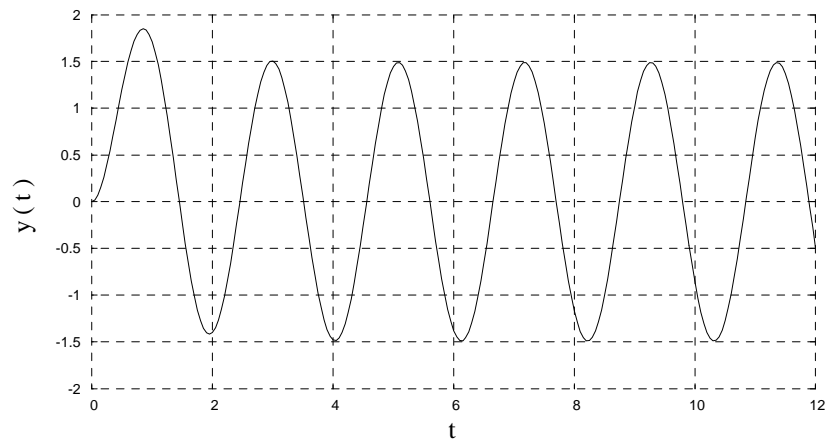
Με εφαρμογή της δεδομένης Α.Σ. $y(0^+) = 0$ θα πάρουμε:

$$y_{\text{γεν}}(0^+) = C_1 + 1.4907 \sin(-63.43^\circ) = 0 \Rightarrow C_1 = 1.3333$$

άρα η ειδική λύση της Δ.Ε. θα είναι:

$$y_{\text{ειδ}}(t) = y(t) = 1.3333 e^{-1.5t} + 1.4907 \sin(3t - 63.43^\circ)$$

Παρακάτω φαίνεται η γραφική παράσταση της λύσης



1. 5. 5) Επίλυση γραμμικής Δ.Ε. 2^{ης} τάξεως

Η γενική μορφή μιας γραμμικής Δ.Ε. 2^{ης} τάξεως είναι:

$$\Delta.E. : \quad (a_2 D^2 + a_1 D + a_0) y(t) = f(t)$$

$$A.S. : \quad y(0^+) = y_0, \quad D y(0^+) = y_1$$

$$\text{Αντίστοιχη ομογενής Δ.Ε.:} \quad (a_2 D^2 + a_1 D + a_0) y(t) = 0$$

$$\text{Άρα η χαρακτηριστική εξίσωση θα είναι:} \quad a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

Εξετάζουμε τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης:

i) 2 ρίζες πραγματικές και διάφορες μεταξύ τους s_1, s_2

η γενική λύση της ομογενούς θα είναι:

$$y_{\text{ομογ}}(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$$

ii) μια ρίζα πραγματική διπλή s_1

η γενική λύση της ομογενούς θα είναι:

$$y_{\text{ομογ}}(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 t e^{s_1 t}$$

iii) 2 ρίζες μιγαδικές συζυγείς $s_{1,2} = \sigma \pm j\omega$

η γενική λύση της ομογενούς θα είναι:

$$y_{\text{ομογ}}(t) = e^{\sigma t} [C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t]$$

ή ισοδύναμα:

$$y_{\text{ομογ}}(t) = e^{\sigma t} C_3 \sin(\omega t + \vartheta)$$

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση Δ.Ε. 2^{ης} τάξεως εμφανίζονται 2 προσδιοριστέες σταθερές οι οποίες υπολογίζονται από τις 2 δεδομένες Α.Σ. $y(0^+) = y_0, \quad D y(0^+) = y_1$

Για την εύρεση μιας ειδικής λύσης μιας Δ.Ε. 2^{ης} τάξεως εφαρμόζουμε την ίδια ακριβώς διαδικασία όπως με την εξίσωση 1^{ης} τάξεως.. Ακολουθούν παραδείγματα.

1. 5. 6) Παραδείγματα επίλυσης γραμμικών Δ.Ε. 2^{ας} τάξεως

Παρ. 6) Να λυθεί η Δ.Ε. $(D^2 + 1.1 D + 0.1) y (t) = 0.2$

με Α.Σ. $y (0^+) = 0$ $D y (0^+) = 4.25$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της Δ.Ε. θα είναι:

$$s^2 + 1.1 s + 0.1 = 0 \quad \text{με ρίζες} \quad s_1 = -0.1, \quad s_2 = -1$$

άρα η γενική λύση της ομογενούς θα είναι

$$y_{\text{ομογ}} (t) = C_1 e^{-0.1 t} + C_2 e^{-t}$$

Αναζητούμε μία μερική λύση

Επειδή $f (t) = 0.2 = \text{σταθ.}$ αναζητούμε μερική λύση της μορφής $y_{\text{μερ}} (t) = k = \text{σταθ.}$

Αντικαθιστώντας στην Δ.Ε.

$$(D^2 + 1.1 D + 0.1) y_{\text{μερ}} (t) = 0.2$$

ή $0.1 k = 0.2 \Rightarrow k = 2$ άρα $y_{\text{μερ}} (t) = 2$

άρα $y_{\text{γεν}} (t) = C_1 e^{-0.1 t} + C_2 e^{-t} + 2$

εφαρμόζοντας τις δεδομένες Α.Σ. $y (0^+) = 0$ $D y (0^+) = 4.75$ θα έχουμε:

$$y_{\text{γεν}} (0^+) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 + C_2 = -2$$

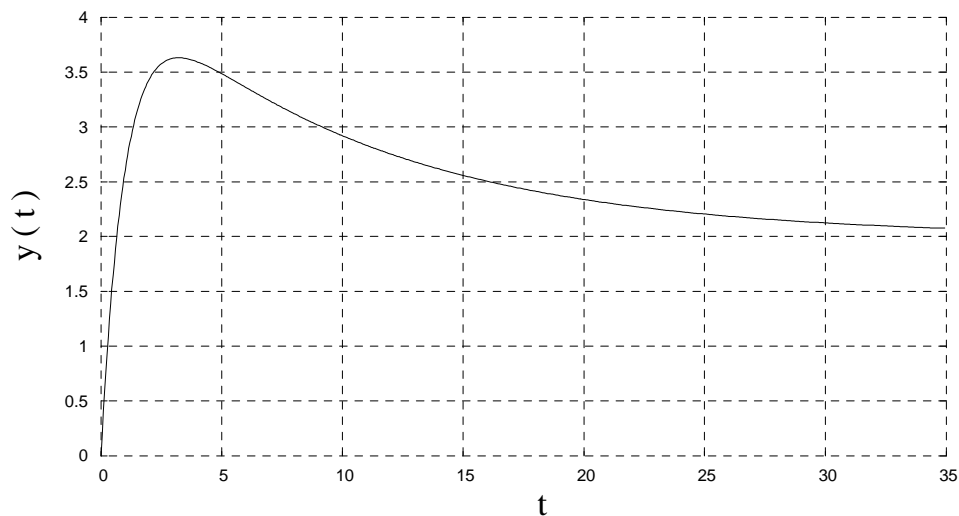
$$D y_{\text{γεν}} (0^+) = 4.75 \quad \Rightarrow \quad -0.1 C_1 - C_2 = 4.25$$

από τη λύση του συστήματος αυτού προκύπτει: $C_1 = 2.5$, $C_2 = -4.5$

Επομένως η ειδική λύση της Δ.Ε. θα είναι:

$$y_{\text{ειδ}} (t) = y (t) = 2.5 e^{-0.1 t} - 4.5 e^{-t} + 2$$

Παρακάτω φαίνεται η γραφική παράσταση της λύσης



Παρ. 7) Να λυθεί η Δ.Ε. $(D^2 + 0.4D + 18)y(t) = 2 + 3e^{-t}$

με Α.Σ. $y(0^+) = 1$ $Dy(0^+) = -1$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της Δ.Ε. θα είναι:

$$s^2 + 0.4s + 18 = 0$$

με μιγαδικές ρίζες: $s_1 = -0.2 + j4.238$, $s_2 = -0.2 - j4.238$

άρα η γενική λύση της ομογενούς θα είναι

$$y_{\text{ομογ}}(t) = e^{-0.2t} [C_1 \cos(4.238t) + C_2 \sin(4.238t)]$$

Αναζητούμε μία μερική λύση

Επειδή $f(t) = 2 + 3e^{-t}$ αναζητούμε μερική λύση της μορφής $y_{\text{μερ}}(t) = k_1 + k_2 e^{-t}$

άρα $Dy_{\text{μερ}}(t) = -k_2 e^{-t}$ και $D^2 y_{\text{μερ}}(t) = k_2 e^{-t}$

Αντικαθιστώντας στην Δ.Ε.

$$(D^2 + 0.4D + 18)y_{\text{μερ}}(t) = 2 + 3e^{-t}$$

προκύπτει: $k_2 e^{-t} - 0.4k_2 e^{-t} + 18k_1 + 18k_2 e^{-t} = 2 + 3e^{-t}$

ή $18.6k_2 e^{-t} + 18k_1 = 2 + 3e^{-t}$

άρα: $k_1 = 2/18 = 0.1111$, $k_2 = 3/18.6 = 0.1613$

επομένως $y_{\text{μερ}}(t) = 0.1111 + 0.1613 e^{-t}$

και η γενική λύση της Δ.Ε. θα είναι:

$$y_{\text{γεν}}(t) = y_{\text{ομογ}}(t) + y_{\text{μερ}}(t) = e^{-0.2t} [C_1 \cos(4.238t) + C_2 \sin(4.238t)] + 0.1613 e^{-t} + 0.1111$$

Εφαρμόζοντας τις δεδομένες Α.Σ. $y(0^+) = 1$ $Dy(0^+) = -1$ θα έχουμε:

$$y_{\text{γεν}}(0^+) = 1 \Rightarrow C_1 + 0.1613 + 0.1111 = 1 \Rightarrow C_1 = 0.7276$$

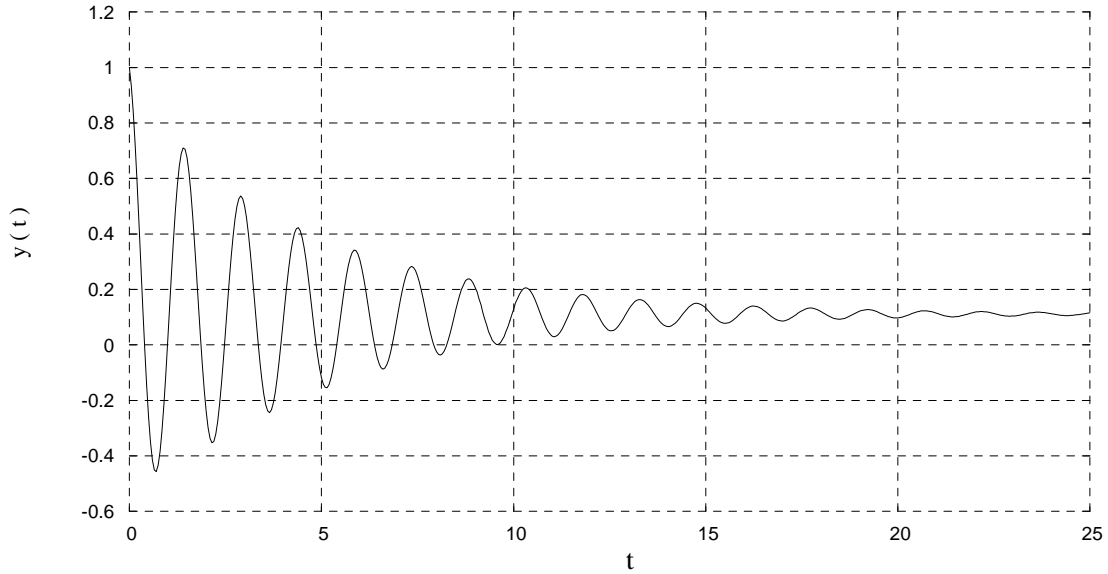
$$Dy_{\text{γεν}}(0^+) = -1 \Rightarrow -0.2C_1 + 4.238C_2 - 0.1613 = -1 \Rightarrow C_2 = -0.1636$$

Επομένως η ειδική λύση της Δ.Ε. θα είναι:

$$y_{\text{ειδ}}(t) = y(t) = e^{-0.2t} [0.7276 \cos(4.238t) - 0.1636 \sin(4.238t)] + 0.1613 e^{-t} + 0.1111$$

ή ισοδύναμα: $y(t) = 0.7458 e^{-0.2t} \sin(4.238t + 102.67^\circ) + 0.1613 e^{-t} + 0.1111$

Παρακάτω φαίνεται η γραφική παράσταση της λύσης του παραδείγματος 7



**Παρ. 8) Να λυθεί η Δ.Ε. $(D^2 + 1.7D + 0.6)y(t) = 4 \sin(5t)$
με Α.Σ. $y(0^+) = 1$ $Dy(0^+) = -4$**

Η χαρακτηριστική εξίσωση της Δ.Ε. θα είναι:

$$s^2 + 1.7s + 0.6 = 0 \quad \text{με ρίζες} \quad s_1 = -0.5, \quad s_2 = -1.2$$

άρα η γενική λύση της ομογενούς θα είναι

$$y_{\text{ομογ}}(t) = C_1 e^{-0.5t} + C_2 e^{-1.2t}$$

Αναζητούμε μία μερική λύση

Επειδή $f(t) = 4 \sin(5t)$ η μερική λύση θα είναι της μορφής:

$$y_{\text{μερ}}(t) = k_1 \cos(5t) + k_2 \sin(5t)$$

άρα $D y_{\text{μερ}}(t) = -5 k_1 \sin(5t) + 5 k_2 \cos(5t)$

και $D^2 y_{\text{μερ}}(t) = -25 k_1 \cos(5t) - 25 k_2 \sin(5t)$

αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των $y_{\text{μερ}}(t)$, $D y_{\text{μερ}}(t)$, $D^2 y_{\text{μερ}}(t)$ στην Δ.Ε. έχουμε:

$$-25 k_1 \cos(5t) - 25 k_2 \sin(5t) - 8.5 k_1 \sin(5t) + 8.5 k_2 \cos(5t) + 0.6 k_1 \cos(5t) + 0.6 k_2 \sin(5t) = 4 \sin(5t)$$

$$\begin{aligned} \text{ή: } \cos(5t) [-25 k_1 + 8.5 k_2 + 0.6 k_1] + \sin(5t) [-25 k_2 - 8.5 k_1 + 0.6 k_2] &= \\ = 4 \sin(5t) \end{aligned}$$

άρα προκύπτει το σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{aligned} -24.4 k_1 + 8.5 k_2 &= 0 \\ -8.5 k_1 - 24.4 k_2 &= 4 \end{aligned} \quad \text{με λύση:} \quad \begin{aligned} k_1 &= -0.0509 \\ k_2 &= -0.1462 \end{aligned}$$

και η μερική λύση $y_{\text{μερ}}(t)$ της Δ.Ε. θα είναι:

$$y_{\text{μερ}}(t) = -0.0509 \cos(5t) - 0.1462 \sin(5t)$$

η $y_{\text{μερ}}(t)$ ισοδύναμα γράφεται $y_{\text{μερ}}(t) = 0.1548 \sin(5t - 160.8^\circ)$

επομένως η γενική λύση της Δ.Ε. θα είναι:

$$y_{\text{γεν}}(t) = y_{\text{ομογ}}(t) + y_{\text{μερ}}(t) = C_1 e^{-0.5t} + C_2 e^{-1.2t} + 0.1548 \sin(5t - 160.8^\circ)$$

Εφαρμόζοντας τις δεδομένες Α.Σ. $y(0^+) = 1$ $Dy(0^+) = -4$ θα έχουμε:

$$\begin{aligned} y_{\text{γεν}}(0^+) = 1 &\Rightarrow C_1 + C_2 + 0.1548 \sin(-160.8^\circ) = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow C_1 + C_2 = 1.0509 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Dy_{\text{γεν}}(0^+) = -4 &\Rightarrow -0.5C_1 - 1.2C_2 + 5 \cdot 0.1548 \cos(-160.8^\circ) = -4 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -0.5C_1 - 1.2C_2 = -3.2690 \end{aligned}$$

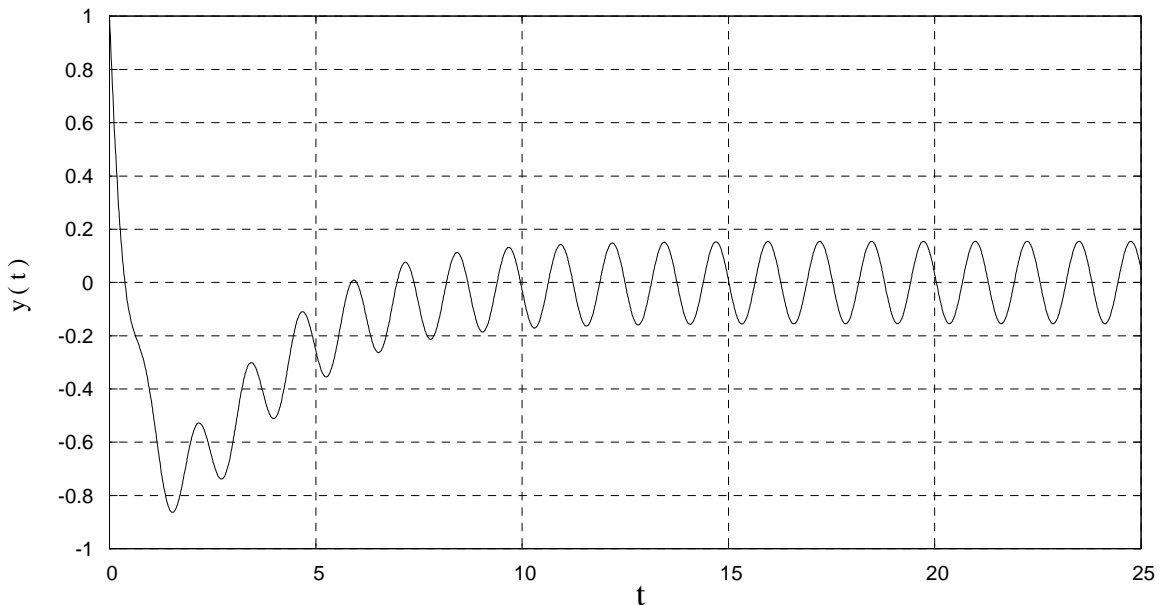
η λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 1.0509 \\ -0.5C_1 - 1.2C_2 &= -3.2690 \end{aligned} \quad \text{δίνει:} \quad \begin{aligned} C_1 &= -2.8688 \\ C_2 &= 3.9194 \end{aligned}$$

Επομένως η ειδική λύση της Δ.Ε. θα είναι:

$$y_{\text{ειδ}}(t) = y(t) = -2.8688 e^{-0.5t} + 3.9194 e^{-1.2t} + 0.1548 \sin(5t - 160.8^\circ)$$

Παρακάτω φαίνεται η γραφική παράσταση της λύσης



Παρ. 9) Να λυθεί η Δ.Ε. $(D^2 + 6D + 25)y(t) = 8 \cos(15t)$

με Α.Σ. $y(0^+) = 0 \quad Dy(0^+) = 3$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της Δ.Ε. θα είναι:

$$s^2 + 6s + 25 = 0 \quad \text{με μιγαδικές ρίζες} \quad s_1 = -3 + j4, \quad s_2 = -3 - j4$$

άρα η γενική λύση της ομογενούς θα είναι

$$y_{\text{ομογ}}(t) = e^{-3t} [C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t)]$$

Αναζητούμε μία μερική λύση

Επειδή $f(t) = 8 \cos(15t)$ αναζητούμε μερική λύση της μορφής

$$y_{\text{μερ}}(t) = k_1 \cos(15t) + k_2 \sin(15t)$$

άρα

$$Dy_{\text{μερ}}(t) = -15k_1 \sin(15t) + 15k_2 \cos(15t)$$

και

$$D^2 y_{\text{μερ}}(t) = -225k_1 \cos(15t) - 225k_2 \sin(15t)$$

αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των $y_{\text{μερ}}(t)$, $Dy_{\text{μερ}}(t)$, $D^2 y_{\text{μερ}}(t)$ στην Δ.Ε. έχουμε:

$$\begin{aligned} & -225k_1 \cos(15t) - 225k_2 \sin(15t) - 90k_1 \sin(15t) + 90k_2 \cos(15t) + \\ & + 25k_1 \cos(15t) + 25k_2 \sin(15t) = 8 \cos(15t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ή: } \cos(15t) [-225k_1 + 90k_2 + 25k_1] + \sin(15t) [-225k_2 - 90k_1 + 25k_2] = \\ = 8 \cos(15t) \end{aligned}$$

άρα προκύπτει το σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{aligned} -200k_1 + 90k_2 &= 8 \\ -90k_1 - 200k_2 &= 0 \end{aligned} \quad \text{με λύση:} \quad \begin{aligned} k_1 &= -0.03326 \\ k_2 &= 0.01497 \end{aligned}$$

άρα η μερική λύση $y_{\text{μερ}}(t)$ θα είναι:

$$y_{\text{μερ}}(t) = -0.03326 \cos(15t) + 0.01497 \sin(15t)$$

που ισοδύναμα γράφεται $y_{\text{μερ}}(t) = 0.03647 \sin(15t - 65.77^\circ)$

επομένως η γενική λύση της Δ.Ε. θα είναι:

$$\begin{aligned} y_{\text{γεν}}(t) = y_{\text{ομογ}}(t) + y_{\text{μερ}}(t) = e^{-3t} [C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t)] + \\ + 0.03647 \sin(15t - 65.77^\circ) \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας τις δεδομένες Α.Σ. $y(0^+) = 0 \quad Dy(0^+) = 3$ θα έχουμε:

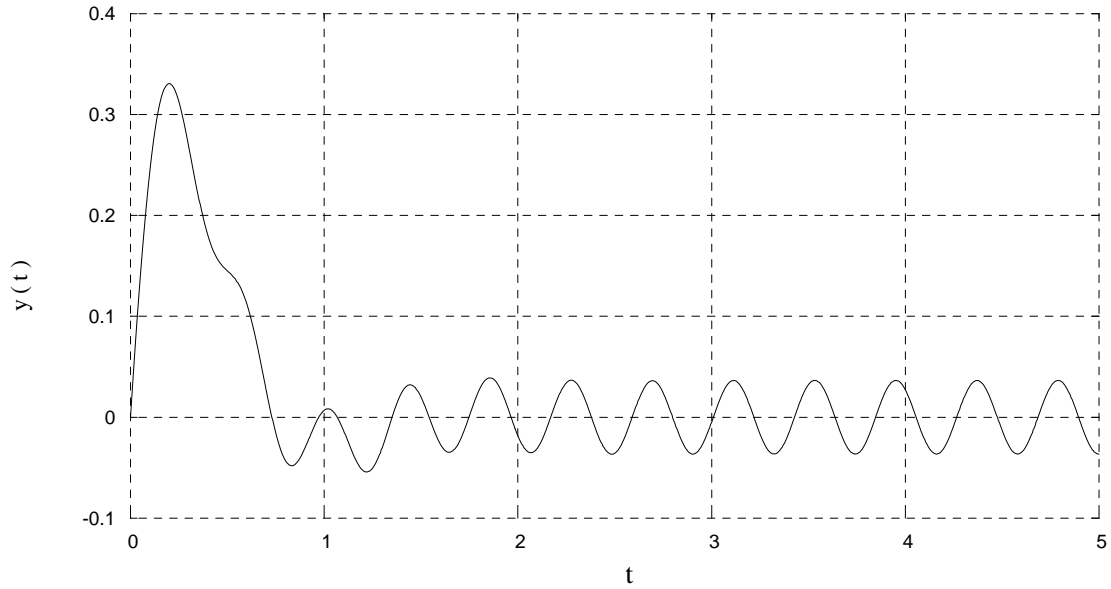
$$\begin{aligned} y_{\text{γεν}}(0^+) = 0 &\Rightarrow C_1 + 0.03647 \sin(-65.77^\circ) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow C_1 - 0.03326 = 0 \Rightarrow C_1 = 0.03326 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Dy_{\text{γεν}}(0^+) = 3 &\Rightarrow -3C_1 + 4C_2 + 15 \cdot 0.03647 \cos(-65.77^\circ) = 3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -3C_1 + 4C_2 = 2.7755 \Rightarrow C_2 = 0.7188 \end{aligned}$$

Επομένως η ειδική λύση της Δ.Ε. θα είναι:

$$y_{\text{ειδ}}(t) = y(t) = e^{-3t} [0.03326 \cos(4t) + 0.7188 \sin(4t)] + \\ + 0.03647 \sin(15t - 65.77^\circ)$$

Παρακάτω φαίνεται η γραφική παράσταση της λύσης



1. 5. 7) Επίλυση γραμμικών Δ.Ε. 3^{ης} και ανωτέρας τάξεως

Η γενική μορφή μια γραμμικής Δ.Ε. 3^{ης} τάξεως είναι:

$$\Delta.E. : \quad \left(a_3 D^3 + a_2 D^2 + a_1 D + a_0 \right) y (t) = f (t)$$

$$A.S. : \quad y (0^+) = y_0 , \quad D y (0^+) = y_1 , \quad D^2 y (0^+) = y_2$$

$$\text{Αντίστοιχη ομογενής Δ.Ε.:} \quad \left(a_3 D^3 + a_2 D^2 + a_1 D + a_0 \right) y (t) = 0$$

Άρα η χαρακτηριστική εξίσωση θα είναι: $a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$ (3^{ου} βαθμού)

Η μεθοδολογία επίλυσης είναι η ίδια όπως και στα προηγούμενα. Αναζητούμε τις 3 ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης και αυτό αποτελεί ήδη ένα πρόβλημα λόγω της δυσκολίας εφαρμογής του σχετικού τύπου (τύπος Cardano) που υπάρχει στα Μαθηματικά. Η άλλη επιλογή είναι να υπολογιστούν οι ρίζες με εφαρμογή κάποιου αριθμητικού αλγόριθμου.

Θεωρώντας λοιπόν γνωστές τις ρίζες (πραγματικές ή μιγαδικές) θα έχουμε:

- Αν έχουμε τρεις πραγματικές ρίζες απλές s_1, s_2, s_3 , τότε η γενική λύση της ομογενούς θα είναι:

$$y_{\text{ομογ}} (t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} + C_3 e^{s_3 t}$$

- Αν έχουμε μια πραγματική απλή ρίζα s_1 και μια πραγματική διπλή ρίζα s_2 τότε:

$$y_{\text{ομογ}} (t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} + C_3 t e^{s_2 t}$$

- Αν έχουμε μια πραγματική τριπλή ρίζα s_1 τότε:

$$y_{\text{ομογ}} (t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 t e^{s_1 t} + C_3 t^2 e^{s_1 t}$$

- Τέλος αν έχουμε μια πραγματική ρίζα s_1 και ένα ζεύγος συζυγών μιγαδικών ριζών $s_{2,3} = \sigma \pm j\omega$ θα έχουμε μια αντίστοιχη λύση

$$y_{\text{ομογ}} (t) = C_1 e^{s_1 t} + e^{\sigma t} [C_2 \cos \omega t + C_3 \sin \omega t]$$

ή ισοδύναμα: $y_{\text{ομογ}} (t) = C_1 e^{s_1 t} + e^{\sigma t} C_4 \sin (\omega t + \theta)$

Η γενική λύση της ομογενούς $y_{\text{ομογ}}(t)$ θα περιλαμβάνει τρεις προσδιοριστέες σταθερές C_1, C_2, C_3 . Η μερική λύση βρίσκεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως και στην Δ.Ε. 2ας τάξεως και οι τρεις σταθερές που απαιτούνται για την εύρεση της ειδικής λύσης υπολογίζονται από τις τρεις δεδομένες αρχικές συνθήκες. $y(0^+) = y_0$, $Dy(0^+) = y_1$, $D^2y(0^+) = y_2$

Η μεθοδολογία γενικεύεται και για Δ.Ε. 4^{ης} και ανωτέρας τάξεως και η μόνη δυσκολία είναι η πολυπλοκότητα των σχετικών μαθηματικών εκφράσεων που προκύπτουν.

Παρακάτω ακολουθεί ένα τελευταίο παράδειγμα επίλυσης Δ.Ε. 3^{ης} τάξεως.

**Παρ. 10) Να λυθεί η Δ.Ε. $(D^3 + 1.3D^2 + 225.55D + 67.575)y(t) = 135.15$
με Α.Σ. $y(0^+) = 0$ $Dy(0^+) = 80$ $D^2y(0^+) = -100$**

Η χαρακτηριστική εξίσωση της Δ.Ε. θα είναι:

$$s^3 + 1.3s^2 + 225.55s + 67.575 = 0$$

με ρίζες $s_1 = -0.3$, $s_2 = -0.5 + j15$, $s_3 = -0.5 - j15$

άρα η γενική λύση της ομογενούς θα είναι:

$$y_{\text{ομογ}}(t) = C_1 e^{-0.3t} + e^{-0.5t} [C_2 \cos(15t) + C_3 \sin(15t)]$$

Αναζητούμε μία μερική λύση:

Επειδή $f(t) = 135.15 = \text{σταθ.}$ η μερική λύση θα έχει τη μορφή $y_{\text{μερ.}}(t) = k = \text{σταθ.}$

Αντικαθιστώντας στη Δ.Ε.

$$(D^3 + 1.3D^2 + 225.55D + 67.575)y_{\text{μερ.}}(t) = 135.15$$

αμέσως προκύπτει ότι:

$$y_{\text{μερ.}}(t) = 2$$

Επομένως η γενική λύση της Δ.Ε. θα είναι:

$$y_{\text{γεν.}}(t) = y_{\text{ομογ}}(t) + y_{\text{μερ.}}(t) = C_1 e^{-0.3t} + e^{-0.5t} [C_2 \cos(15t) + C_3 \sin(15t)] + 2$$

Εφαρμόζοντας τις δεδομένες Α.Σ. $y(0^+) = 0$, $Dy(0^+) = 80$, $D^2y(0^+) = -100$
θα έχουμε:

$$y_{\gamma\epsilon\nu}(0^+) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 + 2 = 0$$

$$Dy_{\gamma\epsilon\nu}(0^+) = 80 \Rightarrow -0.3C_1 - 0.5C_2 + 15C_3 = 80$$

$$D^2y_{\gamma\epsilon\nu}(0^+) = -100 \Rightarrow 0.09C_1 - 224.75C_2 - 15C_3 = -100$$

Από τη λύση του συστήματος:

$$\begin{array}{rclcl} C_1 & + & C_2 & & = -2 \\ -0.3C_1 & - & 0.5C_2 & + & 15C_3 = 80 \\ 0.09C_1 & - & 224.75C_2 & - & 15C_3 = -100 \end{array}$$

παίρνουμε: $C_1 = -2.091$, $C_2 = 0.091$, $C_3 = 5.294$

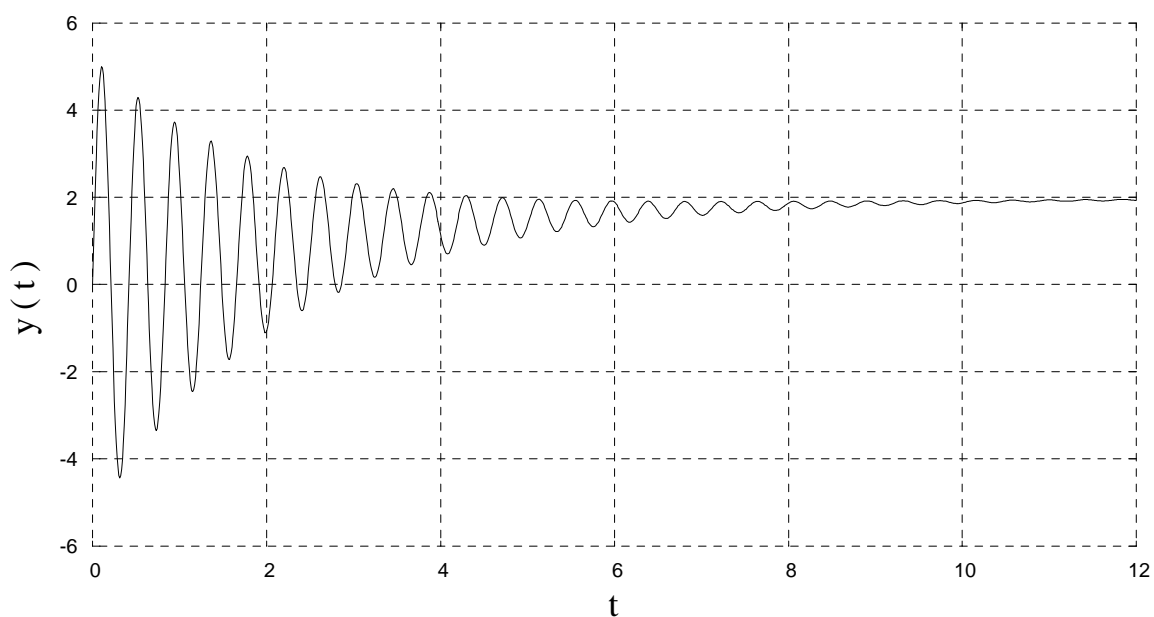
Επομένως η ειδική λύση της Δ.Ε. θα είναι:

$$y_{\epsilon\iota\delta}(t) = y(t) = -2.091 e^{-0.3t} + e^{-0.5t} [0.091 \cos(15t) + 5.294 \sin(15t)] + 2$$

η ισοδύναμη:

$$y_{\epsilon\iota\delta}(t) = y(t) = -2.091 e^{-0.3t} + e^{-0.5t} [5.295 \sin(15t + 1^\circ)] + 2$$

Παρακάτω φαίνεται η γραφική παράσταση της λύσης



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ

2. 1) Η έννοια του συστήματος

2. 1. 1) Ορισμός του συστήματος

Παρακάτω δίδεται ένας γενικός ορισμός του συστήματος :

Καλούμε **σύστημα** ένα σύνολο στοιχείων και διατάξεων οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους και έχουν σκοπό να επιτελέσουν κάποια διαδικασία (ή έργο).

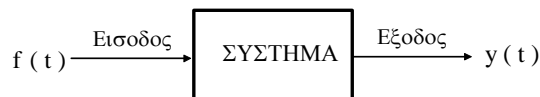
Τα συστήματα περιγράφονται από μαθηματικές σχέσεις, που συνδέουν κάποιο «**αίτιο**» με κάποιο «**αποτέλεσμα**», με χρήση διαφόρων «**δυναμικών**» **μεταβλητών** (δηλ. μεταβλητών που είναι συναρτήσεις του χρόνου). Οι μεταβλητές αυτές είναι φυσικά μεγέθη, η φυσική διάσταση των οποίων εξαρτάται από το ίδιο το σύστημα.

Κάποιες από τις μεταβλητές αυτές θεωρούνται ως **διεγέρσεις** (ή **είσοδοι, ή αίτια**) και κάποιες άλλες ως **αποκρίσεις** (ή **έξοδοι, ή αποτελέσματα**). Ένα σύστημα μπορεί να έχει μία ή περισσότερες εισόδους και εξόδους. Επίσης αναφέρουμε ότι οι είσοδοι και οι έξοδοι ονομάζονται και **σήματα**.

Με βάση τον ορισμό αυτό μπορούμε άμεσα να θεωρήσουμε πολλές απλές περιπτώσεις συστημάτων όπως είναι π.χ. τα βασικά ηλεκτρικά στοιχεία R, L, C, αλλά και τα ηλεκτρικά κυκλώματα. Προηγουμένως όμως θα διατυπώσουμε τους ορισμούς κάποιων ειδικών κατηγοριών συστημάτων τα οποία θα μας απασχολήσουν κατά κύριο λόγο.

Θεωρούμε ένα σύστημα με μία είσοδο $f(t)$ και μία έξοδο $y(t)$. Τα $f(t)$ και $y(t)$ μπορούν να είναι **οποιαδήποτε φυσικά μεγέθη**.

Το σύστημα μπορεί να συμβολιστεί όπως παρακάτω:



Στο σημείο αυτό δεν μας ενδιαφέρει καθόλου η εσωτερική δομή του συστήματος (δηλ τι υπάρχει μέσα στο «κουτί»). Απλώς θεωρούμε ότι τα μεγέθη $f(t)$ και $y(t)$ συνδέονται με κάποια μαθηματική σχέση.

2. 1. 2) Κατηγορίες συστημάτων

α) Γραμμικό σύστημα

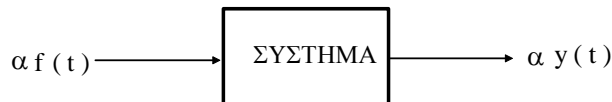
Ένα σύστημα θα λέγεται **γραμμικό** όταν υπακούει στους δύο ακόλουθους κανόνες

1) Αν η είσοδος $f(t)$ δίνει έξοδο $y(t)$ τότε η είσοδος $\alpha f(t)$ δίνει έξοδο $\alpha y(t)$ όπου α ένας οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός. Σχηματικά:

Αν



τότε



2) Αν η είσοδος $f_1(t)$ δίνει έξοδο $y_1(t)$ και η είσοδος $f_2(t)$ δίνει έξοδο $y_2(t)$ τότε η είσοδος $f_1(t) + f_2(t)$ δίνει έξοδο $y_1(t) + y_2(t)$. Σχηματικά:

Αν



και



Τότε



Καθε σύστημα που δεν ακολουθεί **και τους δύο** αυτούς κανόνες λέγεται **μη γραμμικό**

Τα γραμμικά συστήματα έχουν κυρίαρχη θέση στην μελέτη των συστημάτων γενικά, γιατί η μαθηματική περιγραφή τους είναι αρκετά απλή. Ολόκληρη η βασική θεωρία κυκλωμάτων στηρίζεται στη γραμμικότητα και μπορούμε να πούμε ότι ακόμα και μη γραμμικά συστήματα (ή μη γραμμικά φαινόμενα) πολλές φορές μελετώνται κάνοντας την παραδοχή ότι είναι κατά προσέγγιση γραμμικά.

Εύκολα μπορεί ναδειχθεί ότι για τις ακόλουθες περιπτώσεις συστημάτων, όπου δίδεται και η μαθηματική σχέση μεταξύ εισόδου $f(t)$ και εξόδου $y(t)$, ισχύει η γραμμικότητα.

$$y(t) = kf(t), \quad y(t) = k \frac{df(t)}{dt}, \quad y(t) = k \int f(t) dt$$

όπου k μια σταθερά.

Ενώ αντίθετα για τις ακόλουθες περιπτώσεις η γραμμικότητα δεν ισχύει

$$y(t) = kf(t)^2, \quad y(t) = k \sin(f(t)), \quad y(t) = ke^{f(t)}$$

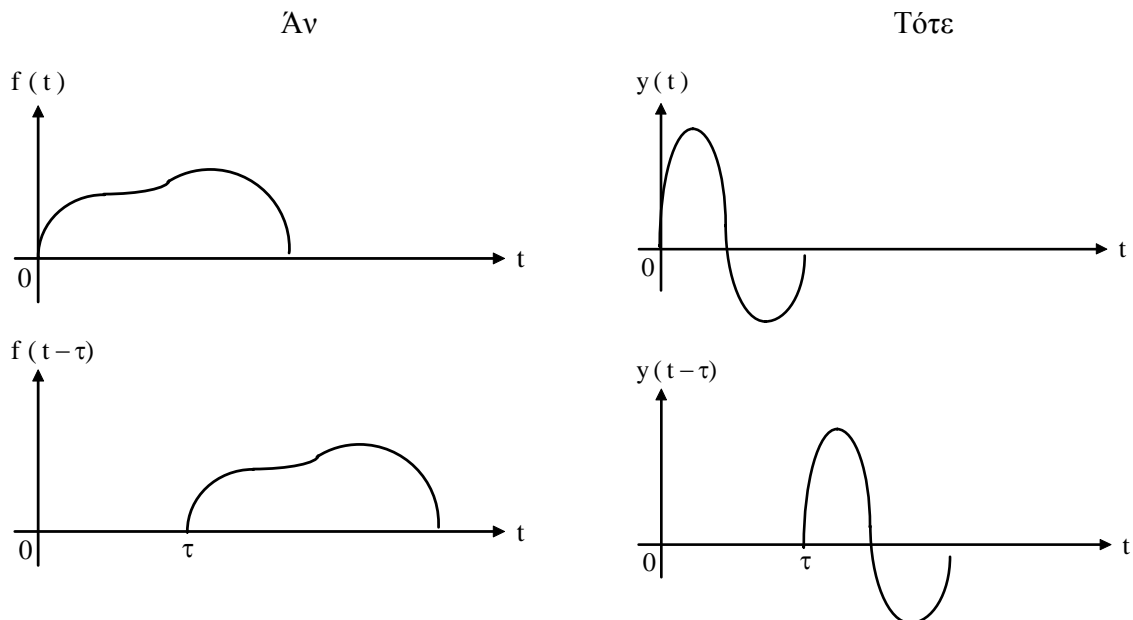
β) Χρονικά σταθερό σύστημα

Ένα σύστημα θα λέγεται χρονικά σταθερό όταν ικανοποιείται η ακόλουθη πρόταση:

Αν η είσοδος $f(t)$ δίνει έξοδο $y(t)$ τότε η είσοδος $f(t - \tau)$ δίνει έξοδο $y(t - \tau)$ όπου $\tau > 0$.

Αυτό σημαίνει ότι αν εισάγουμε την ίδια είσοδο $f(t)$ με χρονική καθυστέρηση τ τότε θα πάρουμε την ίδια ακριβώς έξοδο $y(t)$ με την ίδια χρονική καθυστέρηση τ . Η απόκριση του συστήματος σε κάποια είσοδο δεν εξαρτάται από την χρονική στιγμή κατά την οποία επιβάλλεται η είσοδος αυτή. Η εσωτερική δομή του συστήματος και επομένως η μαθηματική σχέση μεταξύ $f(t)$ και $y(t)$ δεν εξαρτάται από τον χρόνο.

Σχηματικά:



Κάθε σύστημα που δεν ικανοποιεί την παραπάνω πρόταση λέγεται **χρονικά μεταβλητό**

Για παράδειγμα το σύστημα $y(t) = k_1 f(t) + k_2$ είναι χρονικά σταθερό, ενώ το σύστημα $y(t) = k_1 \sin(\omega t) f(t) + k_2$ είναι χρονικά μεταβλητό.

γ) Συγκεντρωμένο σύστημα

Η έννοια του συγκεντρωμένου συστήματος σχετίζεται με το αν τα **σήματα** εισόδου και εξόδου $f(t)$ και $y(t)$ θεωρούνται συναρτήσεις μόνον του χρόνου και όχι του χώρου. Αν είναι απαραίτητο να έχουμε και χωρική εξάρτηση δηλαδή $f(x, y, z, t)$ και $y(x, y, z, t)$ τότε αυτό σημαίνει ότι τα μεγέθη f και y έχουν κυματική φύση (είναι κύματα) και το σύστημα λέγεται **μη συγκεντρωμένο ή διανεμημένο**. Στην περίπτωση αυτή για την μελέτη – ανάλυση του συστήματος απαιτείται η κυματική θεωρία.

Μπορούμε να εξετάσουμε την έννοια του συγκεντρωμένου συστήματος και με το ακόλουθο σκεπτικό:

Ένα σήμα εισόδου $f(t)$ μπορεί να περιέχει διάφορες συχνότητες από τις οποίες η μεγαλύτερη είναι έστω η f_{\max} . Η συχνότητα αυτή αντιστοιχεί σε ένα μήκος κύματος λ_{\min} σύμφωνα με τη γνωστή σχέση $\lambda_{\min} = c / f_{\max}$, όπου $c = 3 \times 10^8$ m/sec η ταχύτητα του φωτός. Αν οι φυσικές – γεωμετρικές διαστάσεις του συστήματος είναι **κατά πολύ μικρότερες** από το μήκος κύματος λ_{\min} τότε το σύστημα λέγεται **συγκεντρωμένο**. Αν όμως οι διαστάσεις αυτές είναι συγκρίσιμες με το λ_{\min} τότε το σύστημα λέγεται **διανεμημένο** (το κυματικό φαινόμενο κάνει αισθητή την παρουσία του). Παρακάτω αναφέρουμε δύο χαρακτηριστικά παραδείγματα.

i) Έστω ένα ηλεκτρικό κύκλωμα που λειτουργεί στη συχνότητα $f = 50$ Hz. Στη συχνότητα αυτή αντιστοιχεί μήκος κύματος $\lambda = 6000$ km. Αν οι διαστάσεις του κυκλώματος είναι της τάξεως του 1 m, είναι προφανές ότι μιλάμε για συγκεντρωμένο κύκλωμα-σύστημα.

ii) Θεωρούμε τώρα ένα άλλο κύκλωμα το οποίο λειτουργεί σε συχνότητα $f = 1$ GHz (π.χ. κινητό τηλέφωνο, συσκευή radar, κ.λ.π.). Στο 1 GHz αντιστοιχεί μήκος κύματος $\lambda = 30$ cm που είναι της **ίδιας** τάξης μεγέθους με τις φυσικές διαστάσεις πχ. ενός κινητού τηλεφώνου. Προφανώς εδώ έχουμε διανεμημένο κύκλωμα – σύστημα το οποίο δεν μπορεί να μελετηθεί με την βασική θεωρία κυκλωμάτων.

Συνοψίζοντας όλα τα προηγούμενα αναφέρουμε τα εξής:

Η βασική θεωρία κυκλωμάτων ασχολείται με γραμμικά , χρονικά σταθερά και συγκεντρωμένα κυκλώματα τα οποία αποτελούνται από γραμμικά , χρονικά σταθερά και συγκεντρωμένα ηλεκτρικά στοιχεία.

2. 1. 3) Προβλήματα συστημάτων

Κατά την μελέτη των συστημάτων εμφανίζονται τα δύο ακόλουθα προβλήματα:

α) Δίδεται το σύστημα δηλ. η πλήρης μαθηματική περιγραφή του και επίσης δίδεται το σήμα εισόδου (διέγερση) $f(t)$. Ζητείται να υπολογιστεί το σήμα εξόδου (απόκριση) $y(t)$.

Το πρόβλημα αυτό λέγεται **ανάλυση συστήματος** και είναι αυτό με το οποίο ασχολείται η βασική θεωρία συστημάτων (ή η βασική θεωρία κυκλωμάτων αντίστοιχα)

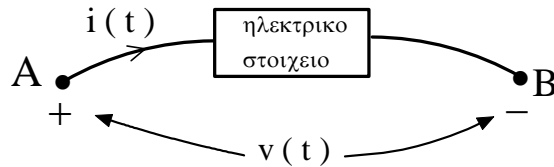
β) Δίδεται το σήμα εισόδου (διέγερση) $f(t)$ και επίσης δίδεται σήμα εξόδου (απόκριση) $y(t)$. Ζητείται να ευρεθεί η πλήρης δομή και μαθηματική περιγραφή του συστήματος

Το πρόβλημα αυτό λέγεται **σύνθεση συστήματος** και είναι κατά πολύ πολυπλοκότερο και δυσκολότερο απο το προηγούμενο. Με το πρόβλημα αυτό ασχολείται η προχωρημένη θεωρία συστημάτων (ή κυκλωμάτων αντίστοιχα).

2. 2) Το ηλεκτρικό στοιχείο

2. 2. 1) Ορισμός του ηλεκτρικού στοιχείου – φορές αναφοράς

Λέγοντας ηλεκτρικό στοιχείο εννοούμε «αντικείμενο» δύο διακεκριμένων ακροδεκτών **A** και **B** στο οποίο μπορούμε να ορίσουμε τα δύο βασικά μεγέθη της θεωρίας κυκλωμάτων, την τάση $v(t)$ και το ρεύμα $i(t)$. (βλ. σχήμα)



Τα δύο αυτά μεγέθη $v(t)$ και $i(t)$ συνοδεύονται **πάντοτε** από τις φορές αναφοράς τους, οι οποίες είναι:

- για την τάση $v(t)$ ένα (+) στον ένα ακροδέκτη και ένα (-) στον άλλο
- για το ρεύμα $i(t)$ ένα βέλος

Οι φορές αναφοράς τοποθετούνται αυθαίρετα, χωρίς κανένα περιορισμό, και η σημασία τους είναι η ακόλουθη:

Αν $v(t) > 0$ τότε ο ακροδέκτης με το σημείο (+) έχει **υψηλότερο δυναμικό** από τον ακροδέκτη με το (-). Αν $v(t) < 0$ ισχύει το αντίστροφο.

Αν $i(t) > 0$ τότε **θετικά** ηλεκτρικά φορτία κινούνται σύμφωνα με την κατεύθυνση του βέλους, ενώ αν $i(t) < 0$ τα φορτία αυτά κινούνται με κατεύθυνση αντίθετη από αυτήν που δείχνει το βέλος.

Όπως προαναφέραμε κανένας περιορισμός δεν υπάρχει για την τοποθέτηση των φορών αναφοράς. Αν όμως αυτές τεθούν όπως στο ανωτέρω σχήμα, δηλαδή από τον ακροδέκτη με το σημείο (+) για την τάση $v(t)$, να εισέρχεται το ρεύμα $i(t)$, τότε λέγονται **συσχετισμένες** φορές αναφοράς. Η μεγάλη χρησιμότητα των φορών αναφοράς είναι ότι χωρίς αυτές δεν μπορούν να γραφούν οι εξισώσεις αναλύσεως της θεωρίας κυκλωμάτων (Οι δύο νόμοι του Kirchhoff).

Τα ηλεκτρικά στοιχεία μπορούν είτε να παράγουν, από μόνα τους, ηλεκτρική ενέργεια οπότε λέγονται **ενεργητικά** (π.χ. οι ηλεκτρικές πηγές) είτε να καταναλώνουν ή να αποθηκεύουν ηλεκτρική ενέργεια οπότε λέγονται **παθητικά**

Ένα ηλεκτρικό στοιχείο μπορεί προφανώς να θεωρηθεί και σαν σύστημα με είσοδο την τάση $v(t)$ και έξοδο το ρεύμα $i(t)$ ή και αντίστροφα, με είσοδο το $i(t)$ και έξοδο την $v(t)$.

Η θεωρία κυκλωμάτων εξετάζει τα ηλεκτρικά στοιχεία **πάντοτε** ως **συγκεντρωμένα** συστήματα και στις περισσότερες περιπτώσεις ως γραμμικά και χρονικά σταθερά. Η μελέτη μη γραμμικών και χρονικά μεταβλητών στοιχείων αποτελεί προχωρημένο θέμα της θεωρίας κυκλωμάτων.

2.2.2) Το ηλεκτρικό στοιχείο στο πεδίο του χρόνου

Με τον όρο «πεδίο του χρόνου» εννοούμε τη κατάσταση κατα την οποία όλα τα φυσικά μεγέθη που εμπλέκονται στα διάφορα φυσικά φαινόμενα, μελετώνται και περιγράφονται μαθηματικά, σαν συναρτήσεις του χρόνου δηλαδή όπως ακριβώς συμβαίνει στην πραγματικότητα. Αυτός ο τρόπος περιγραφής παρέχει μεγάλη φυσική «εποπτεία» στην μελέτη των φαινομένων αλλά έχει το σχετικό μειονέκτημα της μαθηματικής δυσκολίας ειδικά σε περιπτώσεις περιγραφής πολυπλόκων φαινομένων (π.χ. στη θεωρία Ηλεκτρομαγνητικών Πεδίων).

Εκτός από την μελέτη στο **πεδίο του χρόνου** υπάρχει, όπως θα δούμε, και ο τρόπος μελέτης στο **πεδίο της συχνότητας**.

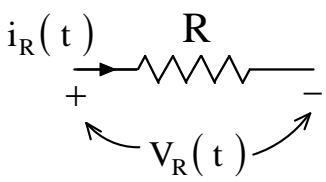
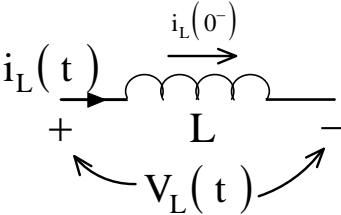
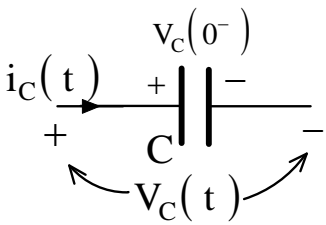
Παρακάτω εξετάζουμε το ηλεκτρικό στοιχείο στο πεδίο του χρόνου.

Είναι προφανές ότι τα δύο **ηλεκτρικά μεγέθη** $v(t)$ και $i(t)$ που ορίζονται σε ένα **ηλεκτρικό στοιχείο** πρέπει να **συνδέονται** μεταξύ τους με κάποια **μαθηματική σχέση** η οποία θα εκφράζει κάποιο **φυσικό νόμο του Ηλεκτρισμού**. Η **σχέση** αυτή μπορεί να είναι **απλή αλγεβρική** ή **ολοκληρωδιαφορική**, να **υπακούει στη γραμμικότητα** ή **όχι**, κ.λ.π.

Στην θεωρία κυκλωμάτων είναι κοινά παραδεκτό ότι υπάρχουν **τρία βασικά παθητικά ηλεκτρικά στοιχεία**. Στην πλέον απλή περίπτωση θεωρούμε ότι τα στοιχεία αυτά, θεωρούμενα σαν συστήματα, **υπακούουν** στους κανόνες της **γραμμικότητας** και της **χρονικής σταθερότητας**.

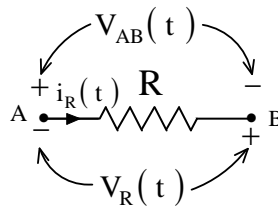
2. 2. 3) Τα 3 βασικά ηλεκτρικά στοιχεία

Αυτά φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

<p style="text-align: center;">ΗΛ. ΣΤΟΙΧΕΙΟ</p>	<p style="text-align: center;">Σχέσεις Τάσεως – Ρεύματος και Ρεύματος- Τάσεως στο πεδίο του χρόνου</p>
<p style="text-align: center;">Ωμική αντίσταση R (Ohm)</p> 	$V_R (t) = R i_R (t)$ $i_R (t) = \frac{1}{R} V_R (t)$
<p style="text-align: center;">Πηνίο με αυτεπαγωγή L (Henry)</p> 	$V_L (t) = L \frac{d i_L (t)}{d t}$ $i_L (t) = i_L (0^-) + \frac{1}{L} \int_0^t V_L (t') d t'$ <p style="text-align: center;">όπου $i_L (0^-)$ η αρχική κατάσταση για το ρεύμα του πηνίου</p>
<p style="text-align: center;">Πυκνωτής με χωρητικότητα C (Farad)</p> 	$i_C (t) = C \frac{d V_C (t)}{d t}$ $V_C (t) = V_C (0^-) + \frac{1}{C} \int_0^t i_C (t') d t'$ <p style="text-align: center;">όπου $V_C (0^-)$ η αρχική κατάσταση για την τάση του πυκνωτή</p>

Παρατηρήσεις

α) Οι φορές αναφοράς των $v(t)$ και $i(t)$ έχουν γραφεί σε όλες τις περιπτώσεις ως συσχετισμένες. Αυτό, ως γνωστόν, **δεν** είναι υποχρεωτικό να συμβαίνει. Σε περίπτωση όμως που επιλεγούν φορές αναφοράς μη συσχετισμένες χρειάζεται να τεθεί ένα **αρνητικό πρόσημο** στις σχέσεις τάσεως – ρεύματος. Στην παρακάτω περίπτωση έχει τεθεί το πρόσημο (-) για την τάση $V_R(t)$ στον ακροδέκτη A από τον οποίο εισέρχεται το ρεύμα $i_R(t)$.



Οι σχέσεις γράφονται: $V_R(t) = -R i_R(t)$ και $i_R(t) = -\frac{1}{R} V_R(t)$

[**Εξήγηση** : Θεωρείται πάντοτε ότι ισχύει $R > 0$. Αν είναι $i_R(t) > 0$ τότε θετικά φορτία κινούνται από το A προς το B (φορά βέλους), άρα θα πρέπει ο ακροδέκτης A να έχει υψηλότερο δυναμικό από τον B, συνεπώς θα πρέπει $V_{AB} = V_A - V_B > 0$. (δηλαδή η τάση V_R έχει το (+) στο B, ενώ η τάση V_{AB} έχει το (+) στο A). Άρα προφανώς θα ισχύει $V_R(t) = V_{BA} = -V_{AB}$, πράγμα το οποίο σημαίνει ότι οπωσδήποτε πρέπει να ισχύει $V_R(t) < 0$. Αυτή η απαραίτητη προϋπόθεση ($V_R(t) < 0$) εξασφαλίζεται με τη σχέση $V_R(t) = -R i_R(t)$ (εφ' όσον θεωρήσαμε αρχικά ότι $i_R(t) > 0$). Ανάλογα σκεπτικό έχουμε και με την υπόθεση $i_R(t) < 0$, όπου τότε θα πρέπει να ισχύει πάντοτε $V_R(t) > 0$. Ακριβώς τα αντίστοιχα ισχύουν και για το πηνίο και τον πυκνωτή.]

β) Εύκολα φαίνεται ότι όλες οι σχέσεις τάσεως – ρεύματος των στοιχείων R, L, C (αναλογία, παράγωγος και ολοκλήρωμα) ικανοποιούν τους δύο κανόνες της γραμμικότητας.

γ) Ειδικά για το πηνίο η σχέση $V_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$ **δεν** χρειάζεται ένα (-) μπροστά της

διότι η τάση $V_L(t)$ δεν είναι η ηλεκτρεγερτική δύναμη που αναπτύσσεται σύμφωνα με τον νόμο του Faraday αλλά η αντίθετη της.

δ) Το πηνίο και ο πυκνωτής είναι στοιχεία που μπορούν να **αποθηκεύουν** ενέργεια, πράγμα το οποίο δεν μπορεί να κάνει η ωμική αντίσταση. Έτσι στο πηνίο έχουμε αποθήκευση ενέργειας μαγνητοστατικού πεδίου και στον πυκνωτή αποθήκευση ενέργειας ηλεκτροστατικού πεδίου. Αυτή η δυνατότητα αποθήκευσης ενέργειας εκφράζεται μέσω της αρχικής κατάστασης, του

ρεύματος στο πηνίο και για της τάσεως στον πυκνωτή. Συγκεκριμένα αν στα άκρα ενός πηνίου τη χρονική στιγμή $t = 0$ (αρχή του χρόνου) επιβάλλεται, από τον «εξωτερικό κόσμο», κάποια τάση $V_L(t)$, τότε για τον υπολογισμό του ρεύματος $i_L(t)$ θα πρέπει να είναι γνωστή και η τιμή $i_L(0^-)$, δηλαδή η τιμή του ρεύματος του πηνίου «**απειροστά κοντά**» πριν από την χρονική στιγμή εφαρμογής της διέγερσης $V_L(t)$. Η τιμή $i_L(0^-)$ λέγεται, όπως προαναφέρθηκε, **αρχική κατάσταση**, και είναι απαραίτητο πάντοτε να δίνεται. Ακριβώς τα αντίστοιχα ισχύουν, στην περίπτωση του πυκνωτή, με την τάση $V_C(0^-)$.

2. 2. 4) Η έννοια της τελέστριας σύνθετης αντίστασης $Z(D)$

Αν θεωρήσουμε ότι **οι αρχικές καταστάσεις $i_L(0^-)$ και $V_C(0^-)$ έχουν μηδενικές τιμές**, τότε οι σχέσεις τάσεως – ρεύματος για το πηνίο και τον πυκνωτή μπορούν να γραφούν:

$$V_L(t) = L \frac{d i_L(t)}{d t} \quad \text{και} \quad i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t V_L(t') d t'$$

$$V_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_C(t') d t' \quad \text{και} \quad i_C(t) = C \frac{d V_C(t)}{d t}$$

Ορίζουμε τον «τελεστή» της παραγώγου:

$$D = \frac{d}{d t} (\dots)$$

δηλαδή ο τελεστής D εφαρμόζεται σε μία συνάρτηση του χρόνου και την παραγωγίζει. Προφανώς D^2 σημαίνει 2^η παράγωγο και D^n n-οστή παράγωγο.

Επίσης ορίζουμε τον τελεστή του ολοκληρώματος

$$\frac{1}{D} = \int_0^t (\dots) d t$$

δηλαδή ο τελεστής $1/D$ εφαρμόζεται σε μία συνάρτηση του χρόνου και την ολοκληρώνει

Οι πράξεις μεταξύ των D γίνονται κανονικά σαν να ήταν αλγεβρικές ποσότητες, έτσι π.χ.

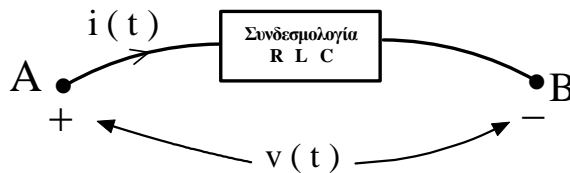
$$D + 3 D = 4 D, \quad D^2 D^3 = D^5, \quad D^3 / D = D^2 \quad \text{κ.λ.π.}$$

Με βάση τους προηγούμενους ορισμούς οι σχέσεις τάσεως- ρεύματος, για το πηνίο και τον πυκνωτή, μπορούν να γραφούν πιο απλά ως εξής:

$$V_L(t) = L D i_L(t) \quad \text{και} \quad i_L(t) = \frac{1}{L D} V_L(t)$$

$$V_C(t) = \frac{1}{C D} i_C(t) \quad \text{και} \quad i_C(t) = C D V_C(t)$$

Μπορούμε τώρα να σκεφτούμε έναν «γενικευμένο» νόμο του Ohm σύμφωνα με τον οποίο σε ένα ηλεκτρικό στοιχείο, αποτελούμενο από οποιαδήποτε συνδεσμολογία γραμμικών και χρονικά σταθερών στοιχείων R, L, C :



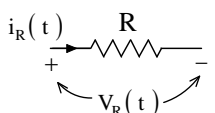
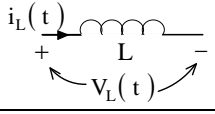
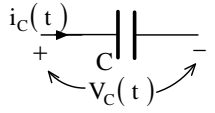
ορίζεται η γενικευμένη «τελέστρια» σύνθετη αντίσταση $Z(D)$

$$Z(D) = \frac{V(t)}{i(t)} \quad (\text{Ohm})$$

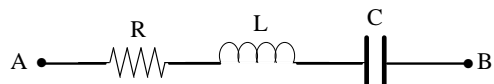
και η γενικευμένη «τελέστρια» σύνθετη αγωγιμότητα $Y(D)$

$$Y(D) = \frac{1}{Z(D)} = \frac{i(t)}{V(t)} \quad (\text{Ohm}^{-1})$$

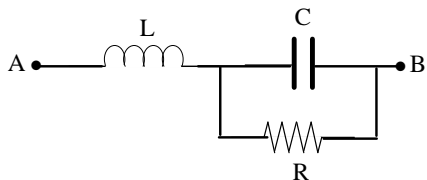
Για τα τρία βασικά παθητικά ηλεκτρικά στοιχεία οι τελέστριες σύνθετες αντιστάσεις και αγωγιμότητες θα είναι:

<p>Ωμική αντίσταση R</p> 	$Z_R(D) = \frac{V_R(t)}{i_R(t)} = R$	$Y_R(D) = \frac{i_R(t)}{V_R(t)} = \frac{1}{R}$
<p>Πηνίο L</p> 	$Z_L(D) = \frac{V_L(t)}{i_L(t)} = LD$	$Y_L(D) = \frac{i_L(t)}{V_L(t)} = \frac{1}{LD}$
<p>Ποκνωτής C</p> 	$Z_C(D) = \frac{V_C(t)}{i_C(t)} = \frac{1}{CD}$	$Y_C(D) = \frac{i_C(t)}{V_C(t)} = CD$

Αν θεωρήσουμε συνδεσμολογίες δύο ακροδεκτών **A-B**, αποτελούμενες από τα στοιχεία R, L, C μπορούμε να υπολογίσουμε την συνολική τελέστρια σύνθετη αντίσταση $Z_{AB}(D)$, εφαρμόζοντας όλους τους κανόνες σύνθεσης αντιστάσεων που είναι γνωστοί από τη στοιχειώδη θεωρία κυκλωμάτων. Παρακάτω αναφέρουμε δύο παραδείγματα:



$$Z_{AB}(D) = R + LD + \frac{1}{CD} = \frac{LCD^2 + RCD + 1}{CD}$$



$$Z_{AB}(D) = LD + \frac{R \frac{1}{CD}}{R + \frac{1}{CD}} = \frac{R}{RCD + 1} + LD = \frac{RLCD^2 + LD + R}{RCD + 1}$$

Γενικά η σύνθετη αντίσταση $Z(D)$ μιας συνδεσμολογίας από στοιχεία R, L, C θα έχει τη μορφή :

$$Z(D) = \frac{P(D)}{Q(D)} = \frac{p_m D^m + p_{m-1} D^{m-1} + \dots + p_1 D + p_0}{q_n D^n + q_{n-1} D^{n-1} + \dots + q_1 D + q_0}$$

όπου n και m ακέραιοι αριθμοί και $p_0, p_1, \dots, p_m, q_0, q_1, \dots, q_n$ **θετικοί** πραγματικοί αριθμοί. Άρα η $Z(D)$ θα είναι μια ρητή συνάρτηση (πηλίκο πολυωνύμων) του D .

Από την σχέση $Z(D) = \frac{P(D)}{Q(D)} = \frac{V(t)}{i(t)}$ προκύπτει ότι:

$$Q(D)V(t) = P(D)i(t)$$

$$\begin{aligned} \text{ή} \quad q_n D^n V(t) + q_{n-1} D^{n-1} V(t) + \dots + q_1 D V(t) + q_0 V(t) &= \\ &= p_m D^m i(t) + p_{m-1} D^{m-1} i(t) + \dots + p_1 D i(t) + p_0 i(t) \end{aligned}$$

Δηλαδή σε μια συνδεσμολογία από γραμμικά και χρονικά σταθερά στοιχεία R, L, C τα μεγέθη $V(t)$ και $i(t)$ συνδέονται με μια γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές.

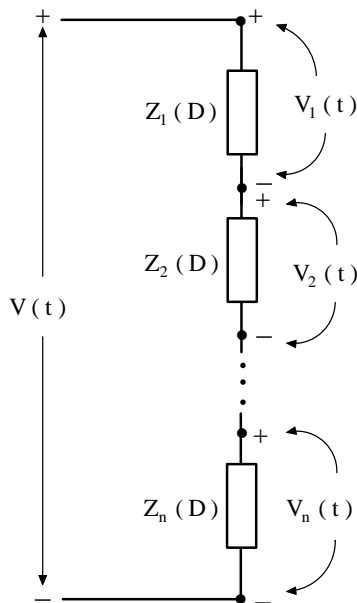
2.3) Διαιρέτης τάσεως και ρεύματος

2.3.1) Εισαγωγικά

Οι κανόνες του διαιρέτη τάσεως και του διαιρέτη ρεύματος είναι δύο πολύ χρήσιμα «εργαλεία» στην ανάλυση των ηλεκτρικών δικτύων και χρησιμοποιούνται πολύ συχνά

2.3.2) Διαιρέτης τάσεως

Αν έχουμε n –τελέστριες αντιστάσεις $Z_1(D), Z_2(D), \dots, Z_n(D)$, συνδεδεμένες εν σειρά, (διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα) τότε η ολική τάση $V(t)$ στα άκρα της συνδεσμολογίας καταμερίζεται (διαιρείται) σε κάθε αντίσταση σύμφωνα με τον κανόνα:



$$V_1(t) = V(t) \frac{Z_1(D)}{Z_1(D) + Z_2(D) + \dots + Z_n(D)}$$

$$V_2(t) = V(t) \frac{Z_2(D)}{Z_1(D) + Z_2(D) + \dots + Z_n(D)}$$

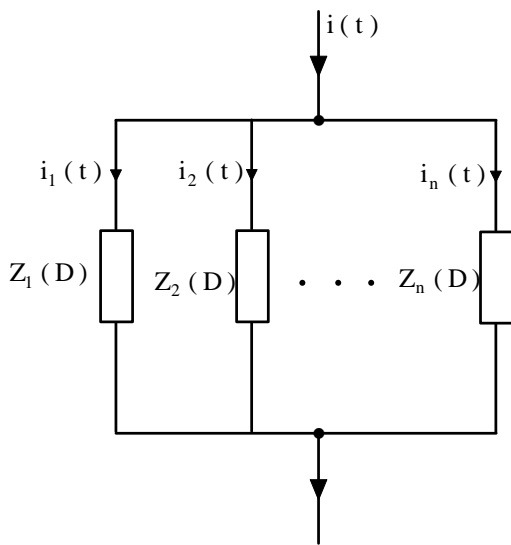
γενικά

$$V_k(t) = V(t) \frac{Z_k(D)}{Z_1(D) + Z_2(D) + \dots + Z_n(D)}$$

όπου $k = 1, 2, \dots, n$

2. 3. 3) Διαιρέτης ρεύματος

Αν έχουμε n –τελέστριες αντιστάσεις $Z_1 (D) , Z_2 (D) , \dots , Z_n (D)$, συνδεδεμένες παράλληλα, (έχουν κοινή τάση στα άκρα τους) τότε το ολικό ρεύμα $i (t)$ που διαρρέει τη συνδεσμολογία καταμερίζεται (διαιρείται) σε κάθε αντίσταση σύμφωνα με τον κανόνα:



$$i_1 (t) = i (t) \frac{\frac{1}{Z_1 (D)}}{\frac{1}{Z_1 (D)} + \frac{1}{Z_2 (D)} + \dots + \frac{1}{Z_n (D)}}$$

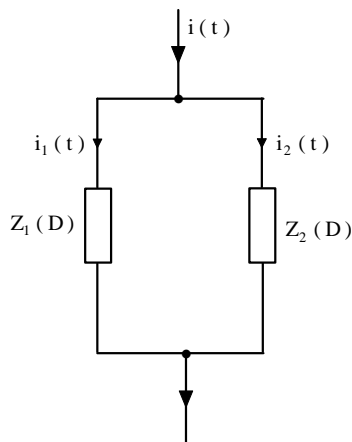
$$i_2 (t) = i (t) \frac{\frac{1}{Z_2 (D)}}{\frac{1}{Z_1 (D)} + \frac{1}{Z_2 (D)} + \dots + \frac{1}{Z_n (D)}}$$

γενικά:

$$i_k (t) = i (t) \frac{\frac{1}{Z_k (D)}}{\frac{1}{Z_1 (D)} + \frac{1}{Z_2 (D)} + \dots + \frac{1}{Z_n (D)}}$$

όπου $k = 1, 2, \dots, n$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι ειδικά για $n = 2$ ισχύει:

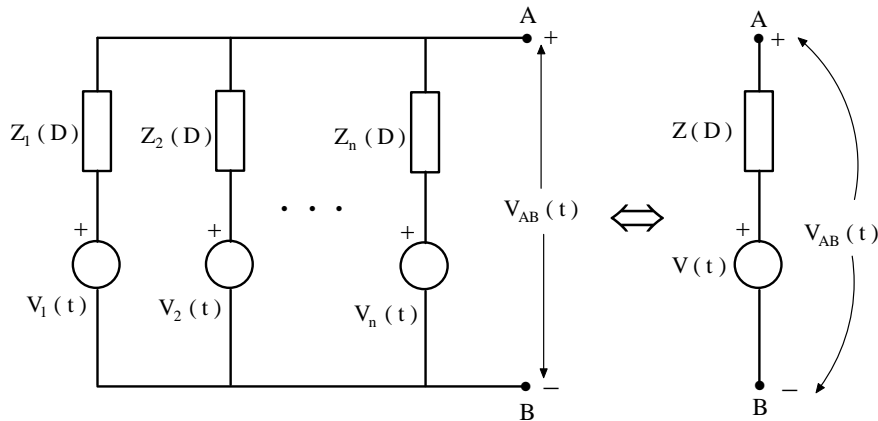


$$i_1 (t) = i (t) \frac{Z_2 (D)}{Z_1 (D) + Z_2 (D)}$$

$$i_2 (t) = i (t) \frac{Z_1 (D)}{Z_1 (D) + Z_2 (D)}$$

2.4) Θεώρημα Millman

Το θεώρημα Millman είναι και αυτό πολύ χρήσιμο στην ανάλυση ηλεκτρικών δικτύων και εφαρμόζεται στην περίπτωση όπου έχουμε παράλληλη σύνδεση κλάδων που αποτελούνται από πηγές τάσεως και τελέστριες σύνθετες αντιστάσεις. Η σχετική τοπολογία (συνδεσμολογία) φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό η συνδεσμολογία του αριστερού μέρους του σχήματος είναι ισοδύναμη με την συνδεσμολογία μιας πηγής τάσεως εν σειρά με μια τελέστρια σύνθετη αντίσταση. Οι τιμές των μεγεθών $V(t)$ και $Z(D)$ δίδονται από τους τύπους:

$$V(t) = \frac{V_1(t) \frac{1}{Z_1(D)} + V_2(t) \frac{1}{Z_2(D)} + \dots + V_n(t) \frac{1}{Z_n(D)}}{\frac{1}{Z_1(D)} + \frac{1}{Z_2(D)} + \dots + \frac{1}{Z_n(D)}}$$

και

$$Z(D) = \frac{1}{\frac{1}{Z_1(D)} + \frac{1}{Z_2(D)} + \dots + \frac{1}{Z_n(D)}}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει αμέσως μια έκφραση για την τάση $V_{AB}(t)$ διότι λόγω της ισοδυναμίας των δύο συνδεσμολογιών θα ισχύει:

$$V_{AB}(t) = V(t)$$

Παρατηρήσεις

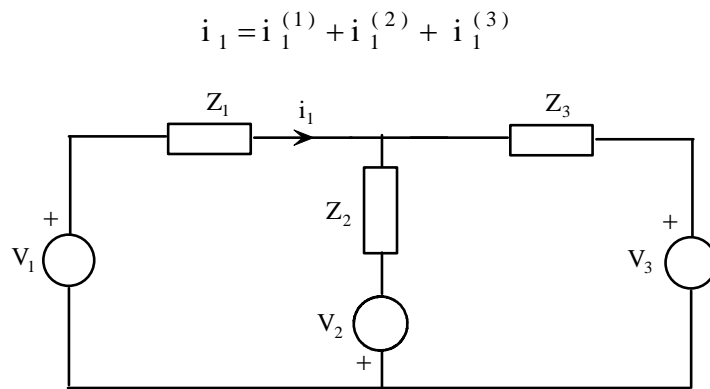
- 1) Είναι **απαραίτητο** όλοι οι παράλληλοι κλάδοι να περιέχουν μία τελέστρια σύνθετη αντίσταση
- 2) Αν σε κάποιο κλάδο (ή κλάδους) δεν υπάρχει πηγή τάσεως τότε δεν γράφεται ο αντίστοιχος όρος στον αριθμητή της $V(t)$
- 3) Αν σε κάποιο κλάδο η πηγή τάσεως έχει αντίθετη πολικότητα από αυτήν που φαίνεται στο σχήμα, τότε ο αντίστοιχος όρος στον αριθμητή της $V(t)$ γράφεται με το πρόσημο (-) μπροστά.

2.5) Θεώρημα Επαλληλίας

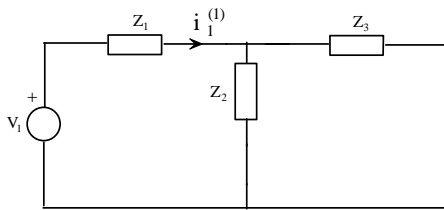
Η αρχή της επαλληλίας (ή υπερθέσεως) είναι μια βασικότατη αρχή που εφαρμόζεται ευρύτατα όχι μόνο στην Ηλεκτρολογία αλλά και σε πολλά άλλα επιστημονικά πεδία. Είναι προφανές ότι η επαλληλία είναι άμεση συνέπεια της γραμμικότητας. Αν δούμε τους δύο κανόνες με τους οποίους ορίζεται ένα γραμμικό σύστημα, ο 2^{ος} κανόνας εκφράζει ακριβώς την αρχή της επαλληλίας. Στην περίπτωση των ηλεκτρικών δικτύων το θεώρημα επαλληλίας διατυπώνεται ως εξής:

Σε ένα ηλεκτρικό δίκτυο με n πηγές, όπου απαραίτητα $n \geq 2$, το ρεύμα ή η τάση σε κάθε κλάδο του δικτύου μπορεί να γραφεί ως ένα αλγεβρικό άθροισμα $n - προσθετέων$ όρων. Ο κάθε όρος προκύπτει από την δράση μιας μόνο πηγής κάθε φορά ενώ όλες οι υπόλοιπες μηδενοποιούνται.

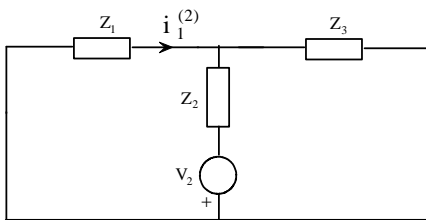
Παρακάτω δίνουμε ένα απλό σχηματικό παράδειγμα για την επεξήγηση του θεωρήματος. Στο δίκτυο του σχήματος το ρεύμα i_1 μπορεί να υπολογιστεί ως το άθροισμα των ρευμάτων



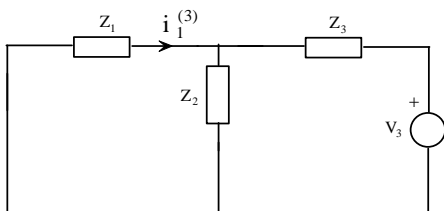
όπου τα ρεύματα $i_1^{(1)}$, $i_1^{(2)}$, $i_1^{(3)}$ υπολογίζονται διαδοχικά από την επίλυση των παρακάτω δικτύων:



Στο δίκτυο αυτό δρα μόνον η πηγή V_1 ενώ οι άλλες δύο έχουν μηδενποιηθεί, δηλ βραχυκυκλωθεί εφ' όσον είναι πηγές τάσεως



Στο δίκτυο αυτό δρα μόνον η πηγή V_2 ενώ οι άλλες δύο έχουν μηδενποιηθεί



Στο δίκτυο αυτό δρα μόνον η πηγή V_3 ενώ οι άλλες δύο έχουν μηδενποιηθεί

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΣΗΜΑΤΑ

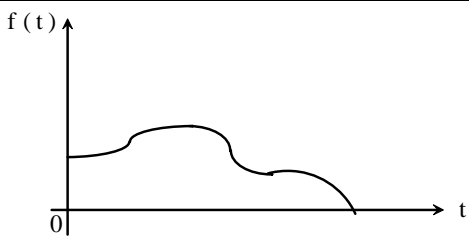
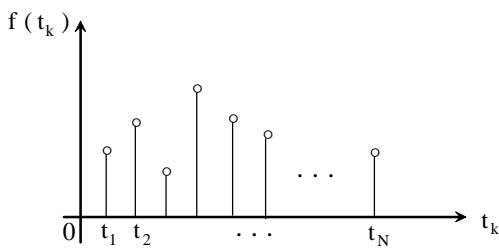
3.1) Ορισμός του σήματος

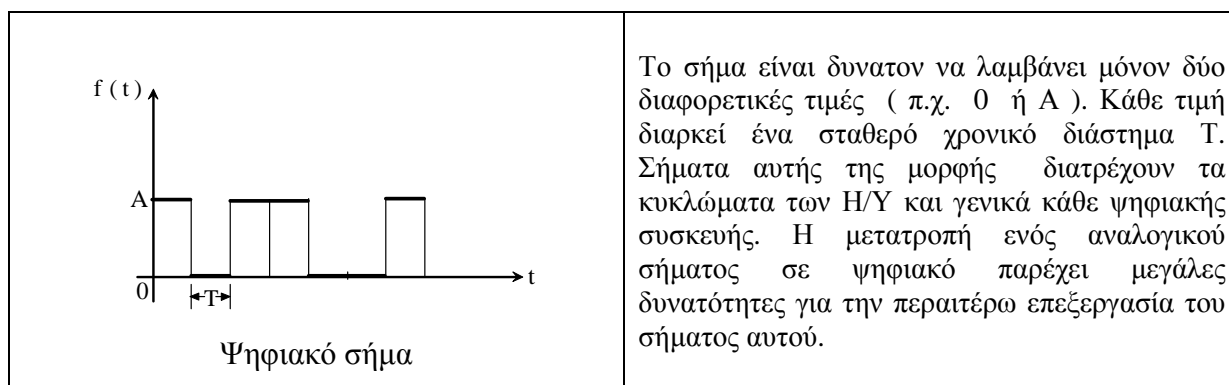
Ας θεωρήσουμε ένα οποιοδήποτε φυσικό μέγεθος που εμπλέκεται σε κάποιο φυσικό φαινόμενο. Το μέγεθος αυτό μπορεί να έχει σταθερή τιμή ή και να μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου. Σε κάθε περίπτωση το φυσικό αυτό μέγεθος **είναι φορέας κάποιας «πληροφορίας» και μπορούμε να το αποκαλούμε «σήμα».**

Για την μελέτη και την επεξεργασία ενός σήματος πρέπει να γνωρίζουμε τις τιμές του στο πεδίο του χρόνου. Αυτό μπορεί να γίνει είτε μέσω μιας αναλυτικής έκφρασης (συναρτησιακή σχέση) είτε μέσω ενός πίνακα τιμών. Η αναλυτική έκφραση ενός σήματος μπορεί να πραγματοποιηθεί και με τη βοήθεια απλών μαθηματικών συναρτήσεων οι οποίες λέγονται στοιχειώδη σήματα. Τέτοιες συναρτήσεις είναι π. χ. η ημιτονοειδής συνάρτηση, η εκθετική συνάρτηση, καθώς και κάποιες άλλες συναρτήσεις που θα αναφερθούν στα επόμενα.

3.2) Κατηγορίες σημάτων

Τα σήματα γενικά κατατάσσονται σε διάφορες κατηγορίες ανάλογα με την μορφή και τις ιδιότητές τους. Μπορούμε εδώ να αναφέρουμε τις τρεις βασικές κατηγορίες σημάτων:

 <p style="text-align: center;">Αναλογικό (ή συνεχές) σήμα</p>	<p>Το σήμα περιγράφεται αναλυτικά με μια συνεχή συνάρτηση $f(t)$. Προφανώς σε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα ΔT υπάρχουν άπειρες τιμές του σήματος</p>
 <p style="text-align: center;">Διακριτό σήμα</p>	<p>Το σήμα περιγράφεται από ένα πεπερασμένο αριθμό τιμών του, $f(t_1), f(t_2), \dots, f(t_N)$, για ένα χρονικό διάστημα. Οι τιμές αυτές λαμβάνονται συνήθως ανα ίσα χρονικά διαστήματα. Ένα διακριτό σήμα μπορεί να προέλθει από ένα συνεχές σήμα με κατάλληλη δειγματοληψία. Η μεθοδολογία αυτή χρησιμοποιείται πολύ στην τεχνολογία μετρήσεων και επεξεργασίας σημάτων</p>



Επίσης μπορούμε να διακρίνουμε τα σήματα σε **αιτιοκρατικά** και σε **στοχαστικά**. Ένα στοχαστικό σήμα για να περιγραφεί απαιτεί μη πεπερασμένο αριθμό παραμέτρων και έτσι μελετάται με την βοήθεια στατιστικών νόμων. Παράδειγμα στοχαστικού σήματος είναι π.χ. ο θόρυβος. Τα αιτιοκρατικά σήματα, αντίθετα, περιγράφονται πλήρως από ένα πεπερασμένο αριθμό παραμέτρων.

3.3) Παράμετροι σημάτων

Γενικά η περιγραφή ενός σήματος μπορεί να γίνει είτε με την πλήρη γνώση των τιμών του σε κάθε χρονική στιγμή, είτε, απλά, με την γνώση μερικών παραμέτρων του σήματος. Οι δύο βασικότερες παράμετροι ενός σήματος είναι η **μέση τιμή** και η **ενεργός τιμή**.

Μέση τιμή σήματος (average value)

Για ένα συνεχές σήμα $f(t)$, που παίρνει τιμές σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$, η μέση τιμή του ορίζεται ως εξής:

$$f_{\mu} = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$$

Αν το σήμα είναι διακριτό δηλαδή δίδονται N τιμές του με τη μορφή $f(t_k)$

$$\text{όπου } t_k = k \Delta t, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

τότε η μέση τιμή του υπολογίζεται από την σχέση:

$$f_{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k)$$

Ενεργός (ή ενδεικνύμενη) τιμή σήματος (effective value, RMS value)

Για ένα συνεχές σήμα $f(t)$, που παίρνει τιμές σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$, ορίζεται ως εξής

$$f_{ev} = \sqrt{\frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(t) dt}$$

Δηλ. η ενεργός τιμή είναι ίση με την τετραγωνική ρίζα της μέσης τιμής του τετραγώνου του σήματος.

Για ένα διακριτό σήμα

$$f_{ev} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f^2(t_k)}$$

3.4) Στοιχειώδη σήματα

Τα στοιχειώδη σήματα περιγράφονται από απλές (στοιχειώδεις) συναρτήσεις και διακρίνονται σε ομαλά και σε ανώμαλα σήματα.

Τα **ομαλά σήματα** περιγράφονται από εκθετικές και ημιτονοειδείς συναρτήσεις ή και γραμμικούς συνδυασμούς αυτών με άπειρους ή πεπερασμένους όρους

Τα **στοιχειώδη ανώμαλα σήματα** αποτελούν μια ειδική κατηγορία σημάτων και ονομάζονται ανώμαλα γιατί δεν ορίζονται σ' αυτά, με αυστηρό τρόπο, μαθηματικές έννοιες όπως του ορίου, της παραγώγου, του ολοκληρώματος κ.λ.π. Τα σήματα αυτά χρησιμοποιούνται ως ειδικές διεγέρσεις σε ηλεκτρικά δίκτυα και συστήματα γενικότερα, η παρατήρηση δε των αντιστοίχων αποκρίσεων που λαμβάνονται, παίζει κυρίαρχο ρόλο στη μελέτη του συστήματος.

3.5) Στοιχειώδη ανώμαλα σήματα

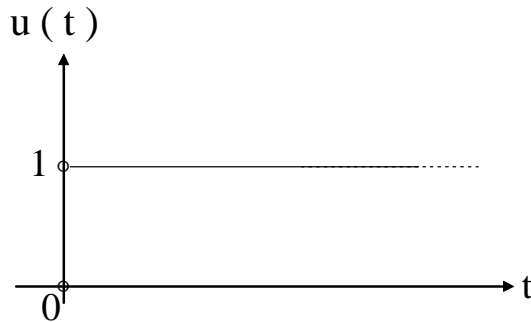
Θα αναφέρουμε παρακάτω τα 3 στοιχειώδη ανώμαλα σήματα καθώς και τις βασικές τους ιδιότητες.

3.5.1) Μοναδιαία βηματική συνάρτηση $u(t)$

Ορίζεται ως εξής:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{για } t > 0 \\ 0 & \text{για } t < 0 \\ \text{αοριστη} & \text{για } t = 0 \end{cases}$$

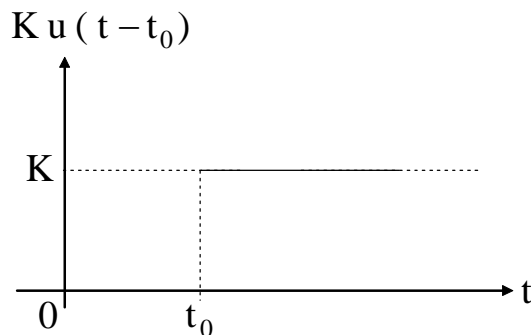
Η γραφική παράσταση της θα είναι:



Η συνάρτηση έχει μια ασυνέχεια για $t = 0$ και προφανώς ισχύει: $u(0^-) = 0$ και $u(0^+) = 1$

Πρακτικά το σήμα αυτό εκφράζει την «απότομη» επιβολή μιας σταθερής διέγερσης σε ένα σύστημα με το «κλείσιμο» ενός διακόπτη για $t = 0$.

Σύμφωνα με τον προηγούμενο ορισμό η συνάρτηση: $K u(t - t_0)$ (όπου $t_0 > 0$) θα έχει γραφική παράσταση:

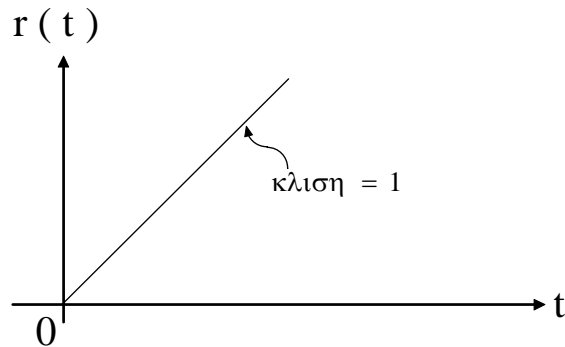


3.5.2) Μοναδιαία αναρριχητική συνάρτηση $r(t)$

Ορίζεται ως εξής:

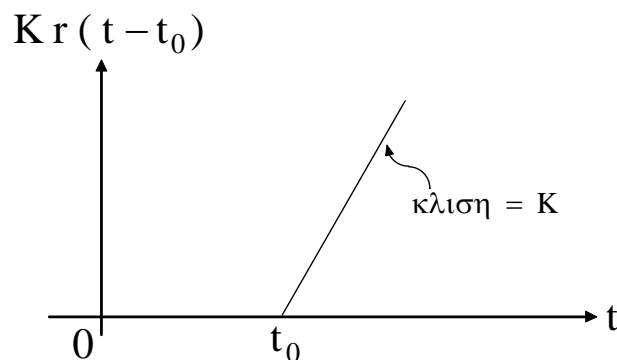
$$r(t) = \begin{cases} t & \text{για } t \geq 0 \\ 0 & \text{για } t < 0 \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της θα είναι:



Πρακτικά το σήμα αυτό εκφράζει την επιβολή μιας γραμμικά αυξανόμενης διέγερσης σε ένα σύστημα με το «κλείσιμο» ενός διακόπτη για $t = 0$

Σύμφωνα με τον προηγούμενο ορισμό η συνάρτηση: $K r(t - t_0)$ (όπου $t_0 > 0$) θα έχει γραφική παράσταση:



3. 5. 3) Μοναδιαία κρουστική συνάρτηση $\delta(t)$ ή συνάρτηση του Dirac

Ορίζεται ως εξής:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{για } t \neq 0 \\ \text{ανώμαλο σημείο} & \text{για } t = 0 \end{cases}$$

Με τον όρο «ανώμαλο σημείο» (singularity) εννοείται μια κατάσταση κατά την οποία η συνάρτηση $\delta(t)$ απειρίζεται για $t = 0$ ακριβώς.

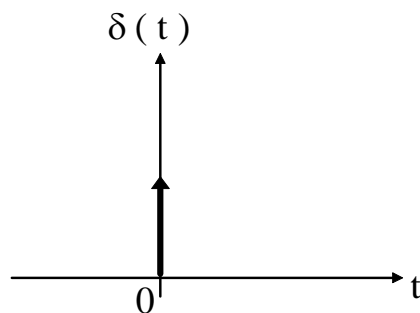
Προφανώς δεν πρόκειται για συνάρτηση με την συνηθισμένη έννοια του όρου, αλλά μπορούμε να την χειριστούμε χρησιμοποιώντας τις βασικές της ιδιότητες που αναφέρουμε εδώ:

$$1) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad \text{ή} \quad \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(t) dt = 1 \quad (\varepsilon > 0)$$

$$2) f(t) \delta(t) = f(0) \delta(t) \quad \text{όπου η } f(t) \text{ συνεχής στο } t = 0$$

$$3) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0) \quad \text{όπου η } f(t) \text{ συνεχής στο } t = 0$$

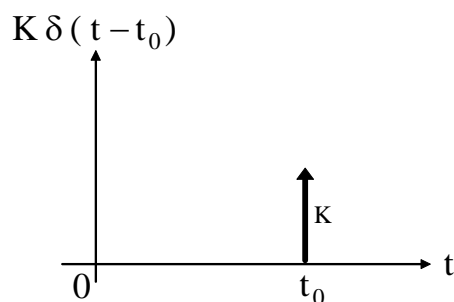
Η γραφική παράσταση της κρουστικής συνάρτησης $\delta(t)$ έχει την ακόλουθη μορφή:



Δηλαδή σχεδιάζουμε απλώς ένα βέλος για να σημειώσουμε την «ανώμαλη» κατάσταση που εμφανίζεται με την συνάρτηση αυτή

Το σήμα αυτό, που προφανώς αποτελεί εξιδανίκευση, εκφράζει την επιβολή μιας **άπειρης διέγερσης με μηδενική όμως χρονική διάρκεια**, σε ένα σύστημα. Η συνολική ενέργεια του σήματος είναι όμως **πεπερασμένη**. Αν θέλουμε να προσεγγίσουμε πρακτικά το σήμα αυτό θα οδηγηθούμε σε ένα παλμό με πολύ μικρή διάρκεια (όχι όμως μηδενική) και πολύ μεγάλο ύψος (όχι όμως άπειρο). Είναι προφανές ότι η $\delta(t)$ είναι το σήμα με την πιο απότομη μεταβολή που μπορεί να υπάρξει.

Σύμφωνα με τον προηγούμενο ορισμό η συνάρτηση: $K \delta(t - t_0)$ (όπου $t_0 > 0$) θα έχει γραφική παράσταση:



Προσοχή! Το σύμβολο K δίπλα στο βέλος δεν είναι η τιμή στον y -άξονα αλλά εκφράζει την τιμή του ολοκληρώματος

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K \delta(t - t_0) dt = K$$

Η τιμή αυτή λέγεται και «ισχύς» της κρουστικής συνάρτησης

Επίσης θα ισχύουν:

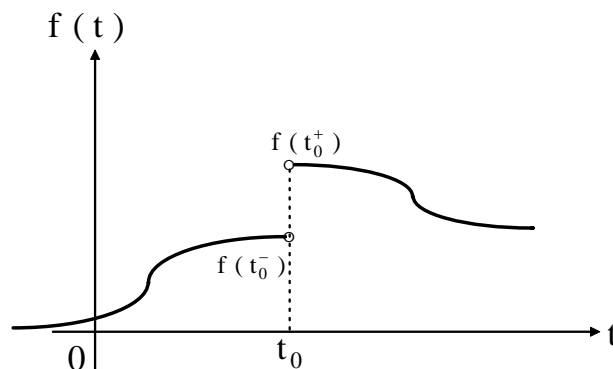
$$f(t) \delta(t - t_0) = f(t_0) \delta(t - t_0) \quad \text{όπου η } f(t) \text{ συνεχής στο } t = t_0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0) \quad \text{όπου η } f(t) \text{ συνεχής στο } t = t_0$$

3.6) Παράγωγος ασυνεχούς συναρτήσεως

Παρακάτω θα αναφέρουμε μία μαθηματική πρόταση που έχει σημαντικότερη σημασία για την μελέτη των σημάτων και συστημάτων...

Ας θεωρήσουμε μια πραγματική συνάρτηση $f(t)$ η οποία όμως είναι ασυνεχής σε ένα σημείο t_0 δηλ. ισχύει $f(t_0^+) \neq f(t_0^-)$ και έστω ότι η διαφορά αυτή είναι πεπερασμένη



η παράγωγος της συναρτήσεως αυτής στο σημείο ασυνέχειας t_0 ορίζεται ως εξής:

$$\left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = (f(t_0^+) - f(t_0^-)) \delta(t - t_0)$$

Δηλαδή η παράγωγος στο σημείο ασυνέχειας, περιέχει μια κρουστική συνάρτηση με «ισχύ» ίση με το άλμα της ασυνέχειας $(f(t_0^+) - f(t_0^-)) = \alpha$, όπου α ένας πραγματικός αριθμός

Με βάση την παραπάνω πρόταση προκύπτει αμέσως ότι:

$$\frac{d u (t)}{d t} = \delta (t)$$

διότι η βηματική συνάρτηση $u (t)$ παρουσιάζει μια ασυνέχεια με ύψος 1 στο σημείο $t = 0$.

Επίσης εύκολα φαίνεται ότι:

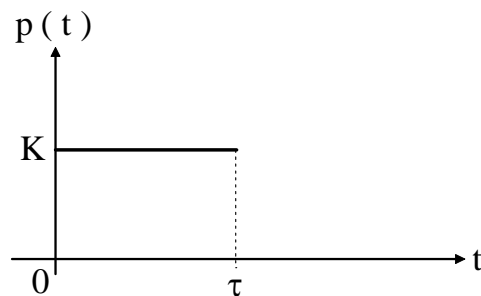
$$\frac{d r (t)}{d t} = u (t)$$

Δηλαδή παρατηρούμε ότι τα τρία στοιχειώδη ανώμαλα σήματα, $r (t)$, $u (t)$ και $\delta (t)$ συνδέονται μεταξύ τους με διαδοχικές παραγωγίσεις.

3. 7) Παραδείγματα κατασκευής συνθετωτέρων σημάτων με βάση τα στοιχειώδη ανώμαλα σήματα

Χρησιμοποιώντας τα 2 από τα 3 στοιχειώδη ανώμαλα σήματα και συγκεκριμένα την βηματική $u (t)$, και την αναρριχητική συνάρτηση $r (t)$, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα πλήθος σημάτων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως διεγέρσεις σε ηλεκτρικά δίκτυα και συστήματα. Παρακάτω αναφέρουμε παραδείγματα

α) Τετραγωνικός παλμός $p (t)$

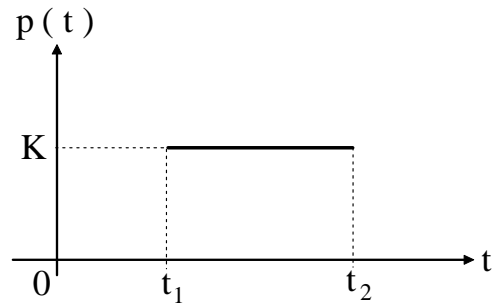


Ξεκινάμε με την βηματική $K u (t)$ (προφανώς από το σημείο $t = 0$) . Από το σημείο $t = \tau$ και μετά θέλουμε η συνάρτηση να μηδενιστεί και για το λόγο αυτό προσθέτουμε την συνάρτηση $- K u (t - \tau)$. Συνεπώς το σήμα $p (t)$ μπορεί να γραφεί:

$$p (t) = K u (t) - K u (t - \tau)$$

Παρατηρούμε ότι αν το τ τείνει στο μηδέν , και το K τείνει στο άπειρο αλλά το γινόμενο $K \tau$ διατηρεί πάντα μια σταθερή τιμή (π.χ. $K \tau = 1$) τότε ο τετραγωνικός παλμός τείνει στην κρουστική συνάρτηση $\delta (t)$.

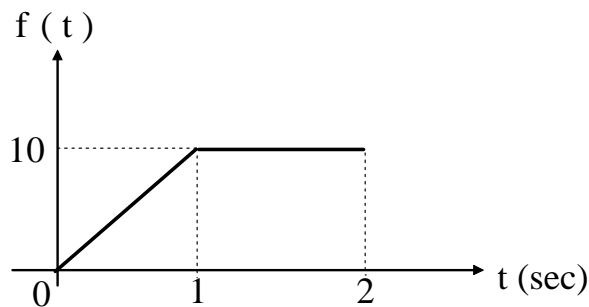
Γενικότερα μπορούμε να γράψουμε για ένα τετραγωνικό παλμό «μετατοπισμένο» (δηλ. που δεν αρχίζει από το $t = 0$)



$$p(t) = K u(t - t_1) - K u(t - t_2)$$

β) Συνδυασμός αναρριχητικής συνάρτησης και παλμού

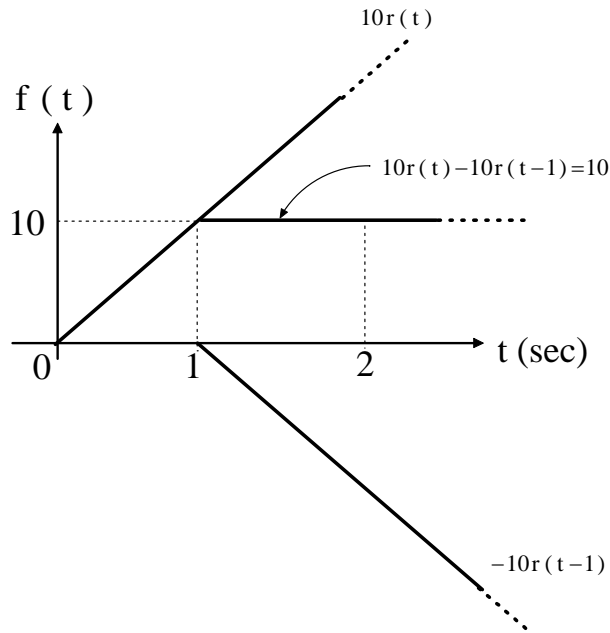
Έστω το παρακάτω σήμα:



Για να το περιγράψουμε ξεκινάμε από το $t = 0$, με μια αναρριχητική συνάρτηση με κλίση 10 διότι παρατηρούμε ότι όταν το t (άξονας x) αυξάνει κατά μία μονάδα (από 0 σε 1) το $f(t)$ (άξονας y) αυξάνει κατά 10 μονάδες, άρα η κλίση είναι $k = (y/x) = 10$.

Το σήμα $f(t)$ περιγράφεται στο διάστημα $[0, 1]$ από την συνάρτηση $10 r(t)$.

Από το σημείο $t = 1$, και μέχρι το σημείο $t = 2$, θέλουμε να σταματήσει η γραμμική αύξηση της $f(t)$, και αυτή να πάρει την σταθερή τιμή $f(t) = 10$. Για τον σκοπό αυτό, από το σημείο $t = 1$ και μετά, προσθέτουμε μια αναρριχητική συνάρτηση με κλίση αντίθετη από αυτήν που ήδη υπάρχει, δηλαδή προσθέτουμε την συνάρτηση $-10 r(t - 1)$. Το παρακάτω σχήμα βοηθά στο να γίνει κατανοητή αυτή η ενέργεια:



Εύκολα φαίνεται ότι η διαφορά $10 r (t) - 10 (t - 1)$, από $t > 1$ και έως το άπειρο, είναι πάντοτε ίση με 10. Επίσης είναι προφανές ότι για $t < 1$, η συνάρτηση $-10 (t - 1)$ δεν υφίσταται. Συνεπώς μπορούμε να πούμε ότι:

Το σήμα $f (t)$ περιγράφεται στο διάστημα $[0, 2]$ από την σχέση:

$$f (t) = 10 r (t) - 10 r (t - 1)$$

Μετά το σημείο $t = 2$, και μέχρι το άπειρο, θέλουμε η $f (t)$ να πάρει την τιμή 0. Για τον λόγο αυτό, στο σημείο $t = 2$ προσθέτουμε την συνάρτηση $-10 u (t - 2)$. Η συνάρτηση $-10 u (t - 2)$ υπάρχει (εξ' ορισμού) από $t > 2$ και έως το άπειρο, και προφανώς έχει την σταθερή τιμή -10. Συνεπώς η $f (t)$ από $t > 2$ και έως το άπειρο, μηδενίζεται.

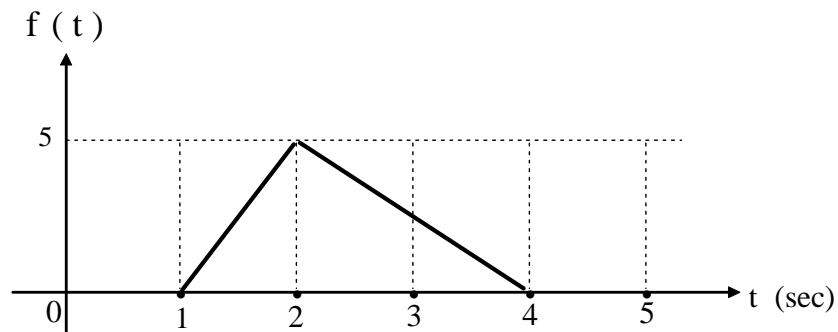
Άρα τελικά θα έχουμε:

Το σήμα $f (t)$ περιγράφεται στο διάστημα $[0, \infty]$ από την σχέση:

$$f (t) = 10 r (t) - 10 r (t - 1) - 10 u (t - 2)$$

γ) Συνδυασμός δυο αναρριχητικών συναρτήσεων

Έστω το παρακάτω σήμα:

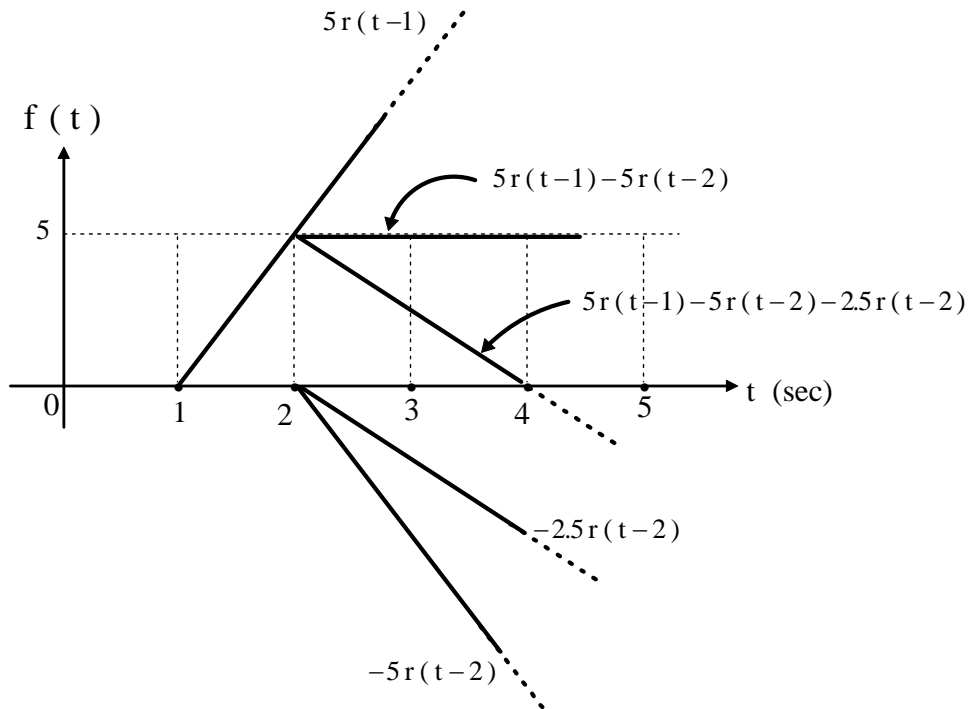


Παρατηρούμε ότι έχουμε δύο αναρριχητικές συναρτήσεις αλλά με διαφορετικές κλίσεις

Στο διάστημα $[0, 1]$ το σήμα $f(t)$ έχει μηδενική τιμή. Το σήμα ξεκινά από το σημείο $t = 1$, και μέχρι το σημείο $t = 2$ περιγράφεται με μια αναρριχητική συνάρτηση, με αρχή το σημείο $t = 1$, και με κλίση 5, διότι παρατηρούμε ότι όταν το t (άξονας x) αυξάνει κατά μία μονάδα (από 1 σε 2) το $f(t)$ (άξονας y) αυξάνει κατά 5 μονάδες, άρα η κλίση είναι $k = (y/x) = 5$.

Το σήμα $f(t)$ περιγράφεται στο διάστημα $[0, 2]$ από την συνάρτηση $5r(t-1)$.

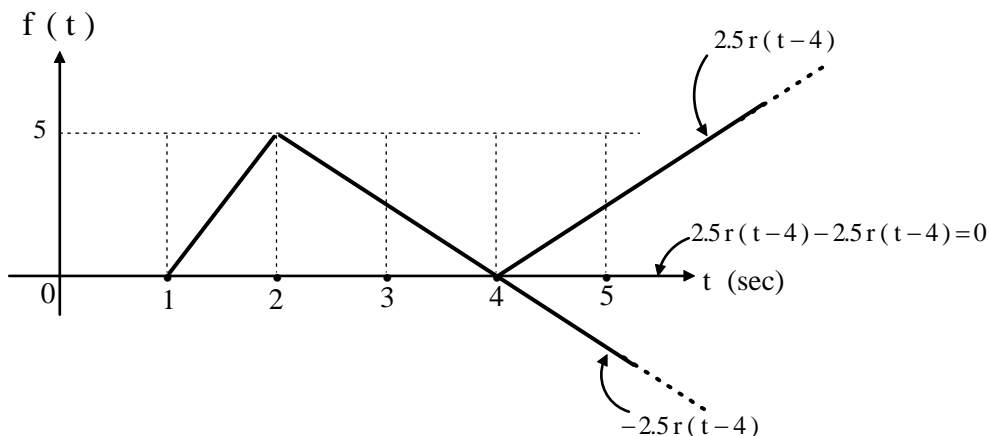
Από το σημείο $t = 2$ και μέχρι το σημείο $t = 4$, η $f(t)$ σταματά να αυξάνει γραμμικά με κλίση 5 και παίρνει αρνητική κλίση ίση με $-5/2 = -2.5$, όπως εύκολα φαίνεται διότι όταν το t (άξονας x) αυξάνει κατά δύο μονάδες (από 2 σε 4) το $f(t)$ (άξονας y) μειώνεται κατά 5 μονάδες (από +5 σε 0) άρα η κλίση είναι $k = (y/x) = -2.5$. Αυτή η αλλαγή κλίσης μπορεί να περιγραφεί με την πρόσθεση **δύο** διαφορετικών αναρριχητικών συναρτήσεων που ξεκινούν από το σημείο $t = 2$. Η πρώτη είναι η $-5r(t-2)$ η οποία, όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, με την εφαρμογή της, δίνει στην $f(t)$ την σταθερή τιμή 5. Η $f(t)$ όμως δεν είναι σταθερή για $t > 2$, αλλά, όπως προαναφέρθηκε έχει αρνητική κλίση ίση με -2.5 . Για το σκοπό αυτό, και πάλι στο σημείο $t = 2$, προστίθεται και μια δεύτερη αναρριχητική συνάρτηση ίση με $-2.5r(t-2)$. Το παρακάτω σχήμα βοηθά στην κατανόηση:



Το σήμα $f(t)$ περιγράφεται στο διάστημα $[0, 4]$ από την σχέση

$$5r(t-1) - 5r(t-2) - 2.5r(t-2).$$

Μετά το σημείο $t = 4$, και μέχρι το άπειρο, θέλουμε η $f(t)$ να πάρει την τιμή 0. Παρατηρούμε ότι για $t > 4$, και μέχρι το άπειρο, η σχέση $5r(t-1) - 5r(t-2) - 2.5r(t-2)$, όπως φαίνεται και από το προηγούμενο σχήμα, δίνει ως αποτέλεσμα μια αναρριχητική συνάρτηση με κλίση -2.5 . Άρα λοιπόν για να επιτύχουμε μηδενική τιμή του σήματος $f(t)$, για $t > 4$, πρέπει να προσθέσουμε στο σημείο $t = 4$ μια αναρριχητική συνάρτηση με κλίση $+2.5$. (βλ. και κατωτέρω σχήμα)



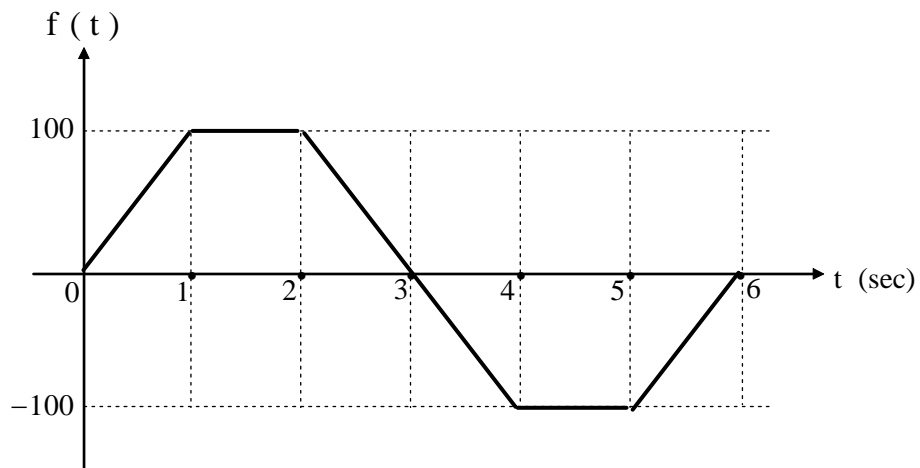
Το σήμα $f(t)$ περιγράφεται στο διάστημα $[0, \infty]$ από την σχέση:

$$f(t) = 5r(t-1) - 5r(t-2) - 2.5r(t-2) + 2.5r(t-4)$$

ή

$$f(t) = 5r(t-1) - 7.5r(t-2) + 2.5r(t-4)$$

δ) Τραπεζοειδές σήμα



Αφήνεται για μελέτη να αποδειχθεί ότι το τραπεζοειδές σήμα του ανωτέρω σχήματος περιγράφεται από τον ακόλουθο συνδυασμό αναρριχητικών συναρτήσεων:

$$f(t) = 100r(t) - 100r(t-1) - 100r(t-2) + 100r(t-4) + 100r(t-5) - 100r(t-6)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΜΕΛΕΤΗ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

4.1) Εισαγωγικά

Όπως είναι γνωστό ένα ηλεκτρικό δίκτυο μπορεί να θεωρηθεί και σαν ένα σύστημα. Ως διεγέρσεις του συστήματος (δικτύου) θεωρούνται συνήθως οι τάσεις ή τα ρεύματα των πηγών του δικτύου (πηγές τάσεως ή πηγές ρεύματος). Ως απόκριση(-εις) μπορεί να θεωρηθεί οποιαδήποτε τάση ή ρεύμα σε οποιοδήποτε κλάδο του δικτύου. Εάν το δίκτυο αποτελείται από γραμμικά και χρονικά σταθερά ηλεκτρικά στοιχεία R, L, C, θα λέγεται και αυτό γραμμικό και χρονικά σταθερό δίκτυο (ή γενικότερα σύστημα). Στην περίπτωση γραμμικού και χρονικά σταθερού δικτύου η μαθηματική σχέση που συνδέει μια οποιαδήποτε διέγερση με μια οποιαδήποτε απόκριση είναι πάντοτε μια **γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές**.

Η τάξη της διαφορικής αυτής εξίσωσης, που λέγεται και τάξη του δικτύου, καθορίζεται από τον συνολικό αριθμό δυναμικών στοιχείων (δηλ. πηνίων και πυκνωτών) που περιέχει το δίκτυο. Στον κανόνα αυτό υπάρχει μια ειδική περίπτωση εξαίρεσης η οποία δεν θα μας απασχολήσει στο κεφαλαίο αυτό.

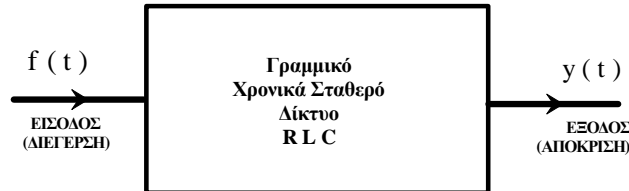
Το πρώτο και βασικό πρόβλημα που συναντάται στην θεωρία δικτύων, και με το οποίο θα ασχοληθούμε παρακάτω, είναι το πρόβλημα της **αναλύσεως δικτύου**. Στο πρόβλημα αυτό δεδομένα θεωρούνται το ίδιο το δίκτυο (τιμές στοιχείων του , συνδεσμολογία) οι αρχικές καταστάσεις των πηνίων και των πυκνωτών, και επίσης οι διεγέρσεις (πηγές) του δικτύου. Ζητούμενα είναι η απόκριση (ή οι αποκρίσεις) του δικτύου, δηλαδή η τάση (τάσεις) ή το ρεύμα (ρεύματα) σε κάποιο κλάδο (κλάδους) του δικτύου.

Η εύρεση οποιασδήποτε απόκρισης, δηλαδή η επίλυση του προβλήματος αναλύσεως δικτύου, γίνεται με την επίλυση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης που περιγράφει το δίκτυο. Η επίλυση της εξίσωσης αυτής προϋποθέτει και την γνώση των αρχικών συνθηκών που την συνοδεύουν.

Θα ασχοληθούμε παρακάτω με τον τρόπο επίλυσης του προβλήματος.

4. 2) Το πρόβλημα αναλύσεως δικτύου

Δίδεται το γραμμικό και χρονικά σταθερό, ηλεκτρικό δίκτυο:



Για απλότητα εδώ θεωρείται μία είσοδος $f(t)$ (διέγερση) και μία έξοδος $y(t)$ (απόκριση).

Τα δύο μεγέθη $f(t)$ και $y(t)$ είναι προφανώς τάσεις ή ρεύματα.

Η σχέση που συνδέει τα μεγέθη $f(t)$ και $y(t)$ θα είναι γενικά:

$$\begin{aligned} a_n D^n y(t) + a_{n-1} D^{n-1} y(t) + \dots + a_1 D y(t) + a_0 y(t) = \\ = b_m D^m f(t) + b_{m-1} D^{m-1} f(t) + \dots + b_1 D f(t) + b_0 f(t) \end{aligned}$$

δηλαδή μια γραμμική διαφορική εξίσωση (Δ.Ε.) n - τάξεως. Εφ' όσον η εξίσωση αυτή περιγράφει ένα πραγματικό (φυσικό) ηλεκτρικό δίκτυο θα ισχύει πάντοτε $n \geq m$.

Η Δ.Ε. μπορεί να γραφεί και ως:

$$A(D) y(t) = B(D) f(t)$$

$$\text{όπου: } A(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0$$

$$B(D) = b_m D^m + b_{m-1} D^{m-1} + \dots + b_1 D + b_0$$

Η Δ.Ε. συνοδεύεται και από n αρχικές συνθήκες (Α.Σ.) οι οποίες είναι οι τιμές

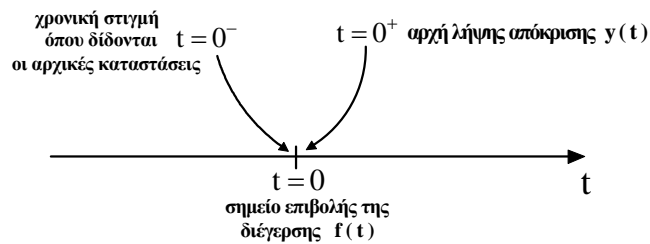
$$y(0^+), D y(0^+), \dots, D^{n-2} y(0^+), D^{n-1} y(0^+)$$

Η εύρεση αυτών των αρχικών συνθηκών αποτελεί ένα πρόβλημα το οποίο πρέπει να επιλυθεί

4.3) Παρατηρήσεις σχετικά με τις αρχικές συνθήκες

Σχετικά με τις αρχικές συνθήκες και την εύρεσή τους κάνουμε τις ακόλουθες παρατηρήσεις:

α) Θεωρείται ότι η διέγερση $f(t)$ επιβάλλεται στο δίκτυο την χρονική στιγμή $t = 0$ και η απόκριση αρχίζει να λαμβάνεται από την χρονική στιγμή $t = 0^+$ δηλαδή απείρως κοντά το 0 αλλά από θετικές τιμές. Για το λόγο αυτό και οι αρχικές συνθήκες υπολογίζονται για $t = 0^+$



Είναι δυνατόν να έχουμε $y(0^-) = y(0^+)$ οπότε ορίζεται και η τιμή $y(0)$, αυτό όμως δεν είναι απαραίτητο να ισχύει πάντοτε.

β) Οι αρχικές καταστάσεις του δικτύου, δηλαδή οι τιμές των τάσεων των πυκνωτών και των ρευμάτων των πηνίων δίδονται για $t = 0^-$, δηλαδή απείρως κοντά στο 0 αλλά από αρνητικές τιμές, επομένως πριν να εφαρμοστεί η διέγερση $f(t)$. Ένα ζήτημα που πρέπει να εξεταστεί είναι το αν ισχύουν οι σχέσεις:

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) \quad \text{για κάθε πηνίο}$$

$$V_C(0^-) = V_C(0^+) \quad \text{για κάθε πυκνωτή}$$

δηλαδή αν οι συναρτήσεις $i_L(t)$ και $V_C(t)$ είναι συνεχείς για $t = 0$.

γ) Οι αρχικές συνθήκες $y(0^+), D y(0^+), \dots, D^{n-2} y(0^+), D^{n-1} y(0^+)$ υπολογίζονται συναρτήσει των τιμών $i_L(0^+)$ και $V_C(0^+)$ καθώς και της τιμής της διέγερσης $f(0^+)$ και παραγώγων αυτής μέχρι n -τάξεως. **Υπενθυμίζεται ότι οι αρχικές συνθήκες είναι σταθερές τιμές και πρέπει να υπολογιστούν, για $t = 0^+$ συναρτήσει γνωστών σταθερών τιμών από τα δεδομένα του προβλήματος. Τέτοιες τιμές είναι ακριβώς τα ρεύματα των πηνίων, οι τάσεις των πυκνωτών, και βέβαια οι τιμές της διέγερσης (και παραγώγων της) για την χρονική στιγμή $t = 0^+$.** Είναι προφανές ότι στον υπολογισμό των αρχικών συνθηκών δεν εμπλέκεται καθόλου η «μαθηματική σχέση» της διαφορικής εξίσωσης

4.4) Μεταβατική και μόνιμη απόκριση

Συνοψίζοντας λοιπόν όλα τα προηγούμενα έχουμε:

Πρόβλημα αναλύσεως δικτύου

Δ. Ε.

$$a_n D^n y(t) + a_{n-1} D^{n-1} y(t) + \dots + a_1 D y(t) + a_0 y(t) = \\ = b_m D^m f(t) + b_{m-1} D^{m-1} f(t) + \dots + b_1 D f(t) + b_0 f(t)$$

Α. Σ. $y(0^+), D y(0^+), \dots, D^{n-2} y(0^+), D^{n-1} y(0^+)$

Η επίλυση της Δ.Ε. , όπως είναι γνωστό, θα έχει την γενική μορφή:

$$y(t) = y_{\text{ομογενής}}(t) + y_{\text{μερική}}(t)$$

ή λύση της αντιστοίχου ομογενούς Δ.Ε. , $y_{\text{ομογενής}}(t)$, θα αποτελείται από συναρτήσεις της μορφής : $K e^{\sigma t}$ ή $K t^p e^{\sigma t}$ ή $K e^{\sigma t} \sin(\omega t + \vartheta)$ η και γραμμικούς συνδυασμούς αυτών. Σε κάθε περίπτωση (για πραγματικά – φυσικά δίκτυα και συστήματα) θα ισχύει $\sigma \leq 0$

Η $y_{\text{μερική}}(t)$ θα εξαρτάται, προφανώς , από την συνάρτηση της διέγερσης $f(t)$.

Σε κάθε περίπτωση θα υπάρχει ένα τμήμα της $y(t)$ το οποίο θα τείνει στο 0 καθώς ο χρόνος t θα τείνει στο άπειρο. Το τμήμα αυτό της απόκρισης $y(t)$ αποκαλείται μεταβατική απόκριση (η μεταβατικό φαινόμενο) $y_{\text{μεταβ.}}(t)$.

Το υπόλοιπο τμήμα της $y(t)$ το οποίο δεν τείνει στο 0 , όταν το t τείνει στο άπειρο, αποκαλείται μόνιμη απόκριση $y_{\text{μον.}}(t)$. Η μόνιμη απόκριση μπορεί να έχει π.χ. τη μορφή μιας σταθεράς ή μιας ταλάντωσης χωρίς απόσβεση κ.λ.π..

Τελικά μπορούμε λοιπόν να γράψουμε:

$$y(t) = y_{\text{μεταβ.}}(t) + y_{\text{μον.}}(t)$$

Ενώ η πλήρης απόκριση $y(t)$ απαρτίζεται από αυτά τα δύο μέρη, $y_{\text{μεταβ.}}(t)$ και $y_{\text{μον.}}(t)$ υπάρχουν περιπτώσεις , στη θεωρία δικτύων και συστημάτων, που πρακτικά ενδιαφερόμαστε περισσότερο για το ένα από αυτά.

Παρακάτω θα ασχοληθούμε με αρκετά παραδείγματα επίλυσεως του προβλήματος, αρχικά όμως θα αναφέρουμε δύο βασικές προτάσεις που ισχύουν στη θεωρία κυκλωμάτων:

4.5) Συνέχεια ρεύματος πηνίου και τάσεως πυκνωτή

Για ένα πηνίο με αυτεπαγωγή L , ισχύει η ακόλουθη πρόταση:

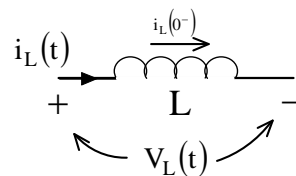
« Όταν η τάση $V_L(t)$ ενός πηνίου L , είναι φραγμένη συνάρτηση στο χρονικό διάστημα $[0, T]$ τότε το ρεύμα του πηνίου $i_L(t)$ είναι συνεχής συνάρτηση στο ίδιο χρονικό διάστημα »

Η αντίστοιχη (δυναδική) πρόταση για πυκνωτή C , διατυπώνεται ως εξής:

« Όταν το ρεύμα $i_C(t)$ ενός πυκνωτή C , είναι φραγμένη συνάρτηση στο χρονικό διάστημα $[0, T]$ τότε η τάση $V_C(t)$ του πυκνωτή είναι συνεχής συνάρτηση στο ίδιο χρονικό διάστημα»

Παρακάτω θα αποδείξουμε την πρώτη πρόταση. Η απόδειξη της δεύτερης γίνεται με ακριβώς όμοιο τρόπο

Έστω ένα γραμμικό πηνίο με αυτεπαγωγή L



όπου $i_L(0^-)$ η αρχική κατάσταση για το ρεύμα του πηνίου.

Γράφουμε τη σχέση που συνδέει την τάση με το ρεύμα στην ολοκληρωτική της μορφή:

$$i_L(t) = i_L(0^-) + \frac{1}{L} \int_0^t V_L(t') dt'$$

Εφ' όσον η τάση του $V_L(t)$ πηνίου είναι φραγμένη συνάρτηση στο διάστημα $[0, T]$ θα ισχύει η σχέση:

$$|V_L(t)| \leq M$$

για κάθε t που ανήκει στο χρονικό διάστημα $[0, T]$, και M ένας πραγματικός αριθμός.

Γράφουμε τη σχέση τάσεως – ρεύματος για μια χρονική στιγμή t_1 που ανήκει στο διάστημα $[0, T]$

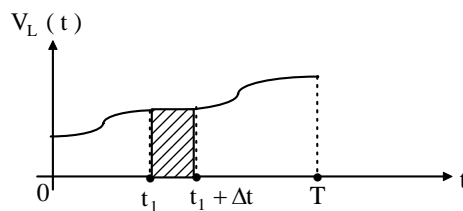
$$i_L(t_1) = i_L(0^-) + \frac{1}{L} \int_0^{t_1} V_L(t') dt'$$

Γράφουμε ξανά την σχέση ίδια για μια χρονική στιγμή $t_1 + \Delta t$ που ανήκει στο διάστημα $[0, T]$

$$i_L(t_1 + \Delta t) = i_L(0^-) + \frac{1}{L} \int_0^{t_1 + \Delta t} V_L(t') dt'$$

αφαιρώντας κατά μέλη αυτές τις δύο σχέσεις θα πάρουμε:

$$i_L(t_1 + \Delta t) - i_L(t_1) = \frac{1}{L} \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} V_L(t') dt'$$



Το ολοκλήρωμα αυτό είναι ανάλογο με το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν του σχήματος αν πάρουμε το όριο για $\Delta t \rightarrow 0$

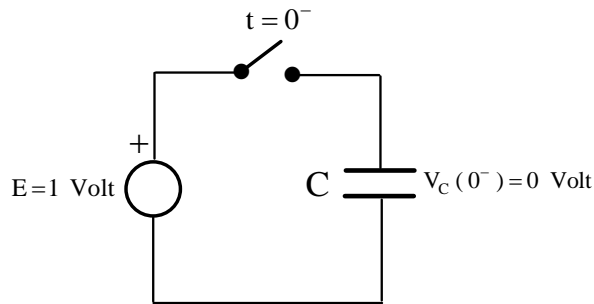
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \{ i_L(t_1 + \Delta t) - i_L(t_1) \} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{L} \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} V_L(t') dt' \right\} = 0$$

γιατί η συνάρτηση $V_L(t)$ είναι φραγμένη και ισχύει η σχέση $|V_L(t)| \leq M$

Άρα ισχύει $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \{ i_L(t_1 + \Delta t) - i_L(t_1) \} = 0$ για κάθε t_1 από το διάστημα $[0, T]$ και επομένως η συνάρτηση $i_L(t)$ είναι **συνεχής** στο διάστημα αυτό.

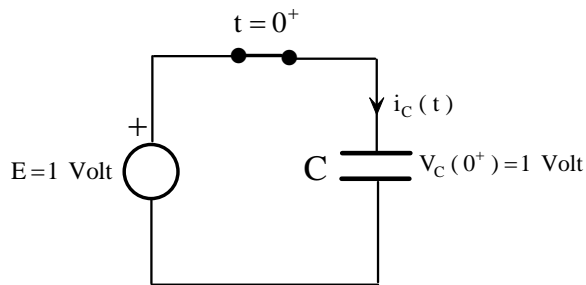
Με όμοιο ακριβώς τρόπο, όπως προαναφέραμε, αποδεικνύεται ότι η τάση ενός πυκνωτή είναι συνεχής συνάρτηση εφ' όσον το ρεύμα του πυκνωτή είναι φραγμένο.

Στο σημείο όμως αυτό ας εξετάσουμε μια ειδική περίπτωση. Θεωρούμε το ακόλουθο κύκλωμα αποτελούμενο από ένα πυκνωτή C και μια πηγή συνεχούς τάσεως με την φραγμένη τιμή $E = 1$ Volt.



Θεωρούμε ότι ο διακόπτης κλείνει **ακριβώς** την χρονική στιγμή $t = 0$, επομένως ο διακόπτης θα είναι ανοικτός για $t = 0^-$ και κλειστός για $t = 0^+$. Ο πυκνωτής θεωρείται αρχικά αφόρτιστος, άρα θα ισχύει $V_C(0^-) = 0 \text{ Volt}$.

Αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη θα έχουμε:



Παρατηρούμε ότι τώρα η τάση του πυκνωτή πρέπει οπωσδήποτε να έχει την τιμή $V_C(0^+) = 1 \text{ Volt}$. Άρα η τάση $V_C(t)$ παρουσιάζει ασυνέχεια για $t = 0$, παρ' όλο που η διέγερση του κυκλώματος, (πηγή E) είναι μια φραγμένη συνάρτηση.

Εξετάζουμε το ρεύμα $i_C(t)$ του πυκνωτή

θα ισχύει προφανώς:
$$i_C(t) = C D V_C(t)$$

όπου όμως η τάση $V_C(t)$ μπορεί να γραφεί ως $V_C(t) = u(t)$, η βηματική συνάρτηση, διότι $V_C(t) = 0 \text{ Volt}$ για $t < 0$, και $V_C(t) = 1 \text{ Volt}$ για $t > 0$.

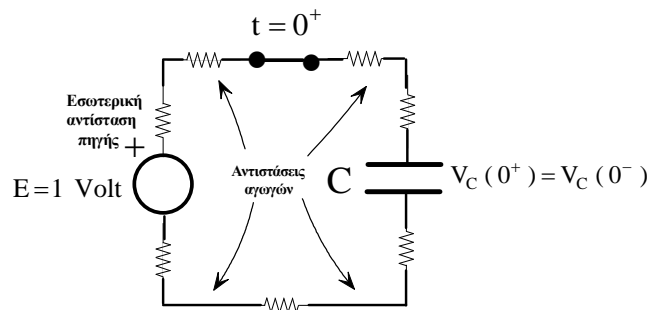
Επομένως:
$$i_C(t) = C D V_C(t) = C D u(t) = C \delta(t)$$

δηλαδή το ρεύμα του πυκνωτή έχει κρουστική μορφή, πράγμα που σημαίνει ότι για $t = 0$ το ρεύμα αυτό απειρίζεται (δεν είναι φραγμένο), και έτσι δεν ισχύει η προϋπόθεση για την συνέχεια της τάσεως $V_C(t)$ στο σημείο $t = 0$.

Βλέπουμε λοιπόν ότι είναι δυνατόν σε απλά κυκλώματα, με φραγμένες διεγέρσεις, να εμφανιστούν ασυνέχειες σε τάσεις πυκνωτών. Στα κυκλώματα αυτά πρέπει οπωσδήποτε να υπάρχουν **βρόχοι αποτελούμενοι μόνον από πυκνωτές και πηγές τάσεως**. Αντίστοιχα για την

περίπτωση του πηνίου, και για να εμφανιστούν ασυνέχειες στο ρεύμα του πηνίου, πρέπει να υπάρχουν **κόμβοι στους οποίους να συνδέονται μόνον πηνία και πηγές ρεύματος**.

Στο κύκλωμα που μελετήσαμε προηγουμένως σημειώθηκε ακαριαία (σε μηδενικό χρόνο) φόρτιση πυκνωτή. Στην πράξη αυτό δεν συμβαίνει ποτέ, διότι υπάρχουν, οι έστω και πολύ μικρές, αντιστάσεις των αγωγών που συνδέουν τον πυκνωτή με την πηγή αλλά και η ίδια η εσωτερική αντίσταση της πηγής. Το κύκλωμα στην περίπτωση αυτή δεν αποτελεί βρόχο με μόνον πυκνωτή και πηγή τάσεως αλλά παρεμβάλλονται εν σειρά και αντιστάσεις, συνεπώς δεν ισχύει η σχετική προϋπόθεση που προαναφέρθηκε, και η τάση $V_C(t)$ του πυκνωτή είναι συνεχής για $t = 0$.



4. 6) Βηματική απόκριση δικτύου

Η βηματική απόκριση ενός ηλεκτρικού δικτύου, ή ενός συστήματος γενικότερα, είναι εκείνη η απόκριση η οποία λαμβάνεται όταν ισχύουν οι ακόλουθες προϋποθέσεις:

Το δίκτυο έχει μόνον μία διέγερση και αυτή είναι η μοναδιαία βηματική συνάρτηση $u(t)$

Οι αρχικές καταστάσεις του δικτύου, δηλαδή οι τάσεις των πυκνωτών και τα ρεύματα των πηνίων την χρονική στιγμή $t = 0^-$, έχουν μηδενική τιμή. Δηλαδή ισχύει $V_C(0^-) = 0 \text{ V}$ και $i_L(0^-) = 0 \text{ A}$, για κάθε L και C

Ο υπολογισμός της βηματικής απόκρισης δεν παρουσιάζει ιδιαίτερο πρόβλημα γιατί η βηματική συνάρτηση είναι φραγμένη και επομένως εξασφαλίζεται η συνέχεια των τάσεων των πυκνωτών και των ρευμάτων των πηνίων τη χρονική στιγμή $t = 0$. Δηλαδή ισχύει $V_C(0^+) = V_C(0^-)$ και $i_L(0^+) = i_L(0^-)$ για κάθε L και C . Οι αρχικές συνθήκες της Δ.Ε. που περιγράφει το πρόβλημα υπολογίζονται κατα τον συνηθισμένο τρόπο.

Αναφέρουμε ότι η βηματική απόκριση έχει μεγάλη σημασία στην μελέτη ενός δικτύου και ουσιαστικά παριστά την απόκριση που λαμβάνεται όταν στο δίκτυο τίθεται απότομα, ή καλλίτερα ακαριαία (με ασυνέχεια) μια σταθερή διέγερση. Παρακάτω θα εξετάσουμε παραδείγματα βηματικών αποκρίσεων δικτύων.

4. 7) Κρουστική απόκριση δικτύου

Η κρουστική απόκριση ενός ηλεκτρικού δικτύου, ή ενός συστήματος γενικότερα, είναι εκείνη η απόκριση η οποία λαμβάνεται όταν ισχύουν οι ακόλουθες προϋποθέσεις:

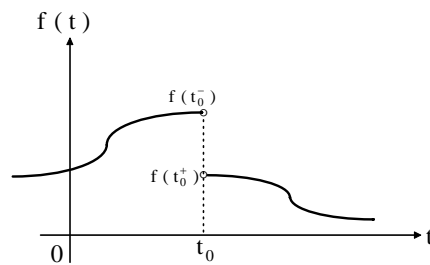
Το δίκτυο έχει μόνον μία διέγερση και αυτή είναι η μοναδιαία κρουστική συνάρτηση $\delta(t)$

Οι αρχικές καταστάσεις του δικτύου, δηλαδή οι τάσεις των πυκνωτών και τα ρεύματα των πηνίων την χρονική στιγμή $t = 0^-$, έχουν μηδενική τιμή. Δηλαδή ισχύει $V_C(0^-) = 0 \text{ V}$ και $i_L(0^-) = 0 \text{ A}$, για κάθε L και C

Ο υπολογισμός της κρουστικής απόκρισης ενός δικτύου απαιτεί ιδιαίτερη προσοχή και τούτο γιατί η κρουστική συνάρτηση δεν είναι φραγμένη και έτσι δεν εξασφαλίζεται η συνέχεια των τάσεων των πυκνωτών και των ρευμάτων των πηνίων τη χρονική στιγμή $t = 0$. Η εύρεση των αρχικών συνθηκών της Δ.Ε. (για $t = 0^+$ προφανώς), δεν μπορεί τώρα να γίνει με τον συνηθισμένο τρόπο. Το πρόβλημα αντιμετωπίζεται κάνοντας χρήση της ακόλουθης πρότασης η οποία έχει προαναφερθεί στο **Κεφ. 3** και επαναλαμβάνεται εδώ:

Παράγωγος ασυνεχούς συναρτήσεως

Ας θεωρήσουμε μια πραγματική συνάρτηση $f(t)$ η οποία όμως είναι ασυνεχής σε ένα σημείο t_0



η παράγωγος της συναρτήσεως αυτής στο σημείο ασυνέχειας t_0 ορίζεται ως εξής:

$$\left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = (f(t_0^+) - f(t_0^-)) \delta(t - t_0)$$

Δηλαδή η παράγωγος στο σημείο ασυνέχειας, περιέχει μια κρουστική συνάρτηση με «ισχύ» ίση με το άλμα της ασυνέχειας $(f(t_0^+) - f(t_0^-)) = \alpha$, όπου α ένας πραγματικός αριθμός

Παρακάτω θα δούμε πως χρησιμοποιείται η πρόταση αυτή στον υπολογισμό των Α.Σ. στην περίπτωση κρουστικής διέγερσης

4. 7. 1) Τρόπος υπολογισμού της κρουστικής απόκρισης

Ας θεωρήσουμε την πιο γενική περίπτωση Δ.Ε n- τάξεως

$$\begin{aligned} a_n D^n y(t) + a_{n-1} D^{n-1} y(t) + \dots + a_1 D y(t) + a_0 y(t) = \\ = b_m D^m \delta(t) + b_{m-1} D^{m-1} \delta(t) + \dots + b_1 D \delta(t) + b_0 \delta(t) \end{aligned}$$

με Α.Σ. $y(0^+), D y(0^+), \dots, D^{n-2} y(0^+), D^{n-1} y(0^+)$

εφ' όσον η διέγερση $f(t)$ είναι η κρουστική συνάρτηση $\delta(t)$ στο β' μέλος της Δ.Ε. θα υπάρξει η συνάρτηση $\delta(t)$ αλλά και παράγωγοί της μέχρι m - τάξεως όπου $m \leq n$. Παρατηρούμε όμως ότι για $t > 0$ (ή διαφορετικά για $t \geq 0^+$) όλες οι συναρτήσεις του β' μέλους ($\delta(t)$ και παράγωγοί αυτής) έχουν, εξ' ορισμού μηδενικές τιμές.

Συνεπώς για $t > 0$ η Δ.Ε γράφεται:

$$a_n D^n y(t) + a_{n-1} D^{n-1} y(t) + \dots + a_1 D y(t) + a_0 y(t) = 0$$

Προκύπτει λοιπόν το συμπέρασμα:

Η εύρεση της κρουστικής απόκρισης ένος δικτύου ανάγεται πάντοτε στην επίλυση μιας ομογενούς Δ.Ε.

Εκείνο λοιπόν, το οποίο χρειάζεται να γίνει είναι η εύρεση των Α.Σ. για $t = 0^+$. Παρατηρούμε εδώ, ότι είναι αδύνατη η περίπτωση να έχουν όλες οι Α.Σ. μηδενικές τιμές, για $t = 0^+$, διότι τότε δεν θα υπάρχει καμμία απόκριση σε κρουστική διέγερση, πράγμα άτοπο.

Επίσης για $t = 0^-$ θα ισχύει:

$$y(0^-) = 0, D y(0^-) = 0, \dots, D^{n-2} y(0^-) = 0, D^{n-1} y(0^-) = 0$$

και τούτο διότι για $t = 0^-$ η διέγερση $\delta(t)$ και οι αρχικές καταστάσεις του δικτύου έχουν εξ' ορισμού, μηδενικές τιμές.

Συνοψίζοντας όλα τα προηγούμενα καταλήγουμε στο ακόλουθο σημαντικότερο συμπέρασμα:

Οι συναρτήσεις $y(t), D y(t), \dots, D^{n-2} y(t), D^{n-1} y(t)$

έχουν, για $t = 0^-$, όλες μηδενική τιμή, ενώ για $t = 0^+$ κάποιες απο αυτές, (ενδεχομένως και όλες) έχουν τιμή διάφορη του μηδενός. Επομένως κάποιες από τις συναρτήσεις αυτές (ενδεχομένως και όλες) εμφανίζουν **ασυνέχεια για $t = 0$** . Εφ' όσον λοιπόν, στο αριστερό μέλος της Δ.Ε., έχουμε ασυνεχείς συναρτήσεις (για $t = 0$ πάντοτε) οι παράγωγοί αυτών θα περιέχουν κρουστικές συναρτήσεις. Αλλά κρουστικές συναρτήσεις θα υπάρχουν προφανώς και στο δεξιό μέλος της Δ.Ε. (επαναλαμβάνουμε για μία ακόμη φορά ότι αναφερόμαστε στη χρονική στιγμή $t = 0$). Με κατάλληλη «αναγωγή» των κρουστικών όρων που θα υπάρχουν στα δύο μέλη της Δ.Ε. και χρήση της μαθηματικής πρότασης που προαναφέρθηκε, είναι δυνατόν να υπολογιστούν οι άγνωστες τιμές $y(0^+), D y(0^+), \dots, D^{n-2} y(0^+), D^{n-1} y(0^+)$

Η μεθοδολογία αυτή θα γίνει αμεσα αντιληπτή από τα δύο γενικά παραδείγματα που ακολουθούν για Δ.Ε. 1^{ης} και 2^{ης} τάξεως.

4. 7. 2) Κρουστική απόκριση συστήματος 1^{ης} τάξεως

Ένα ηλεκτρικό δίκτυο ή σύστημα 1^{ης} τάξεως θα περιγράφεται, στην γενικότερη μορφή του από την Δ.Ε.

$$(a_1 D + a_0) y(t) = (b_1 D + b_0) f(t)$$

με Α.Σ.

$$y(0^+) = y_0$$

Στην περίπτωση κρουστικής διέγερσης $f(t) = \delta(t)$ θα έχουμε:

$$(a_1 D + a_0) y(t) = b_1 D \delta(t) + b_0 \delta(t)$$

και η Α.Σ. για $t = 0^-$ $y(0^-) = 0$ (εξ' ορισμού)

Προφανώς για $t > 0$ θα έχουμε:

$$(a_1 D + a_0) y(t) = 0$$

και η Α.Σ. για $t = 0^+$ $y(0^+) = \text{άγνωστη}$ (πρέπει να προσδιοριστεί)

Εξετάζουμε την κατάσταση για $t = 0$ **ακριβώς**. Στα δύο μέλη της Δ.Ε. θα έχουμε τις ακόλουθες συναρτήσεις (εδώ προς στιγμή αγνοούμε τους συντελεστές a_1, a_0 και b_1, b_0)

α' μέλος	β' μέλος
$D y(t)$	$D \delta(t)$
$y(t)$	$\delta(t)$

Προσπαθούμε να αντιστοιχήσουμε τις συναρτήσεις που υπάρχουν στα δύο μέλη της Δ.Ε. Για το σκοπό αυτό, στο α' μέλος, εξετάζουμε πρώτα την συνάρτηση με την χαμηλότερης τάξης παράγωγο (παράγωγος μηδενικής τάξης) δηλ. την $y(t)$. Παρατηρούμε ότι στο β' μέλος υπάρχει η συνάρτηση $\delta(t)$ και η 1^η παράγωγός της $D \delta(t)$.

Αν υποθέσουμε ότι για $t = 0$ **ακριβώς** ισχύει

$$y(t) = k_1 \delta(t)$$

όπου k_1 μία σταθερά, τότε οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η συνάρτηση $D y(t)$ που επίσης υπάρχει στο α' μέλος θα γράφεται:

$$D y(t) = k_1 D \delta(t) + k_2 \delta(t)$$

όπου k_2 μία σταθερά. Ο πρώτος όρος είναι άμεση συνέπεια της παραγωγίσιμης, ενώ ο δεύτερος όρος $k_2 \delta(t)$ πρέπει οπωσδήποτε να τεθεί για λόγους πληρότητας. **Δηλαδή δεν μπορεί να αποκλειστεί η περίπτωση η συνάρτηση $D y(t)$ να περιέχει εκτός της $k_1 D \delta(t)$ και επιπλέον τον κρουστικό όρο $k_2 \delta(t)$.**

Παρατήρηση: Θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι για $t=0$ ακριβώς ισχύει

$$y(t) = k_1 D \delta(t) + k_2 \delta(t)$$

τότε η συνάρτηση $D y(t)$ θα γράφεται:

$$D y(t) = k_1 D^2 \delta(t) + k_2 D \delta(t) + k_3 \delta(t)$$

Αυτό όμως οδηγεί σε **άτοπο** διότι **όρος $D^2 \delta(t)$ δεν υπάρχει στο β' μέλος** και επομένως η υπόθεση $y(t) = k_1 D \delta(t) + k_2 \delta(t)$ δεν ευσταθεί.

Συνεπώς για **$t=0$ ακριβώς** θα έχουμε:

$$y(t) = k_1 \delta(t)$$

$$D y(t) = k_1 D \delta(t) + k_2 \delta(t)$$

αντικαθιστούμε τις εκφράσεις αυτές στη Δ.Ε.

$$(a_1 D + a_0) y(t) = b_1 D \delta(t) + b_0 \delta(t)$$

άρα:

$$a_1 k_1 D \delta(t) + a_1 k_2 \delta(t) + a_0 k_1 \delta(t) = b_1 D \delta(t) + b_0 \delta(t)$$

κάνοντας αναγωγή των όρων θα πάρουμε

$$a_1 k_1 = b_1$$

$$\text{και } a_1 k_2 + a_0 k_1 = b_0$$

από τις δύο αυτές σχέσεις προκύπτουν οι τιμές των σταθερών k_1 και k_2

$$k_1 = \frac{b_1}{a_1} \qquad k_2 = \frac{b_0}{a_1} - \frac{a_0 b_1}{a_1^2}$$

άρα:

$$y(t) = \frac{b_1}{a_1} \delta(t)$$

και

$$D y(t) = \frac{b_1}{a_1} D \delta(t) + \left[\frac{b_0}{a_1} - \frac{a_0 b_1}{a_1^2} \right] \delta(t)$$

Παρατηρούμε ότι για $t = 0$ ακριβώς ισχύουν τα εξής

1) Η συνάρτηση $y(t)$ περιέχει $t = 0$ τον κρουστικό όρο $\frac{b_1}{a_1} \delta(t)$

2) Η συνάρτηση $D y(t)$ περιέχει βεβαίως τον όρο $\frac{b_1}{a_1} D \delta(t)$, αλλά επίσης και τον

κρουστικό όρο $\left[\frac{b_0}{a_1} - \frac{a_0 b_1}{a_1^2} \right] \delta(t)$.

Αν τώρα, κάνουμε χρήση της πρότασης που προαναφέρθηκε θα έχουμε το ακόλουθο σκεπτικό
- Η συνάρτηση $D y(t)$ περιέχει κρουστικό όρο άρα η $y(t)$ θα είναι ασυνεχής συνάρτηση στο σημείο $t = 0$. Η διαφορά τιμών της $y(t)$ μεταξύ των σημείων 0^+ και 0^- θα είναι ακριβώς ίση με τον συντελεστή του κρουστικού όρου. Δηλαδή θα ισχύει:

$$y(0^+) - y(0^-) = \left[\frac{b_0}{a_1} - \frac{a_0 b_1}{a_1^2} \right]$$

και επειδή εξ' ορισμού $y(0^-) = 0$

προκύπτει αμέσως η ζητούμενη αρχική συνθήκη:

$$y(0^+) = \left[\frac{b_0}{a_1} - \frac{a_0 b_1}{a_1^2} \right]$$

Επανερχόμαστε τώρα στο πρόβλημα υπολογισμού της κρουστικής απόκρισης

Δ.Ε. $(a_1 D + a_0) y(t) = b_1 D \delta(t) + b_0 \delta(t)$

Δ.Ε. (για $t > 0$) $(a_1 D + a_0) y(t) = 0$

και η Α.Σ. για $t = 0^+$ $y(0^+) = \left[\frac{b_0}{a_1} - \frac{a_0 b_1}{a_1^2} \right]$

η λύση εύκολα υπολογίζεται ότι θα είναι:

$$y(t) = \left[\frac{b_0}{a_1} - \frac{a_0 b_1}{a_1^2} \right] e^{-\frac{a_0}{a_1} t} + \frac{b_1}{a_1} \delta(t)$$

(όπου εδώ, στην έκφραση της $y(t)$ συμπεριλάβαμε και τον κρουστικό όρο)

Η προηγούμενη περίπτωση που εξετάσαμε ήταν η πλέον πολύπλοκη για σύστημα 1^{ης} τάξεως.

Μια απλούστερη περίπτωση είναι η ακόλουθη:

$$\Delta.E. \quad (a_1 D + a_0) y(t) = b_0 \delta(t)$$

στην περίπτωση αυτή στο β' μέλος δεν υπάρχει ο όρος $b_1 D \delta(t)$.

Μπορούμε να βρούμε αμέσως την λύση, αν χρησιμοποιήσουμε το προηγούμενο αποτέλεσμα θέτοντας όμως $b_1 = 0$.

Θα πάρουμε:

$$\Delta.E. \text{ (για } t > 0) \quad (a_1 D + a_0) y(t) = 0$$

$$\text{και η Α.Σ. για } t = 0^+ \quad y(0^+) = \frac{b_0}{a_1}$$

$$\text{άρα:} \quad y(t) = \frac{b_0}{a_1} e^{-\frac{a_0}{a_1} t}$$

4. 7. 3) Κρουστική απόκριση συστήματος 2^{ας} τάξεως

Εξετάζουμε εδώ ένα δίκτυο, ή σύστημα, 2^{ας} τάξεως που περιγράφεται, από την Δ.Ε.:

$$(a_2 D^2 + a_1 D + a_0) y(t) = (b_1 D + b_0) f(t)$$

με Α.Σ.

$$y(0^+) = y_0$$

$$D y(0^+) = y_1$$

Στην περίπτωση κρουστικής διέγερσης $f(t) = \delta(t)$ θα έχουμε:

$$(a_2 D^2 + a_1 D + a_0) y(t) = b_1 D \delta(t) + b_0 \delta(t)$$

και οι Α.Σ. για $t = 0^-$ $y(0^-) = 0$

$$D y(0^-) = 0$$

Προφανώς για $t > 0$ θα έχουμε:

$$(a_2 D^2 + a_1 D + a_0) y(t) = 0$$

και οι Α.Σ. για $t = 0^+$ $y(0^+) = \text{άγνωστη (πρέπει να προσδιοριστεί)}$

$$D y(0^+) = \text{άγνωστη (πρέπει να προσδιοριστεί)}$$

Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία όπως και πριν. Για $t = 0$ **ακριβώς** στα δύο μέλη της Δ.Ε. θα έχουμε τις ακόλουθες συναρτήσεις

α' μέλος	β' μέλος
$D^2 y(t)$	$D \delta(t)$
$D y(t)$	$\delta(t)$
$y(t)$	

Η υπόθεση ότι για $t = 0$ **ακριβώς** ισχύει

$$y(t) = k_1 \delta(t)$$

οδηγεί στο συμπέρασμα ότι στο α' μέλος θα υπάρχει ο όρος $D^2 \delta(t)$. Ο όρος αυτός όμως δεν υπάρχει στο β' μέλος για να γίνει αντιστοίχιση άρα η υπόθεση $y(t) = k_1 \delta(t)$ οδηγεί σε άτοπο.

Εξετάζουμε την περίπτωση να ισχύει:

$$D y(t) = k_1 \delta(t)$$

τότε

$$D^2 y(t) = k_1 D \delta(t) + k_2 \delta(t)$$

Οι σχέσεις αυτές δεν οδηγούν σε άτοπο διότι στο β' μέλος υπάρχουν οι συναρτήσεις $\delta(t)$ και $D \delta(t)$. Αντικαθιστώντας αυτές τις εκφράσεις στην Δ.Ε. θα έχουμε:

$$a_2(k_1 D \delta(t) + k_2 \delta(t)) + a_1 k_1 \delta(t) = b_1 D \delta(t) + b_0 \delta(t)$$

Με αναγωγή ομοίων όρων θα πάρουμε:

$$a_2 k_1 D \delta(t) = b_1 D \delta(t)$$

και

$$a_2 k_2 \delta(t) + a_1 k_1 \delta(t) = b_0 \delta(t)$$

από όπου υπολογίζονται οι τιμές των σταθερών k_1 και k_2

$$k_1 = \frac{b_1}{a_2}$$

$$k_2 = \frac{b_0}{a_2} - \frac{a_1 b_1}{a_2^2}$$

άρα λοιπόν για $t = 0$ ακριβώς οι συναρτήσεις $D y(t)$ και $D^2 y(t)$ γράφονται:

$D y(t) = \frac{b_1}{a_2} \delta(t)$ επομένως η $y(t)$ θα είναι ασυνεχής για $t = 0$ και θα ισχύει:

$$y(0^+) - y(0^-) = \frac{b_1}{a_2} \quad \text{άρα} \quad y(0^+) = \frac{b_1}{a_2}$$

επίσης $D^2 y(t) = \frac{b_1}{a_2} D \delta(t) + \left[\frac{b_0}{a_2} - \frac{a_1 b_1}{a_2^2} \right] \delta(t)$

επομένως η $D y(t)$ θα είναι ασυνεχής για $t = 0$ και θα ισχύει:

$$D y(0^+) - D y(0^-) = \left[\frac{b_0}{a_2} - \frac{a_1 b_1}{a_2^2} \right] \quad \text{άρα} \quad y(0^+) = \left[\frac{b_0}{a_2} - \frac{a_1 b_1}{a_2^2} \right]$$

Συνοψίζοντας λοιπόν, για $t > 0$ θα έχουμε:

$$\Delta.E. \quad (a_2 D^2 + a_1 D + a_0) y(t) = b_1 D \delta(t) + b_0 \delta(t)$$

$$\Delta.E. \quad \text{για } t > 0 \quad (a_2 D^2 + a_1 D + a_0) y(t) = 0$$

$$A.Σ. \quad \text{για } t = 0^+ \quad y(0^+) = \frac{b_1}{a_2}$$

$$D y(0^+) = \left[\frac{b_0}{a_2} - \frac{a_1 b_1}{a_2^2} \right]$$

και το πρόβλημα επιλύεται κατα τα γνωστά.

Αν είχαμε να επιλύσουμε το ακόλουθο (απλούστερο) πρόβλημα

$$\Delta.E. \quad (a_2 D^2 + a_1 D + a_0) y(t) = b_0 \delta(t)$$

τότε απλώς θα χρησιμοποιούσαμε την προηγούμενη λύση θέτοντας $b_1 = 0$. Άρα:

$$\Delta.E. \quad \text{για } t > 0 \quad (a_2 D^2 + a_1 D + a_0) y(t) = 0$$

$$A.Σ. \quad \text{για } t = 0^+ \quad y(0^+) = 0 \quad (\text{δηλ. η } y(t) \text{ συνεχής για } t = 0)$$

$$D y(0^+) = \frac{b_0}{a_2}$$

4.7.4) Γενική μεθοδολογία υπολογισμού κρουστικής απόκρισης

Η γενική μεθοδολογία υπολογισμού κρουστικής απόκρισης σε οποιασδήποτε τάξης σύστημα μπορεί να συνοψιστεί στα ακόλουθα βήματα:

(α) Σημειώνουμε την μεγαλύτερης τάξης παράγωγο της $\delta(t)$ που υπάρχει στο β' μέλος

(β) Υποθέτουμε ότι ισχύει $y(t) = k_1 \delta(t)$ (δηλ. η $y(t)$ περιέχει κρουστικό όρο). Εξετάζουμε αν η $y(t)$ παραγωγιζόμενη όσες φορές αναφέρεται στο α' μέλος φθάνει, σε τάξη, την μεγαλύτερη παράγωγο της $\delta(t)$ που υπάρχει στο β' μέλος. Αν αυτό ισχύει, τότε εκφράζουμε και τις παραγώγους της $y(t)$, που υπάρχουν στο α' μέλος, με τους αντίστοιχους κρουστικούς όρους.

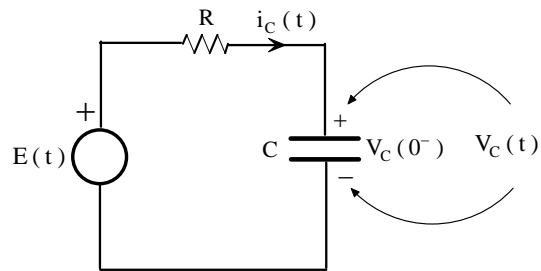
(γ) Αν η υπόθεση $y(t) = k_1 \delta(t)$ οδηγεί σε μια κατάσταση κατά την οποία υπάρχει μεγαλύτερης τάξης παράγωγος της $\delta(t)$ στο α' μέλος από ότι στο β' μέλος, πράγμα άτοπο, τότε προφανώς η $y(t)$ δεν περιέχει κρουστικό όρο. Υποθέτουμε τότε ότι η πρώτη παράγωγός της, $Dy(t)$, περιέχει κρουστικό όρο δηλ. $Dy(t) = k_1 \delta(t)$ και εφαρμόζουμε την ίδια διαδικασία όπως στο βήμα (β). Αν και αυτό οδηγήσει σε άτοπο τότε δοκιμάζουμε την δεύτερη παράγωγο κ.λ.π.

(δ) Τελικά θα μας είναι γνωστό ποιές από τις συναρτήσεις $y(t)$, $Dy(t)$, $D^2y(t)$, ... περιέχουν κρουστικούς όρους για $t = 0$. Η πληροφορία αυτή μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τις αρχικές συνθήκες $y(0^+)$, $Dy(0^+)$, $D^2y(0^+)$ κ.λ.π., εφαρμόζοντας την σχετική μαθηματική πρόταση «Όταν μια συνάρτηση είναι ασυνεχής η παράγωγός της είναι κρουστική»

4.8) Παραδείγματα υπολογισμού αποκρίσεων δικτύων

Παράδειγμα 1) (κύκλωμα R-C)

Δίδεται το ακόλουθο δίκτυο



Θεωρούνται γνωστά: α) οι τιμές των R και C

β) η τάση της πηγής $E(t) = E_0 u(t)$ Volts

(όπου $u(t)$ η βηματική συνάρτηση)

γ) η αρχική κατάσταση για την τάση του πυκνωτή $V_C(0^-) = V_0$ Volts

Ως διέγερση του δικτύου θεωρείται η τάση της πηγής $E(t)$ και ως απόκριση τάση $V_C(t)$

Ζητείται να υπολογιστεί η απόκριση $V_C(t)$ για $0 \leq t < \infty$

Λύση

Αρχικά θα βρούμε την διαφορική εξίσωση (Δ.Ε.) που συνδέει την διέγερση με την απόκριση.

Μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του διαιρέτη τάσεως.

$$V_C(t) = E(t) \frac{\frac{1}{CD}}{R + \frac{1}{CD}} = \frac{E(t) \frac{1}{CD}}{\frac{RCD + 1}{CD}} \Rightarrow V_C(t) = \frac{E(t)}{RCD + 1}$$

Άρα η Δ.Ε. θα είναι:

$$(RCD + 1) V_C(t) = E(t)$$

και θα συνοδεύεται από την αρχική συνθήκη (Α.Σ.) $V_C(0^+)$

Παρατηρούμε ότι η Δ.Ε. είναι 1^{ης} τάξεως διότι το δίκτυο περιέχει ένα δυναμικό στοιχείο

Για να υπολογίσουμε την Α.Σ. σκεπτόμαστε ως εξής:

Η διέγερση του δικτύου $E(t) = E_0 u(t)$ είναι φραγμένη συνάρτηση και επίσης στο δίκτυο δεν υπάρχει βρόχος αποτελούμενος μόνον από πυκνωτή και πηγή τάσεως. Επομένως η τάση του πυκνωτή $V_C(t)$ θα είναι συνεχής συνάρτηση για κάθε t .

Άρα θα ισχύει $V_C(0^+) = V_C(0^-) = V_0$

Συνοψίζουμε τα προηγούμενα

$$\Delta.E.: \quad (RCD + 1) V_C(t) = E_0 u(t)$$

$$A.\Sigma.: \quad V_C(0^+) = V_0$$

Υπολογίζουμε την γενική λύση της αντιστοίχου ομογενούς Δ.Ε.

η χαρακτηριστική εξίσωση θα είναι: $sRC + 1 = 0$ με ρίζα $s_1 = -\frac{1}{RC}$

άρα $V_{C\text{ομογ}}(t) = K e^{s_1 t} = K e^{-\frac{t}{RC}}$

όπου το K είναι προσδιοριστέα σταθερά

Αναζητούμε μια μερική λύση $V_{C\text{μερ}}(t)$ της Δ.Ε.

Εφ' όσον στο β' μέλος έχουμε την συνάρτηση $E_0 u(t) = E_0 = \text{σταθ.}$ για $t > 0$

η μερική λύση θα είναι επίσης της μορφής $V_{C\text{μερ}}(t) = M = \text{σταθ.}$

αντικαθιστούμε την έκφραση για την $V_{C\text{μερ}}(t)$ στην Δ.Ε.

$$RCD V_{C\text{μερ}}(t) + V_{C\text{μερ}}(t) = E_0 \quad \text{ή} \quad RCD M + M = E_0 \Rightarrow M = E_0$$

άρα $V_{C\text{μερ}}(t) = E_0$

Η γενική λύση της Δ.Ε. θα είναι:

$$V_C(t) = V_{C\text{ομογ}}(t) + V_{C\text{μερ}}(t) = K e^{-\frac{t}{RC}} + E_0$$

για τον υπολογισμό της σταθεράς K εφαρμόζουμε την Α.Σ. $V_C(0^+) = V_0$

$$V_C(0^+) = V_0 = K e^0 + E_0 \Rightarrow K = V_0 - E_0$$

άρα τελικά:

$$\boxed{V_C(t) = (V_0 - E_0) e^{-\frac{t}{RC}} + E_0}$$

Το τμήμα της απόκρισης $(V_0 - E_0) e^{-\frac{t}{RC}}$ τείνει στο **0** καθώς ο χρόνος t τείνει στο **άπειρο**. Αυτό ακριβώς αποκαλούμε και **μεταβατική απόκριση**.

Άρα: $V_{C\text{μεταβ}}(t) = (V_0 - E_0) e^{-\frac{t}{RC}}$

Το υπόλοιπο τμήμα της απόκρισης είναι η **μόνιμη απόκριση**, η διαφορετικά η **τελική τιμή** της τάσεως $V_C(t)$

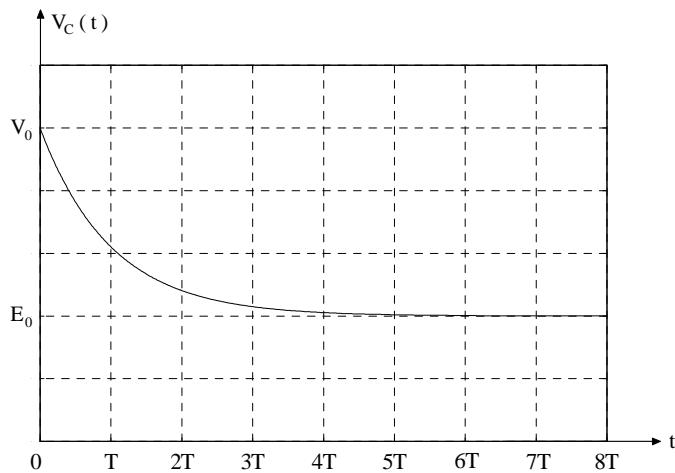
Άρα:
$$V_{C\text{μον.}}(t) = E_0$$

Το φυσικό μέγεθος $T = RC$, με διαστάσεις χρόνου, αποκαλείται **σταθερά χρόνου του κυκλώματος**

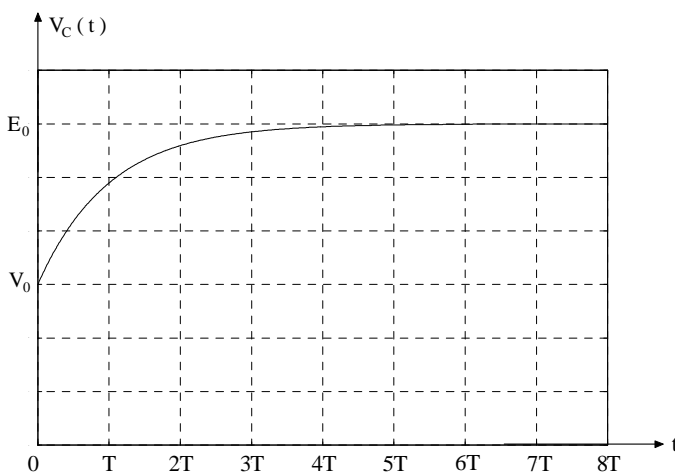
Παρακάτω δίδονται γραφικές παραστάσεις της τάσεως $V_C(t)$ για διάφορες περιπτώσεις.

Ο άξονας του χρόνου είναι βαθμονομημένος σε πολλαπλάσια της σταθεράς χρόνου T .

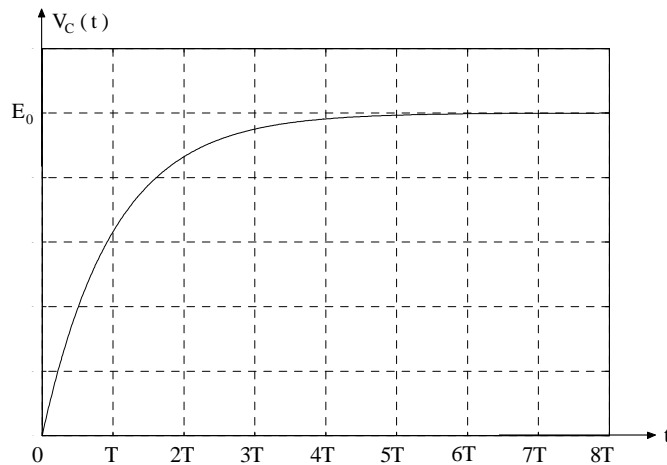
Οι τάσεις V_0 και E_0 θεωρούνται σε όλες τις περιπτώσεις ότι έχουν θετικές τιμές



Εδώ έχουμε $V_0 > E_0$. Παρατηρούμε ότι η μεταβατική απόκριση διαρκεί πρακτικά για χρονικό διάστημα ίσο με $5T$.



Εδώ έχουμε $V_0 < E_0$. Η μεταβατική απόκριση διαρκεί πρακτικά για χρονικό διάστημα ίσο με $5T$.



Στην περίπτωση αυτή έχουμε $V_0 = 0$ δηλ. αρχικά αφόρτιστο πυκνωτή. Ο χρόνος φόρτισης είναι, πρακτικά, ίσος με $5T$.

Παρατηρήσεις

α) Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το ρεύμα $i_C(t)$ του κυκλώματος μπορούμε να κάνουμε χρήση της σχέσης:

$$i_C(t) = C \frac{dV_C(t)}{dt}$$

Όπου:

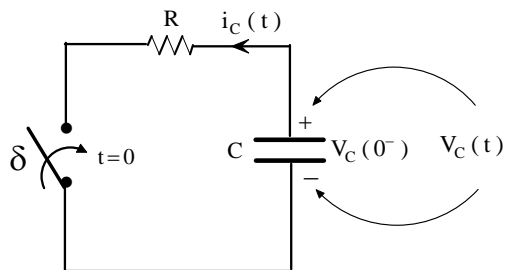
$$V_C(t) = (V_0 - E_0) e^{-\frac{t}{RC}} + E_0$$

άρα:

$$i_C(t) = -\frac{V_0 - E_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{E_0 - V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

παρατηρούμε ότι το ρεύμα πάντοτε τείνει στο 0 καθώς ο χρόνος τείνει στο άπειρο.

β) Επίσης αν θέλουμε να μελετήσουμε την περίπτωση **εκφόρτισης** πυκνωτή, δηλαδή στο παρακάτω κύκλωμα τον υπολογισμό της τάσεως $V_C(t)$ αφού κλείσει ο διακόπτης δ την στιγμή $t = 0$, τότε θα πρέπει να προσέξουμε το εξής σημείο:



Αν η πολικότητα της τάσεως $V_C(t)$ είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα τότε μετά το κλείσιμο του διακόπτη, θετικά φορτία θα κινηθούν δημιουργώντας το ρεύμα $i_C(t)$ **σύμφωνα με την φορά αναφοράς που φαίνεται στο σχήμα**. Παρατηρούμε εδώ ότι οι φορές αναφοράς τάσεως – ρεύματος στον πυκνωτή C **δεν είναι συσχετισμένες**.

Ο νόμος τάσεων Kirchhoff γράφεται:

$$-V_C(t) + i_C(t)R = 0$$

αλλά ισχύει:

$$i_C(t) = -C D V_C(t)$$

(διότι οι φ. α δεν είναι συσχετισμένες)

άρα:

$$-V_C(t) - R C D V_C(t) = 0$$

ή

$$R C D V_C(t) + V_C(t) = 0$$

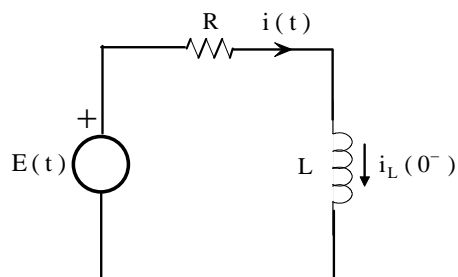
η οποία είναι και η Δ.Ε. (ομογενής) του προβλήματος. Η επίλυση της γίνεται κατά τα γνωστά.

Εύκολα θα προκύψει ότι η τάση $V_C(t)$ δίνεται από την σχέση:

$$V_C(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

Παράδειγμα 2) (κύκλωμα R-L)

Δίδεται το ακόλουθο δίκτυο



Είσοδος (διέγερση) θεωρείται η τάση της πηγής $E(t)$ και έξοδος (απόκριση) το ρεύμα $i(t)$.

Θεωρούνται γνωστά: α) οι τιμές των R και L

β) η αρχική κατάσταση για το ρεύμα του πηνίου $i_L(0^-) = 0 \text{ A}$

Ζητείται να υπολογιστούν:

α) η βηματική απόκριση του δικτύου

β) η κρουστική απόκριση του δικτύου

Λύση

Όπως είναι γνωστό η βηματική και η κρουστική απόκριση ενός ηλεκτρικού δικτύου υπολογίζονται θέτοντας ως διέγερση, αντίστοιχα, την **μοναδιαία** βηματική $u(t)$ και την **μοναδιαία** κρουστική συνάρτηση $\delta(t)$. Και στις δύο περιπτώσεις οι αρχικές καταστάσεις του δικτύου (ρεύματα πηνίων και τάσεις πυκνωτών για $t = 0^-$) θεωρούνται **εξ' ορισμού** μηδενικές. Στην περίπτωσή μας η μοναδική αρχική κατάσταση $i_L(0^-)$ δίδεται ότι είναι ίση με το μηδέν και έτσι ικανοποιείται η προϋπόθεση.

Παρακάτω υπολογίζουμε τις ζητούμενες αποκρίσεις

α) Βηματική απόκριση

Η Δ.Ε που συνδέει διέγερση με απόκριση βρίσκεται εύκολα από τον Νόμο του Ohm

$$i(t) = \frac{E(t)}{R + L D} \quad \text{άρα} \quad (L D + R) i(t) = E(t) \quad \text{η Δ.Ε. του δικτύου}$$

θέτουμε $E(t) = u(t)$ και ζητούμε να βρούμε την Α.Σ. $i(0^+)$

Προφανώς ισχύει $i(t) = i_L(t)$ και επειδή η διέγερση $E(t)$ είναι **φραγμένη** θα ισχύει $i_L(0^-) = i_L(0^+) = 0$ άρα η ζητούμενη Α.Σ. θα είναι $i(0^+) = 0$

Συνεπώς για τον υπολογισμό της βηματικής απόκρισης θα έχουμε

$$\Delta.E.: \quad (L D + R) i(t) = u(t)$$

$$A.S.: \quad i(0^+) = 0$$

Η Δ.Ε. έχει χαρακτηριστική εξίσωση $sL + R = 0$ με ρίζα $s_1 = -\frac{R}{L}$

άρα η γενική λύση της ομογενούς θα είναι:

$$i_{\text{ομογ}}(t) = C e^{-\frac{R}{L}t}$$

Αναζητούμε μια μερική λύση της Δ.Ε. $i_{\text{μερ}}(t)$

για $t > 0$ έχουμε $u(t) = 1 = \text{σταθ.}$, άρα ψάχνουμε για $i_{\text{μερ}}(t) = K = \text{σταθ.}$

Αντικαθιστούμε στην Δ.Ε.

$$(L D + R) i_{\text{μερ}}(t) = 1 \quad \text{ή} \quad (L D + R) K = 1 \quad \text{ή} \quad R K = 1 \quad \text{άρα} \quad K = i_{\text{μερ}}(t) = \frac{1}{R}$$

$$\text{Συνεπώς:} \quad i(t) = i_{\text{ομογ}}(t) + i_{\text{μερ}}(t) = C e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{1}{R}$$

και με εφαρμογή της Α.Σ.: $i(0^+) = 0$ προκύπτει η τιμή της σταθεράς C

$$i(0^+) = C + \frac{1}{R} = 0 \quad \text{άρα} \quad C = -\frac{1}{R}$$

Επομένως η βηματική απόκριση του δικτύου θα είναι:

$$i(t) = i_{\text{βηματική}}(t) = -\frac{1}{R} e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{1}{R}$$

Το τμήμα της απόκρισης $-\frac{1}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$ τείνει στο 0 καθώς ο χρόνος t τείνει στο άπειρο.

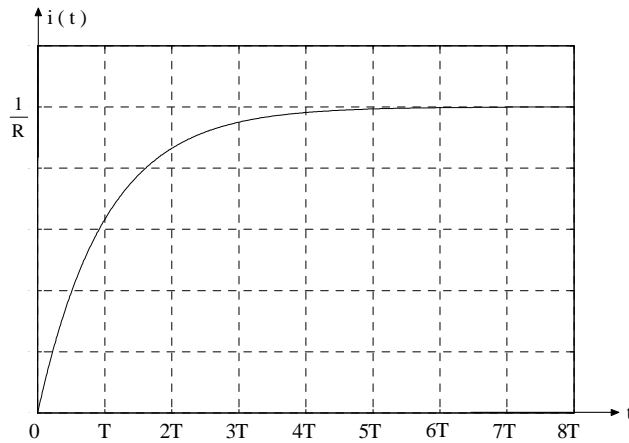
Το τμήμα αυτό αποτελεί την μεταβατική απόκριση $i_{\text{μεταβ}}(t) = -\frac{1}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$

Το τμήμα της απόκρισης $\frac{1}{R}$, που είναι και η τελική τιμή του ρεύματος αποτελεί την

μόνιμη απόκριση $i_{\text{μον}}(t) = \frac{1}{R}$

Το μέγεθος $T = \frac{L}{R}$, με διαστάσεις χρόνου αποκαλείται **σταθερά χρόνου** του δικτύου R-L.

Παρακάτω δίδεται η γραφική παράσταση της $i_{\text{βηματική}}(t)$



Ο άξονας του χρόνου έχει βαθμονομηθεί σε πολλαπλάσια της σταθεράς χρόνου T . Παρατηρούμε ότι σε χρονικό διάστημα $5T$ το ρεύμα έχει πάρει την τελική τιμή του.

β) Κρουστική απόκριση

Η Δ.Ε του δικτύου είναι βέβαια ή ίδια, όπως προηγουμένως

$$(L D + R) i(t) = E(t)$$

όπου εδώ θέτουμε $E(t) = \delta(t)$

Η εύρεση της Α.Σ. $i(0^+)$ δεν μπορεί να γίνει εφαρμόζοντας το προηγούμενο απλό σκεπτικό διότι τώρα έχουμε **μη φραγμένη διέγερση** και επομένως **δεν** εξασφαλίζεται η ισχύς της σχέσεως $i_L(0^-) = i_L(0^+)$

Εφαρμόζουμε εδώ την σχετική μεθοδολογία που αναπτύσσεται στα εδάφια **4.7.1 - 4.7. 2.**

Για $t = 0$ ακριβώς θα έχουμε:

α' μέλος της Δ.Ε.

$$D i(t)$$

$$i(t)$$

β' μέλος της Δ.Ε.

$$\delta(t)$$

Αν ισχύει $i(t) = k_1 \delta(t)$ (όπου k_1 μια σταθερά) τότε θα ισχύει $D i(t) = k_1 D \delta(t)$ δηλαδή στο β' μέλος θα πρέπει να υπάρχει η παράγωγος της $\delta(t)$, πράγμα το οποίο δεν συμβαίνει διότι στο β' μέλος υπάρχει **μόνον** η συνάρτηση $\delta(t)$.

Επομένως η υπόθεση $i(t) = k_1 \delta(t)$ καταλήγει σε **άτοπο** και έτσι καταλήγουμε στο ακόλουθο συμπέρασμα:

- η συνάρτηση $i(t)$ δεν περιέχει κρουστικό όρο για $t = 0$

- η συνάρτηση $Di(t)$ πρέπει να περιέχει κρουστικό όρο για $t = 0$ και να ισχύει:

$$Di(t) = k_1 \delta(t)$$

Έχουμε λοιπόν την Δ.Ε.: $(LD + R)i(t) = \delta(t)$

ή $LDi(t) + Ri(t) = \delta(t)$

και αντικαθιστούμε για την χρονική στιγμή $t = 0$ ακριβώς τις συναρτήσεις που περιέχουν κρουστικούς όρους (δηλ. μόνον την $Di(t)$) :

$$Lk_1 \delta(t) = \delta(t)$$

από την παραπάνω σχέση αμέσως προκύπτει η τιμή της σταθεράς $k_1 = \frac{1}{L}$

Άρα λοιπόν για $t = 0$ θα έχουμε: $Di(t) = \frac{1}{L} \delta(t)$

δηλαδή η συνάρτηση $i(t)$ θα έχει (για $t = 0$) κρουστική παράγωγο και αυτό αμέσως σημαίνει ότι η $i(t)$ θα είναι **ασυνεχής** για $t = 0$ (βλ. εδάφιο **3.6**)

Επίσης θα ισχύει:

$$Di(t) = \frac{1}{L} \delta(t) \quad \text{άρα} \quad i(0^+) - i(0^-) = \frac{1}{L}$$

και επειδή $i(0^-) = i_L(0^-) = 0$ προκύπτει τελικά η τιμή της ζητούμενης αρχικής συνθήκης:

$$i(0^+) = \frac{1}{L}$$

Παρατηρούμε ότι δεν ισχύει (όπως αναμενόταν) η συνέχεια του ρεύματος του πηνίου

$$i_L(0^-) = i(0^-) \neq i_L(0^+) = i(0^+)$$

Για να υπολογίσουμε τελικά την κρουστική απόκριση του δικτύου συνοψίζουμε στα ακόλουθα:

$$\Delta.Ε. \quad (LD + R)i(t) = \delta(t)$$

και για $t > 0$ $(LD + R)i(t) = 0$

$$Α.Σ. \quad i(0^+) = \frac{1}{L}$$

η λύση προκύπτει κατά τα γνωστά:

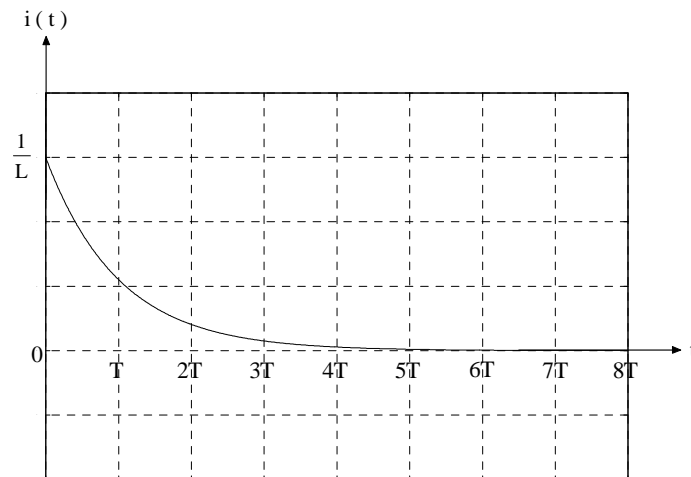
$$i(t) = i_{\text{κρουστική}}(t) = C e^{-\frac{R}{L}t}$$

και από την Α.Σ. $i(0^+) = \frac{1}{L}$ προκύπτει η τιμή της σταθεράς $C = \frac{1}{L}$

Αρά τελικά η κρουστική απόκριση του δικτύου $R - L$ θα είναι:

$$i(t) = i_{\text{κρουστικη}}(t) = \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}t}$$

Παρακάτω δίδεται η γραφική παράσταση της $i_{\text{κρουστικη}}(t)$



Το ρεύμα $i(t) = i_L(t)$ παρουσιάζει μια ασυνέχεια για $t = 0$ τελικά τείνει στο μηδέν.

Παρατήρηση: Είναι γνωστό ότι $\delta(t) = \frac{d u(t)}{d t}$ και επομένως η απόκριση σε είσοδο

$\delta(t)$ είναι ίση με την **παράγωγο** της απόκρισης σε είσοδο $u(t)$ δηλαδή θα ισχύει:

$$i_{\text{κρουστικη}}(t) = \frac{d}{d t} i_{\text{βηματικη}}(t) \quad (*)$$

γράφοντας ξανά τις δύο αποκρίσεις που βρήκαμε:

$$i_{\text{βηματικη}}(t) = -\frac{1}{R} e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{1}{R}$$

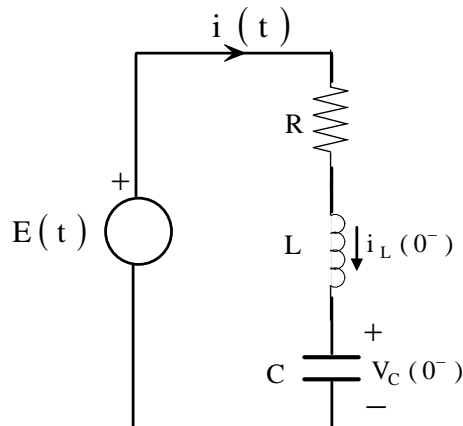
και

$$i_{\text{κρουστικη}}(t) = \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}t}$$

αμέσως επαληθεύεται η προηγούμενη σχέση $(*)$

Παράδειγμα 3) (κύκλωμα R-L-C σειράς)

Δίδεται το ακόλουθο δίκτυο:



Είσοδος (διέγερση) θεωρείται η τάση της πηγής $E(t)$ και έξοδος (απόκριση) το ρεύμα $i(t)$.

Θεωρούνται γνωστές οι τιμές των R , L και C

Ζητούνται:

α) Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του δικτύου

Λύση:

Για τον υπολογισμό της κρουστικής απόκρισης θεωρείται εξ' ορισμού ότι οι αρχικές καταστάσεις είναι μηδενικές δηλ. ισχύει $i_L(0^-) = 0$ A, και $V_C(0^-) = 0$ V.

Η Δ.Ε. που συνδέει διέγερση με απόκριση μπορεί να βρεθεί από τον νόμο του Ohm:

$$i(t) = \frac{E(t)}{R + LD + \frac{1}{CD}} \quad \eta \quad i(t) = \frac{CD E(t)}{RCD + LCD^2 + 1}$$

άρα η Δ.Ε. θα είναι:

$$(LCD^2 + RCD + 1) i(t) = CD E(t)$$

(Δ.Ε. 2^{ης} τάξεως διότι το δίκτυο περιέχει δύο δυναμικά στοιχεία)

εφ' όσον ζητάμε την κρουστική απόκριση θέτουμε $E(t) = \delta(t)$

άρα η Δ.Ε. γράφεται: $(LCD^2 + RCD + 1) i(t) = CD \delta(t)$

Για την εύρεση των Α.Σ. $i(0^+)$ και $D i(0^+)$ εφαρμόζουμε την μεθοδολογία που αναπτύσσεται στα εδάφια **4.7.1) - 4.7.3)**. Έτσι θα έχουμε

Για $t = 0$ ακριβώς θα έχουμε:

α' μέλος της Δ.Ε.

$$D^2 i(t)$$

$$D i(t)$$

$$i(t)$$

β' μέλος της Δ.Ε.

$$D \delta(t)$$

Η υπόθεση $i(t) = k_1 \delta(t)$ οδηγεί σε άτοπο, διότι τότε θα έπρεπε να ισχύει $D i(t) = k_1 D \delta(t)$ και $D^2 i(t) = k_1 D^2 \delta(t)$. Όμως ο όρος $D^2 \delta(t)$ δεν υπάρχει στο β' μέλος, άρα η υπόθεση $i(t) = k_1 \delta(t)$ δεν ευσταθεί.

Αν υποθέσουμε ότι $D i(t) = k_1 \delta(t)$ τότε προκύπτει ότι:

$$D^2 i(t) = k_1 D \delta(t) + k_2 \delta(t)$$

Η τελευταία αυτή σχέση δεν μπορεί να απορριφθεί διότι ο όρος $D \delta(t)$ υπάρχει στο β' μέλος.

Άρα λοιπόν καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι για $t = 0$ έχουμε:

$$i(t) \text{ δεν περιέχει κρουστικό όρο για } t = 0$$

$$D i(t) = k_1 \delta(t)$$

$$D^2 i(t) = k_1 D \delta(t) + k_2 \delta(t)$$

Για τον υπολογισμό των σταθερών k_1 και k_2 αντικαθιστούμε τις εκφράσεις για τις συναρτήσεις $D i(t)$ και $D^2 i(t)$ στην Δ.Ε. (για $t = 0$ πάντοτε) και έχουμε:

$$LCD^2 i(t) + RCD i(t) + i(t) = CD \delta(t)$$

$$\text{ή } LC(k_1 D \delta(t) + k_2 \delta(t)) + RC k_1 \delta(t) = CD \delta(t)$$

με αναγωγή ομοίων όρων θα πάρουμε:

$$LC k_1 = C \quad \text{άρα } k_1 = \frac{1}{L}$$

$$\text{και } LC k_2 + RC k_1 = 0 \quad \text{άρα } k_2 = -\frac{R}{L^2}$$

Συνεπώς για $t=0$

$$D i(t) = \frac{1}{L} \delta(t)$$

$$D^2 i(t) = \frac{1}{L} D \delta(t) - \frac{R}{L^2} \delta(t)$$

Άρα η συνάρτηση $i(t)$ έχει, για $t=0$, παράγωγο $D i(t) = \frac{1}{L} \delta(t)$ επομένως είναι ασυνεχής στο 0 και ισχύει:

$$i(0^+) - i(0^-) = \frac{1}{L} \quad \text{άρα} \quad i(0^+) = \frac{1}{L}$$

Επίσης η συνάρτηση $D i(t)$ έχει, για $t=0$, παράγωγο $D^2 i(t)$ που περιέχει τον όρο $-\frac{R}{L^2} \delta(t)$ επομένως είναι ασυνεχής στο 0 και ισχύει:

$$D i(0^+) - D i(0^-) = -\frac{R}{L^2} \quad \text{άρα} \quad D i(0^+) = -\frac{R}{L^2}$$

Συνοψίζοντας όλα τα προηγούμενα, για την εύρεση της κρουστικής απόκρισης, καταλήγουμε στα ακόλουθα:

Δ.Ε. $L C D^2 i(t) + R C D i(t) + i(t) = C D \delta(t)$

και για $t > 0$ $L C D^2 i(t) + R C D i(t) + i(t) = 0$

Α.Σ. $i(0^+) = \frac{1}{L}$

$$D i(0^+) = -\frac{R}{L^2}$$

Επίλυση της Δ.Ε.

χαρακτηριστική εξίσωση: $L C s^2 + R C s + 1 = 0$

οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης δίδονται από τον γνωστό τύπο:

$$s_{1,2} = \frac{-R C \pm \sqrt{R^2 C^2 - 4 L C}}{2 L C}$$

έστω ότι ισχύει: $R^2 C^2 - 4 L C < 0$ άρα έχουμε δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες

$$s_{1,2} = \sigma \pm j \omega$$

όπου: $\sigma = -\frac{R}{2 L}$ και $\omega = \frac{\sqrt{|R^2 C^2 - 4 L C|}}{2 L C}$

άρα η λύση θα είναι:

$$i(t) = e^{\sigma t} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t)$$

από τις Α.Σ. προσδιορίζονται οι δύο σταθερές C_1 και C_2

$$i(0^+) = C_1 = \frac{1}{L}$$

$$\text{και } D i(0^+) = \sigma C_1 + \omega C_2 = -\frac{R}{L^2} \quad \text{άρα } C_2 = \left(-\frac{R}{L^2} - \sigma C_1 \right) \left(\frac{1}{\omega} \right)$$

$$\text{μετά τις πράξεις προκύπτει η τιμή του } C_2 = -\frac{RC}{L \sqrt{|R^2 C^2 - 4LC|}}$$

Άρα κρουστική απόκριση του δικτύου θα είναι η :

$$i_{\text{κρουστ}}(t) = e^{-\frac{R}{2L}t} \left(\frac{1}{L} \cos \omega t - \frac{RC}{L \sqrt{|R^2 C^2 - 4LC|}} \sin \omega t \right)$$

$$\text{όπου: } \omega = \frac{\sqrt{|R^2 C^2 - 4LC|}}{2LC}$$

Αριθμητική εφαρμογή:

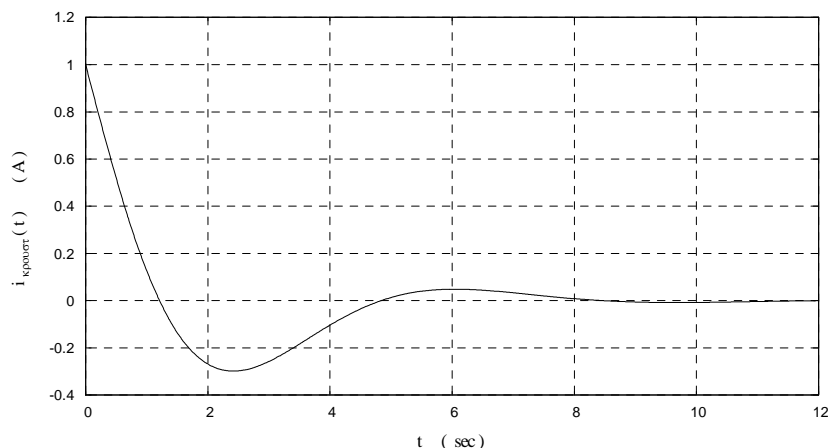
Μπορούμε να πάρουμε την πιο απλή περίπτωση όπου οι τιμές των R , L και C είναι μοναδιαίες δηλ. $R = 1 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$, $C = 1 \text{ F}$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε:

$$\sigma = -0.5 \text{ sec}^{-1}, \quad \omega = \sqrt{3}/2 \text{ rad/sec}, \quad C_1 = 1, \quad C_2 = -1/\sqrt{3}$$

και η κρουστική απόκριση γράφεται:

$$i_{\text{κρουστ}}(t) = e^{-0.5t} \left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right) \text{ A}$$

παρακάτω φαίνεται η γραφική παράσταση της κρουστικής απόκρισης



β) Να υπολογιστεί η βηματική απόκριση του δικτύου

Λύση:

Για τον υπολογισμό της βηματικής απόκρισης θεωρείται εξ' ορισμού ότι οι αρχικές καταστάσεις είναι μηδενικές δηλ. ισχύει $i_L(0^-) = 0 \text{ A}$, και $V_C(0^-) = 0 \text{ V}$.

Η Δ.Ε. είναι προφανώς η ίδια όπως προηγουμένως:

$$(LCD^2 + RCD + 1) i(t) = CD E(t)$$

και εφ' όσον ζητάμε την βηματική απόκριση θέτουμε $E(t) = u(t)$

άρα η Δ.Ε. γράφεται: $(LCD^2 + RCD + 1) i(t) = CDu(t) = C\delta(t)$

Στο σημείο αυτό κάνουμε την ακόλουθη σημαντικότερη παρατήρηση:

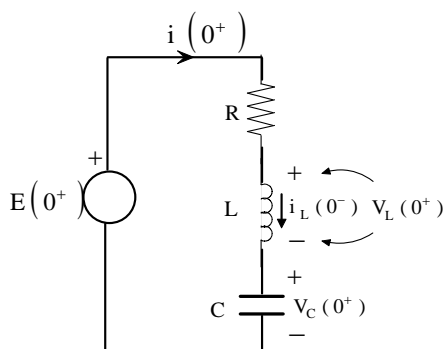
Φαίνεται εκ' πρώτης όψεως ότι έχουμε κρουστικό όρο στο β' μέλος. **Προσοχή όμως!** Ο κρουστικός όρος στο β' μέλος, οφείλεται στην παράγωγο της διέγερσης που υπάρχει στο β' μέλος. Η διέγερση του δικτύου $E(t) = u(t)$ είναι προφανώς **φραγμένη** συνάρτηση και επομένως οι Α.Σ., $i(0^+)$ και $Di(0^+)$, μπορούν να βρεθούν με χρήση των απλών νόμων της θεωρίας κυκλωμάτων και δεν χρειάζεται να εφαρμοστεί η μεθοδολογία που αναπτύσσεται στα εδάφια **4.7.1) - 4.7.3).**

Όσον αφορά την Δ.Ε. του δικτύου για $t > 0$, αυτή παίρνει την μορφή:

$$\text{Δ.Ε. για } t > 0 \quad (LCD^2 + RCD + 1) i(t) = 0$$

(διότι $\delta(t) = 0$ για $t > 0$)

Για την εύρεση των Α.Σ. $i(0^+)$ και $Di(0^+)$ έχουμε



Προφανώς $i(t) = i_L(t)$ και επειδή ισχύει

$i_L(0^-) = i_L(0^+)$ λόγω της φραγμένης διέγερσης

$E(t) = u(t)$ θα έχουμε:

$$i(0^+) = i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0 \text{ A}$$

Για την εύρεση της $Di(0^+)$ σκεπτόμαστε ως εξής:

$$Di(0^+) = Di_L(0^+) = \frac{1}{L} V_L(0^+)$$

Αλλά από τον νόμο τάσεων Kirchhoff στον μοναδικό βρόχο του δικτύου (για $t = 0^+$)

$$E(0^+) = i(0^+)R + V_L(0^+) + V_C(0^+)$$

και επειδή $i(0^+) = i_L(0^+)$

τελικά θα πάρουμε:

$$E(0^+) = i_L(0^+)R + V_L(0^+) + V_C(0^+)$$

άρα:

$$V_L(0^+) = E(0^+) - i_L(0^+)R - V_C(0^+)$$

και

$$Di(0^+) = \frac{1}{L} V_L(0^+) = \frac{1}{L} (E(0^+) - i_L(0^+)R - V_C(0^+))$$

επειδή όμως εξ' ορισμού στη βηματική απόκριση παίρνουμε $i_L(0^-) = 0 \text{ A}$, $V_C(0^-) = 0 \text{ V}$ και βέβαια ισχύουν $i_L(0^-) = i_L(0^+)$ και $V_C(0^-) = V_C(0^+)$, λόγω της φραγμένης διέγερσης, η 2^η Α.Σ. $Di(0^+)$ θα πάρει την τιμή:

$$Di(0^+) = \frac{1}{L} E(0^+) = \frac{1}{L} u(0^+)$$

Συνοψίζουμε λοιπόν για την βηματική απόκριση:

$$\Delta.E. \text{ (για } t > 0) \quad (LCD^2 + RCD + 1)i(t) = 0$$

$$A.S. \quad i(0^+) = 0 \quad A$$

$$Di(0^+) = \frac{1}{L} u(0^+) \quad A/s$$

Η επίλυση της Δ.Ε. γίνεται όπως στα προηγούμενα. Ας θεωρήσουμε και πάλι ότι η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες $s_{1,2} = \sigma \pm j\omega$

$$\text{όπου:} \quad \sigma = -\frac{R}{2L} \quad \text{και} \quad \omega = \frac{\sqrt{|R^2 C^2 - 4LC|}}{2LC}$$

και η λύση θα είναι:

$$i(t) = e^{\sigma t} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t)$$

από τις Α.Σ. προσδιορίζονται οι δύο σταθερές C_1 και C_2

$$i(0^+) = C_1 = 0$$

$$\text{και} \quad Di(0^+) = \sigma C_1 + \omega C_2 = \frac{1}{L} u(0^+) \quad \text{άρα} \quad C_2 = \frac{u(0^+)}{L\omega}$$

Άρα βηματική απόκριση του δικτύου θα είναι η :

$$i_{\beta\eta\mu}(t) = \frac{u(0^+)}{L\omega} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin \omega t = \frac{1}{L\omega} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin \omega t$$

$$\text{όπου:} \quad \omega = \frac{\sqrt{|R^2 C^2 - 4LC|}}{2LC}$$

Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ισχύει $\frac{d}{dt} i_{\beta\eta\mu}(t) = i_{\kappa\rho\upsilon\sigma\tau}(t)$

Αριθμητική εφαρμογή

Και πάλι εξετάζουμε την περίπτωση μοναδιαίων τιμών δηλ. $R = 1 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$, $C = 1 \text{ F}$.

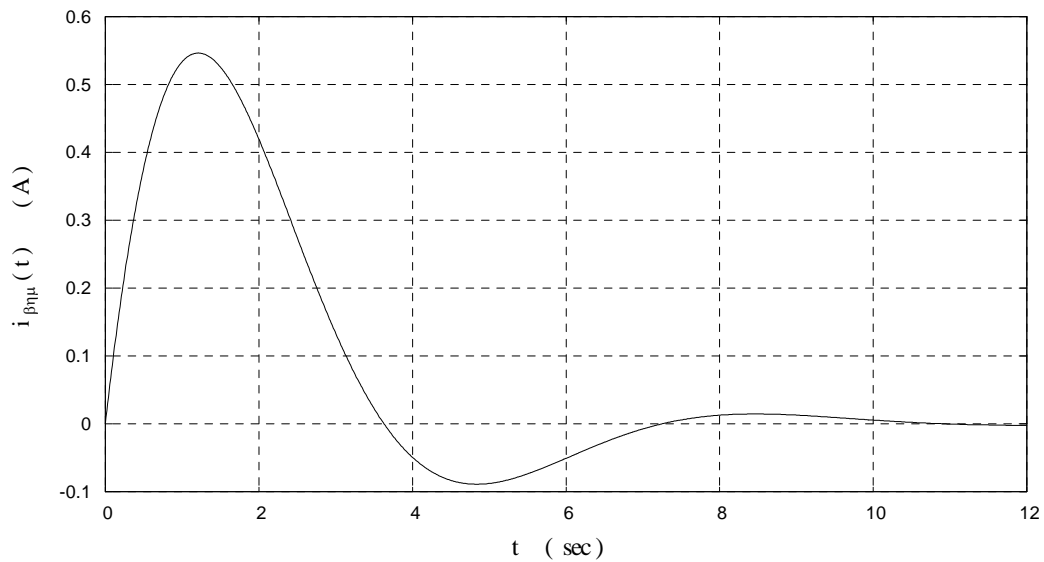
Προκύπτουν οι τιμές:

$$\sigma = -0.5 \text{ sec}^{-1}, \quad \omega = \sqrt{3}/2 \text{ rad/sec}, \quad C_1 = 0, \quad C_2 = 2/\sqrt{3}$$

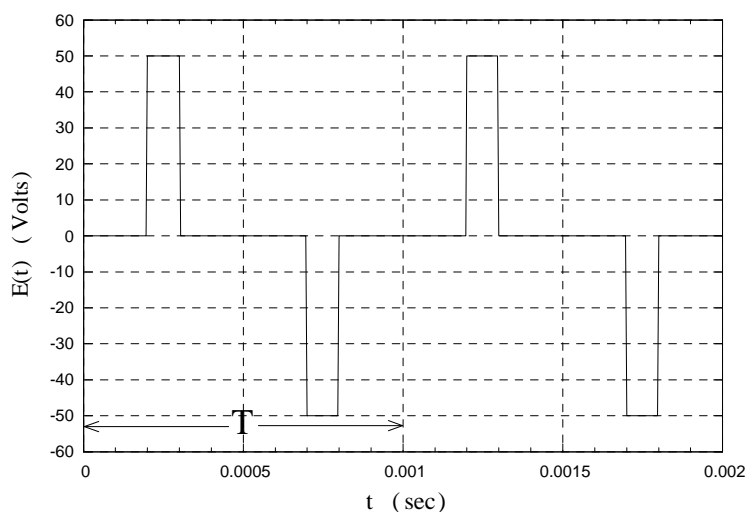
και η βηματική απόκριση γράφεται:

$$i_{\beta\eta\mu}(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-0.5t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \text{ A}$$

παρακάτω φαίνεται η γραφική παράσταση της βηματικής απόκρισης



γ) Να υπολογιστεί η απόκριση του δικτύου στο παρακάτω περιοδικό σήμα $E(t)$:
(το σήμα αρχίζει από το σημείο $t = 0$ συνεχίζεται μέχρι το άπειρο)



Δίδεται ότι οι αρχικές καταστάσεις είναι μηδενικές: $i_L(0^-) = 0 \text{ A}$, $V_C(0^-) = 0 \text{ V}$

Λύση:

Το πρόβλημα αυτό μπορεί πολύ απλά να λυθεί χρησιμοποιώντας το προηγούμενο αποτέλεσμα για την βηματική απόκριση του δικτύου.

Το σήμα $E(t)$, για μία περίοδο, μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$E(t) = A u(t - t_1) - A u(t - t_2) - A u(t - t_3) + A u(t - t_4)$$

όπου, όπως φαίνεται και από το σχήμα, θα είναι $A = 50 \text{ V}$, $t_1 = 0.0002 \text{ sec}$, $t_2 = 0.0003 \text{ sec}$, $t_3 = 0.0007 \text{ sec}$ και $t_4 = 0.0008 \text{ sec}$.

Επομένως το σήμα $E(t)$ για όλη τη διάρκειά του, μέχρι το άπειρο, θα γράφεται:

$$E(t) = [A u(t - t_1) - A u(t - t_2) - A u(t - t_3) + A u(t - t_4)] + [A u(t - (t_1 + T)) - A u(t - (t_2 + T)) - A u(t - (t_3 + T)) + A u(t - (t_4 + T))] + [A u(t - (t_1 + 2T)) - A u(t - (t_2 + 2T)) - A u(t - (t_3 + 2T)) + A u(t - (t_4 + 2T))] + \dots$$

όπου $T = 0.001 \text{ sec}$ η περίοδος του σήματος.

Το άθροισμα αυτό θα συνεχίζεται μέχρι το άπειρο, προσθέτοντας όρους με τον παράγοντα $3T$, $4T$ κ.λ.π.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι το σήμα $E(t)$ εκφράζεται ως ένα άπειρο άθροισμα βηματικών συναρτήσεων, που η κάθε μία έχει κάποια χρονική μετάθεση. Η βηματική απόκριση του δικτύου μας είναι γνωστή από το προηγούμενο ερώτημα (β). Επειδή το δίκτυο είναι **γραμμικό και χρονικά σταθερό**, θα ισχύει:

$$\begin{aligned} \text{αν σε είσοδο } u(t) \text{ έχουμε απόκριση } i_{\beta\eta\mu}(t) \\ \text{τότε σε είσοδο } A u(t-t_1) \text{ έχουμε απόκριση } A i_{\beta\eta\mu}(t-t_1) u(t-t_1) \end{aligned}$$

Προσοχή χρειάζεται στον όρο $u(t-t_1)$ με τον οποίο πολλαπλασιάζεται η απόκριση όταν έχουμε χρονικά μετατεθειμένη διέγερση. Είναι προφανές ότι για $t < t_1$ η συνάρτηση $u(t-t_1)$ έχει μηδενική τιμή, άρα ο όρος αυτός είναι απαραίτητος διότι έτσι εξασφαλίζεται η μη ύπαρξη απόκρισης για $0 < t < t_1$, αφού για το διάστημα αυτό **δεν** υπάρχει διέγερση. Άρα λοιπόν η απόκριση του δικτύου στο περιοδικό σήμα $E(t)$ μπορεί αμέσως να γραφεί ως ένα άθροισμα (ή μια επαλληλία) βηματικών αποκρίσεων με τις κατάλληλες χρονικές μεταθέσεις.

Η απόκριση του δικτύου σε μοναδιαία βηματική συνάρτηση $u(t)$ είναι:

$$i_{\beta\eta\mu}(t) = \frac{1}{L\omega} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin \omega t$$

άρα η απόκριση στην διέγερση $A u(t-t_1)$ θα είναι:

$$A i_{\beta\eta\mu}(t-t_1) u(t-t_1) = \frac{A}{L\omega} e^{-\frac{R}{2L}(t-t_1)} \sin(\omega(t-t_1)) u(t-t_1)$$

και αν έχουμε ως διέγερση ένα άθροισμα (ακόμα και απείρων όρων) από βηματικές συναρτήσεις, όπως αυτό με το οποίο περιγράφεται το σήμα $E(t)$:

$$E(t) = A [u(t-t_1) - u(t-t_2) - u(t-t_3) + u(t-t_4) + u(t-(t_1+T)) - u(t-(t_2+T)) - u(t-(t_3+T)) + u(t-(t_4+T)) + \dots]$$

τότε η απόκριση $i(t)$ θα γράφεται:

$$\begin{aligned} i(t) = \frac{A}{L\omega} [e^{-\frac{R}{2L}(t-t_1)} \sin(\omega(t-t_1)) u(t-t_1) - e^{-\frac{R}{2L}(t-t_2)} \sin(\omega(t-t_2)) u(t-t_2) - \\ - e^{-\frac{R}{2L}(t-t_3)} \sin(\omega(t-t_3)) u(t-t_3) + e^{-\frac{R}{2L}(t-t_4)} \sin(\omega(t-t_4)) u(t-t_4) + \\ + e^{-\frac{R}{2L}(t-(t_1+T))} \sin(\omega(t-(t_1+T))) u(t-(t_1+T)) - \dots \text{ κ.λ.π} \end{aligned}$$

Αριθμητική εφαρμογή:

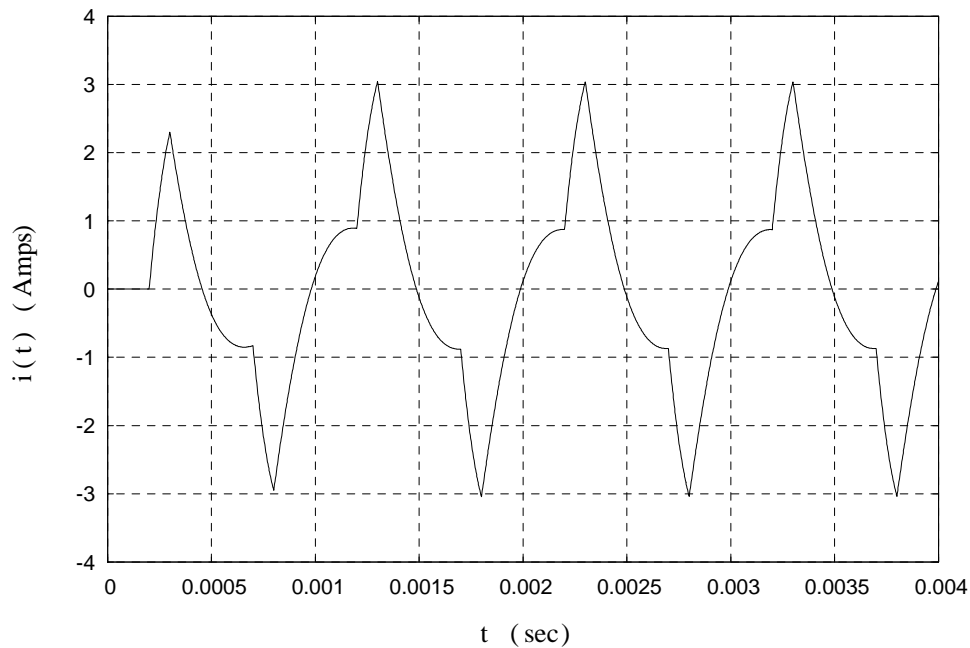
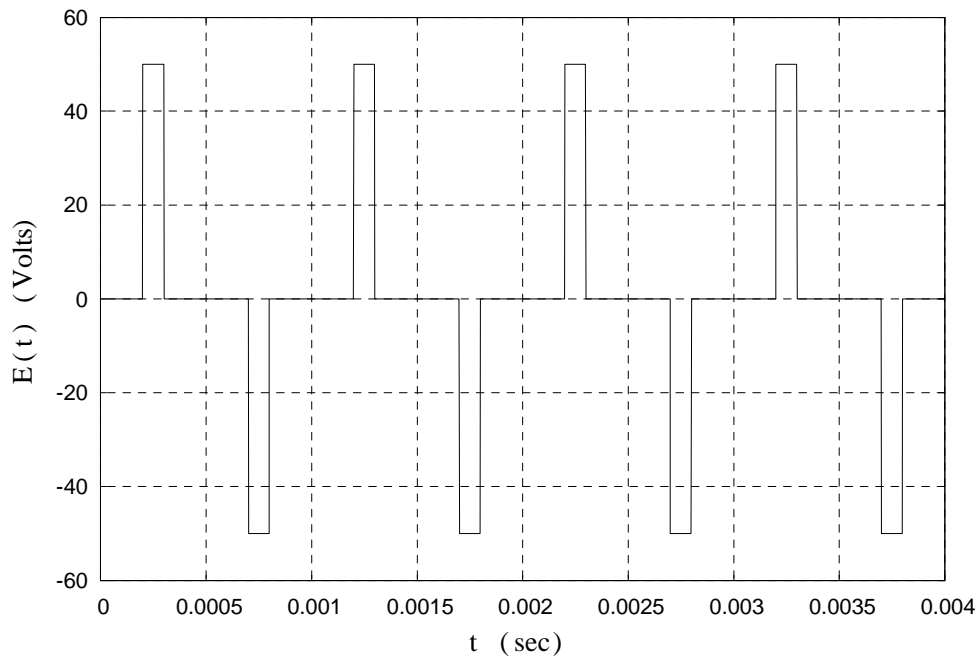
Θεωρούμε τιμές στοιχείων $R = 10 \Omega$, $L = 1.5 \text{ mH}$, και $C = 20 \mu\text{F}$.

Με τις τιμές αυτές η βηματική απόκριση του δικτύου προκύπτει:

$$i_{\beta\eta\mu}(t) = 7.07 e^{-3333.33 t} \sin \omega t$$

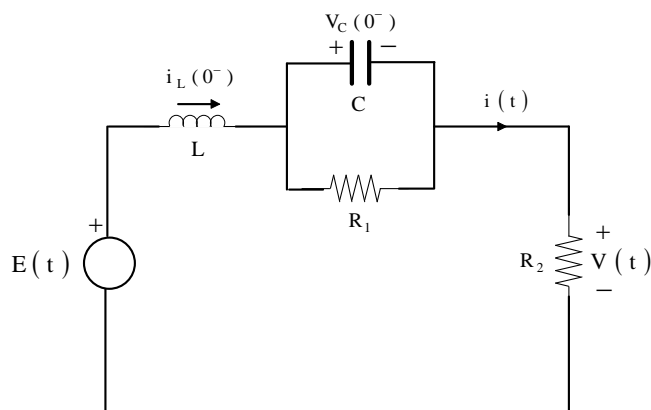
όπου $\omega = 4714.04 \text{ rad/sec}$

Παρακάτω δείχνουμε την διέγερση $E(t)$ και την απόκριση $i(t)$, για χρονική διάρκεια 4 περιόδων. Παρατηρείται ότι το μεταβατικό φαινόμενο στο $i(t)$, έχει διάρκεια περίπου μιας περιόδου



Παράδειγμα 4)

Δίδεται το ακόλουθο δίκτυο:



Είσοδος (διέγερση) θεωρείται η τάση της πηγής $E(t)$ και έξοδος (απόκριση) η τάση $V(t)$.

Δίδονται οι τιμές στοιχείων: $R_1 = 8 \Omega$, $R_2 = 20 \Omega$, $L = 0.1 \text{ H}$, $C = 50 \mu\text{F}$

και οι αρχικές καταστάσεις: $i_L(0^-) = 0.1 \text{ Amp}$, $V_C(0^-) = 4 \text{ Volts}$

Ζητείται να υπολογιστεί η πλήρης απόκριση όταν η διέγερση $E(t)$ είναι η ημιτονοειδής συνάρτηση:

$$E(t) = 10 \sin(2\pi 2000 t) \text{ Volts}$$

Λύση

Αρχικά θα βρούμε την Διαφορική Εξίσωση που συνδέει την διέγερση $E(t)$, με την απόκριση $V(t)$. Μπορούμε π.χ. να εφαρμόσουμε τον κανόνα του διαιρέτη τάσεως.

Η τάση της πηγής $E(t)$ κατανέμεται σε 3 ηλεκτρικά στοιχεία που είναι συνδεδεμένα σε σειρά: στο πηνίο L , στον παράλληλο συνδυασμό πυκνωτή C και αντίστασης R_1 , και στην αντίσταση R_2 . Η τάση $V(t)$ στην αντίσταση R_2 είναι αυτή που μας ενδιαφέρει.

Αρχικά υπολογίζουμε την σύνθετη αντίσταση του παράλληλου συνδυασμού R_1 και C .

$$Z_{R_1 C}(D) = \frac{R_1 \frac{1}{CD}}{R_1 + \frac{1}{CD}} = \frac{R_1}{R_1 C D + 1}$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τον κανόνα του διαιρέτη τάσεως για να υπολογίσουμε την $V(t)$

$$V(t) = E(t) \frac{R_2}{LD + Z_{R_1 C}(D) + R_2} = E(t) \frac{R_2}{LD + \frac{R_1}{R_1 C D + 1} + R_2}$$

$$\text{ή} \quad V(t) = E(t) \frac{R_2}{\frac{R_1LCD^2 + LD + R_1 + R_1R_2CD + R_2}{R_1CD + 1}}$$

$$\text{και τελικά:} \quad V(t) = E(t) \frac{R_1R_2CD + R_2}{R_1LCD^2 + LD + R_1 + R_1R_2CD + R_2}$$

επομένως η Δ.Ε. του δικτύου θα είναι:

$$[R_1LCD^2 + (R_1R_2C + L)D + R_1 + R_2]V(t) = [R_1R_2CD + R_2]E(t)$$

Η Δ.Ε. συνοδεύεται από 2 Αρχικές Συνθήκες οι οποίες είναι οι τιμές: $V(0^+)$ και $DV(0^+)$. Παρακάτω θα υπολογίσουμε αυτές τις Α.Σ. Υπενθυμίζεται ότι οι Α.Σ. υπολογίζονται συναρτήσει των τιμών των $i_L(t)$, $V_C(t)$, καθώς και της διέγερσης $E(t)$ για την χρονική στιγμή $t = 0^+$.

Αρχικά αναφέρουμε ότι επειδή έχουμε **φραγμένη** διέγερση ισχύουν οι σχέσεις:

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) \quad \text{και} \quad V_C(0^-) = V_C(0^+)$$

Για τον υπολογισμό της 1^{ης} Α.Σ. $V(0^+)$ παρατηρούμε ότι $V(t) = i(t)R_2$ αλλά $i(t) = i_L(t)$ συνεπώς για $t = 0^+$ θα έχουμε:

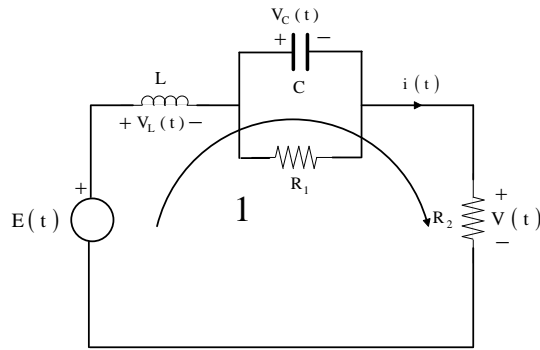
$$V(0^+) = R_2 i_L(0^+)$$

Για τον υπολογισμό της 2^{ης} Α.Σ. $DV(0^+)$ έχουμε $DV(t) = Di(t)R_2 = Di_L(t)R_2$ αλλά ισχύει και η σχέση τάσεως ρεύματος $V_L(t) = LDi_L(t)$ συνεπώς:

$$Di_L(t) = \frac{1}{L} V_L(t)$$

$$\text{και} \quad DV(t) = R_2 Di_L(t) = \frac{R_2}{L} V_L(t)$$

Προσπαθούμε να βρούμε μια έκφραση που να δίνει την τάση $V_L(t)$ συναρτήσει των γνωστών μεγεθών. Παρατηρούμε ότι ο Νόμος τάσεων Kirchhoff στον βρόχο 1 γράφεται:



N.T.K. (βρόχος 1): $-E(t) + V_L(t) + V_C(t) + V(t) = 0$
 και για $t = 0^+$ $-E(0^+) + V_L(0^+) + V_C(0^+) + V(0^+) = 0$

άρα $V_L(0^+) = E(0^+) - V_C(0^+) - V(0^+)$
 και επειδή $V(0^+) = R_2 i_L(0^+)$ (όπως βρήκαμε ήδη)
 προκύπτει $V_L(0^+) = E(0^+) - V_C(0^+) - R_2 i_L(0^+)$

και η 2^η Α.Σ. $DV(0^+) = \frac{R_2}{L} V_L(0^+)$ θα είναι τελικά:

$$DV(0^+) = \frac{R_2}{L} (E(0^+) - V_C(0^+) - R_2 i_L(0^+))$$

Συνοψίζουμε ξανά το πρόβλημά:

Δ.Ε. $[R_1LCD^2 + (R_1R_2C + L)D + R_1 + R_2]V(t) = [R_1R_2CD + R_2]E(t)$

Α.Σ. $V(0^+) = R_2 i_L(0^+)$

$$DV(0^+) = \frac{R_2}{L} (E(0^+) - V_C(0^+) - R_2 i_L(0^+))$$

Στο σημείο αυτό μπορούμε να αντικαταστήσουμε τα αριθμητικά δεδομένα και να προχωρήσουμε στην επίλυση. Έχουμε τις τιμές: $R_1 = 8 \Omega$, $R_2 = 20 \Omega$, $L = 0.1 \text{ H}$, $C = 50 \mu\text{F}$ και $i_L(0^+) = 0.1 \text{ Amp}$, $V_C(0^+) = 4 \text{ Volts}$, και η διέγερση $E(t) = 10 \sin(2\pi 2000 t) \text{ Volts}$. Αντικαθιστώντας τιμές θα πάρουμε

Δ.Ε. $[4 \times 10^{-5} D^2 + 0.108 D + 28] V(t) = [8 \times 10^{-3} D + 20] 10 \sin(2\pi 2000 t)$

Α.Σ. $V(0^+) = 2 \text{ Volts}$

$$DV(0^+) = -1200 \text{ Volts / sec}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της Δ.Ε. θα είναι:

$$4 \times 10^{-5} s^2 + 0.108 s + 28 = 0$$

με ρίζες

$$s_1 = -290.5, \quad s_2 = -2409.5$$

άρα η γενική λύση της ομογενούς Δ.Ε. θα είναι:

$$V_{\text{ομογ}}(t) = C_1 e^{-290.5t} + C_2 e^{-2409.5t}$$

όπου οι σταθερές C_1 και C_2 θα προσδιοριστούν από τις Α.Σ.

Αναζητούμε μια μερική λύση της Δ.Ε.

Επειδή στο β' μέλος έχουμε ημιτονοειδείς συναρτήσεις

β' μέλος Δ.Ε.

$$\begin{aligned} [8 \times 10^{-3} D + 20] 10 \sin(2\pi 2000 t) = \\ = 320 \pi \cos(2\pi 2000 t) + 200 \sin(2\pi 2000 t) \end{aligned}$$

αναζητούμε μερική λύση της μορφής:

$$V_{\text{μερ}}(t) = K_1 \cos(2\pi 2000 t) + K_2 \sin(2\pi 2000 t)$$

αντικαθιστούμε την έκφραση για την $V_{\text{μερ}}(t)$ στην Δ.Ε.

$$[4 \times 10^{-5} D^2 + 0.108 D + 28] V_{\text{μερ}}(t) = 320 \pi \cos(2\pi 2000 t) + 200 \sin(2\pi 2000 t)$$

$$\begin{aligned} \text{ή} \quad [4 \times 10^{-5} D^2 + 0.108 D + 28] (K_1 \cos(2\pi 2000 t) + K_2 \sin(2\pi 2000 t)) = \\ = 320 \pi \cos(2\pi 2000 t) + 200 \sin(2\pi 2000 t) \end{aligned}$$

Από την παραπάνω σχέση θα υπολογίσουμε τις τιμές των δύο σταθερών K_1 και K_2 κάνοντας χρήση και της γραμμικής ανεξαρτησίας των συναρτήσεων $\cos \omega t$ και $\sin \omega t$

Μετά από αρκετές αλλά απλές μαθηματικές πράξεις θα καταλήξουμε στη σχέση:

$$\begin{aligned} \cos \omega t (-4 \times 10^{-5} \omega^2 K_1 + 0.108 \omega K_2 + 28 K_1) + \sin \omega t (-4 \times 10^{-5} \omega^2 K_2 - 0.108 \omega K_1 \\ + 28 K_2) = 8 \times 10^{-2} \omega \cos \omega t + 200 \sin \omega t \end{aligned}$$

και επειδή οι συναρτήσεις $\cos \omega t$ και $\sin \omega t$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες θα πρέπει να ισχύουν:

$$\begin{aligned} -4 \times 10^{-5} \omega^2 K_1 + 0.108 \omega K_2 + 28 K_1 &= 8 \times 10^{-2} \omega \\ -4 \times 10^{-5} \omega^2 K_2 - 0.108 \omega K_1 + 28 K_2 &= 200 \end{aligned}$$

$$\text{όπου } \omega = 2\pi 2000 = 12566.37$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις θα προκύψει το γραμμικό σύστημα (2 x 2)

$$\begin{aligned} K_1(-4 \times 10^{-5} \omega^2 + 28) + 0.108 \omega K_2 &= 8 \times 10^{-2} \omega \\ -0.108 \omega K_1 + (-4 \times 10^{-5} \omega^2 + 28) K_2 &= 200 \end{aligned}$$

ή λύση του συστήματος είναι:

$$K_1 = -0.1593 \quad , \quad K_2 = 2.577 \times 10^{-3}$$

Άρα η μερική λύση γράφεται:

$$V_{\text{μερ}}(t) = -0.1593 \cos(2\pi 2000 t) + 2.577 \times 10^{-3} \sin(2\pi 2000 t)$$

Η σχέση αυτή μπορεί ισοδύναμα να γραφεί και ως

$$V_{\text{μερ}}(t) = 0.15932 \sin(2\pi 2000 t - 89.1^\circ)$$

Συνοψίζουμε λοιπόν την πλήρη λύση της Δ.Ε.

$$V(t) = V_{\text{ομογ}}(t) + V_{\text{μερ}}(t)$$

$$\text{ή} \quad V(t) = C_1 e^{-290.5t} + C_2 e^{-2409.5t} + 0.15932 \sin(2\pi 2000 t - 89.1^\circ)$$

και από τις δύο Α.Σ.: $V(0^+) = 2 \text{ Volts}$, $DV(0^+) = -1200 \text{ Volts / sec}$

θα προκύψουν οι τιμές των δύο σταθερών C_1 και C_2

$$V(0^+) = C_1 + C_2 + 0.15932 \sin(-89.1^\circ) = 2$$

$$DV(0^+) = -290.5 C_1 - 2409.5 C_2 + 2002.07 \cos(-89.1^\circ) = -1200$$

ή

$$C_1 + C_2 = 2.1593$$

$$-290.5 C_1 - 2409.5 C_2 = -1231.45$$

η λύση του συστήματος δίνει τις τιμές:

$$C_1 = 1.874 \quad \text{και} \quad C_2 = 0.285$$

Επομένως καταλήγουμε στο τελικό αποτέλεσμα για την τάση $V(t)$

$$V(t) = 1.874 e^{-290.5t} + 0.285 e^{-2409.5t} + 0.15932 \sin(2\pi 2000 t - 89.1^\circ)$$

Το τμήμα της $V(t)$

$$V_{\text{μεταβ}}(t) = 1.874 e^{-290.5t} + 0.285 e^{-2409.5t}$$

τείνει στο μηδέν καθώς ο χρόνος τείνει στο άπειρο και αποτελεί την μεταβατική απόκριση ενώ το τμήμα (σταθερή ταλάντωση)

$$V_{\text{μον}}(t) = 0.15932 \sin(2\pi 2000t - 89.1^\circ)$$

αποτελεί την μόνιμη απόκριση

Για την διάρκεια (πρακτικά) του μεταβατικού φαινομένου μπορούμε να πούμε τα ακόλουθα:

Το δίκτυο έχει δύο σταθερές χρόνου:

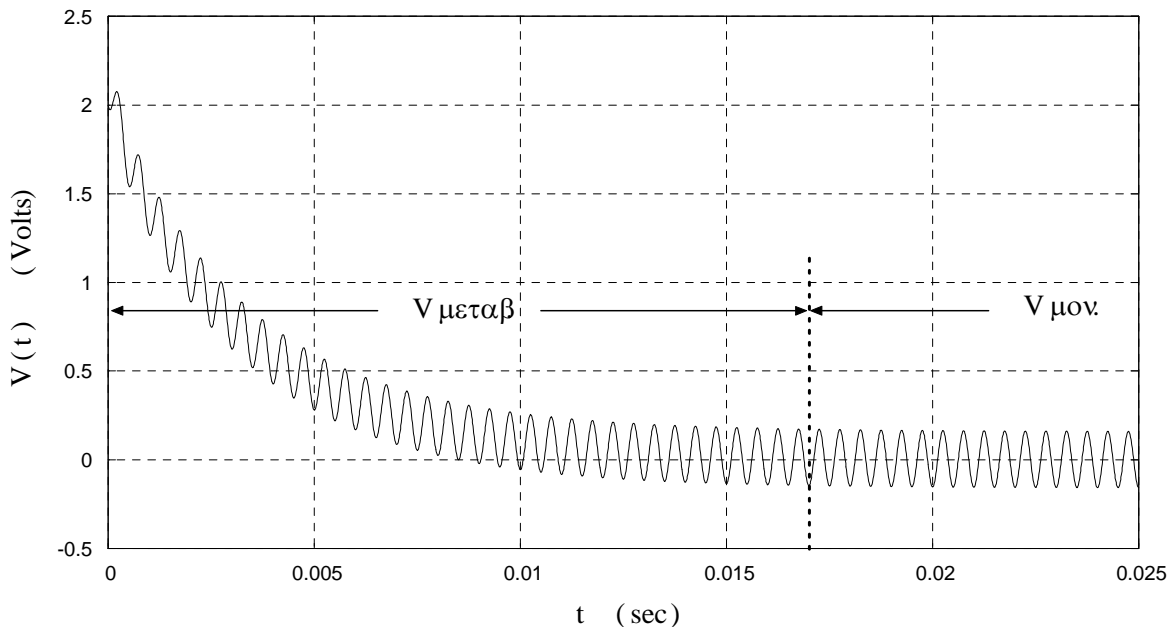
$$T_1 = (1 / 290.5) \text{ sec} = 0.00344 \text{ sec}$$

και

$$T_2 = (1 / 2409.5) \text{ sec} = 0.000415 \text{ sec}$$

η επικρατούσα σταθερά χρόνου είναι η μεγαλύτερη από τις δύο δηλ. η T_1 . Πρακτικά μπορούμε να πούμε ότι το μεταβατικό φαινόμενο διαρκεί χρόνο $\tau = 5 T_1 = 0.017 \text{ sec}$ περίπου

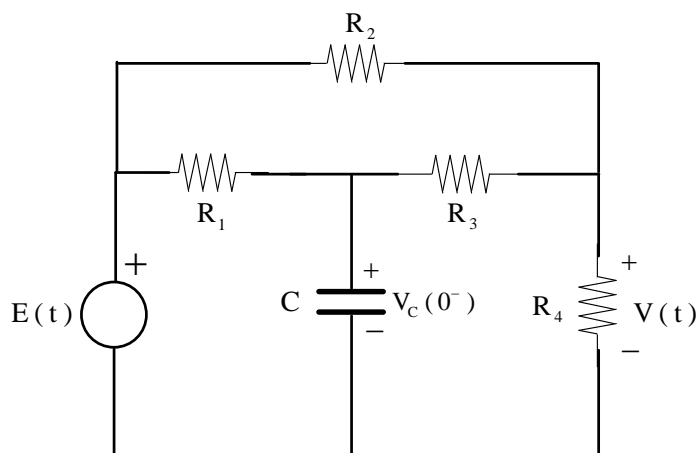
Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση τη τάσεως $V(t)$ και έχει σημειωθεί το χρονικό διάστημα διάρκειας του μεταβατικού φαινομένου



Παράδειγμα 5

Δίδεται το ακόλουθο δίκτυο. Θεωρούνται γνωστές οι τιμές των στοιχείων R_1, R_2, R_3, R_4, C και η αρχική κατάσταση $V_C(0^-)$. Ως διέγερση θεωρείται η τάση της πηγής $E(t)$ και ως απόκριση η τάση $V(t)$ στην R_4

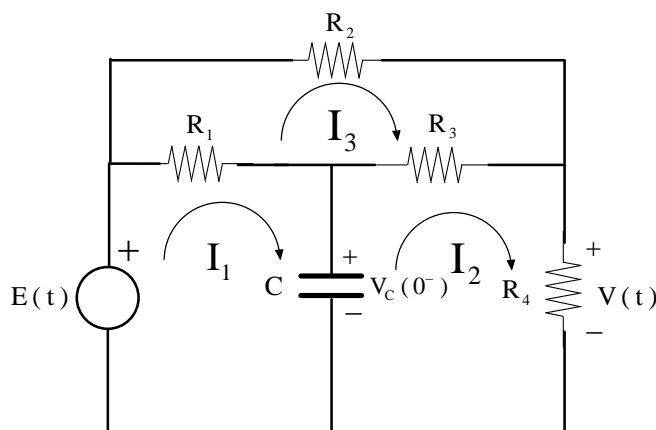
Ζητείται να βρεθεί η Διαφορική Εξίσωση που συνδέει την διέγερση με την απόκριση καθώς και η απαραίτητη αρχική συνθήκη για την επίλυσή της



Λύση

Είναι προφανές ότι η ζητούμενη Δ.Ε. θα είναι 1^{ης} τάξεως διότι το δίκτυο περιλαμβάνει ένα μόνο δυναμικό στοιχείο. Η εύρεση της Δ.Ε. μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους (ο σκοπός είναι πάντα να εκφράσουμε την τάση $V(t)$ συναρτήσει της τάσεως της πηγής $E(t)$). Αναφέρουμε πάντως ότι λόγω της , έστω και μικρής , “πολυπλοκότητας” του δικτύου (δεν είναι ένα απλό δίκτυο με ένα μόνον βρόχο) η εύρεση της ζητούμενης Δ.Ε. απαιτεί σχετική προσπάθεια και έχει αρκετό μαθηματικό φόρτο.

Ένας τρόπος εύρεσης της Δ.Ε. είναι να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος των ρευμάτων βρόχων. Παρακάτω δείχνουμε ξανά το δίκτυο με σημειωμένα τα 3 ρεύματα βρόχων I_1, I_2, I_3 .



Η ζητούμενη τάση $V(t)$ θα δίνεται από την σχέση $V(t) = R_4 I_2$. Παρακάτω διατυπώνουμε τις εξισώσεις βρόχων σε μητρική μορφή :

$$\begin{bmatrix} R_1 + \frac{1}{CD} & -\frac{1}{CD} & -R_1 \\ -\frac{1}{CD} & \frac{1}{CD} + R_3 + R_4 & -R_3 \\ -R_1 & -R_3 & R_1 + R_2 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Από τους 3 αγνώστους I_1, I_2, I_3 μας ενδιαφέρει μόνον το I_2 . Η λύση του ανωτέρω συστήματος έχει αρκετό όγκο πράξεων που δεν θα σημειωθούν εδώ. Θα δώσουμε μόνον το τελικό αποτέλεσμα για το ρεύμα I_2 .

$$I_2(t) = \frac{E(t) [R_1 R_3 CD + R_1 + R_2 + R_3]}{CD (R_1 R_2 R_3 + R_1 R_2 R_4 + R_1 R_3 R_4) + R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_4 + R_2 R_4 + R_3 R_4}$$

και επειδή $V(t) = R_4 I_2$ τελικά θα πάρουμε:

$$V(t) = \frac{R_4 E(t) [R_1 R_3 CD + R_1 + R_2 + R_3]}{CD (R_1 R_2 R_3 + R_1 R_2 R_4 + R_1 R_3 R_4) + R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_4 + R_2 R_4 + R_3 R_4}$$

και η ζητούμενη Δ.Ε. θα είναι:

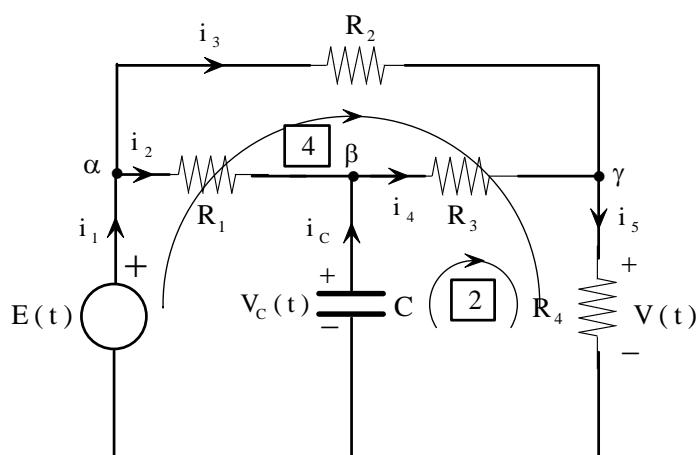
$$\begin{aligned} [CD (R_1 R_2 R_3 + R_1 R_2 R_4 + R_1 R_3 R_4) + R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_4 + R_2 R_4 + R_3 R_4] V(t) = \\ = [R_1 R_3 R_4 CD + R_1 R_4 + R_2 R_4 + R_3 R_4] E(t) \end{aligned}$$

Παρακάτω θα υπολογίσουμε και την ζητούμενη αρχική συνθήκη $V(0^+)$

Με την προϋπόθεση ότι έχουμε φραγμένη διέγερση $E(t)$ θα ισχύει η σχέση:

$$V_C(0^-) = V_C(0^+)$$

Σχεδιάζουμε ξανά το δίκτυο και σημειώνουμε τα ρεύματα κλάδων



Ο νόμος τάσεων Kirchhoff στον βρόχο 2 γράφεται:

$$-V_C(t) + i_4(t) R_3 + V(t) = 0$$

άρα

$$V(t) = V_C(t) - i_4(t) R_3$$

προσπαθούμε να βρούμε μια έκφραση για το ρεύμα $i_4(t)$

Ο νόμος ρευμάτων Kirchhoff στον κόμβο γ γράφεται:

$$i_3(t) + i_4(t) = i_5(t) = \frac{V(t)}{R_4}$$

και ο νόμος τάσεων Kirchhoff στον βρόχο 4 γράφεται:

$$E(t) = i_3(t) R_2 + V(t) \quad \text{άρα} \quad i_3(t) = \frac{E(t) - V(t)}{R_2}$$

συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις θα πάρουμε:

$$\frac{E(t) - V(t)}{R_2} + i_4(t) = \frac{V(t)}{R_4}$$

από την σχέση αυτή προκύπτει η έκφραση για το ρεύμα $i_4(t)$:

$$i_4(t) = \frac{V(t)}{R_4} + \frac{V(t)}{R_2} - \frac{E(t)}{R_2}$$

συνδυάζοντας την σχέση αυτή με την σχέση που προέκυψε από τον Ν.Τ.Κ. στον βρόχο 2

$$V(t) = V_C(t) - i_4(t) R_3$$

θα πάρουμε:

$$V(t) = V_C(t) - \left(\frac{V(t)}{R_4} + \frac{V(t)}{R_2} - \frac{E(t)}{R_2} \right) R_3$$

και αν λύσουμε ως προς $V(t)$:

$$V(t) = \frac{V_c(t) + \frac{R_3}{R_2} E(t)}{1 + \frac{R_3}{R_4} + \frac{R_3}{R_2}}$$

Η σχέση αυτή ισχύει για κάθε t άρα και για $t = 0^+$, συνεπώς η ζητούμενη Α.Σ. θα είναι:

$$V(0^+) = \frac{V_c(0^+) + \frac{R_3}{R_2} E(0^+)}{1 + \frac{R_3}{R_4} + \frac{R_3}{R_2}}$$

4.9) Περιγραφή δικτύων και συστημάτων με χρήση των Μεταβλητών Καταστάσεως

4.9.1) Εισαγωγικά

Αρχικά θα διατυπώσουμε ξανά, την έννοια του συστήματος:

- Καλούμε σύστημα ένα σύνολο στοιχείων και διατάξεων οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους και έχουν σκοπό να επιτελέσουν κάποια διαδικασία (ή έργο).

Παραδείγματα συστημάτων είναι τα ηλεκτρικά δίκτυα, οι σταθμοί παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας, οι μηχανές εσωτερικής καύσεως, οι πυρηνικοί αντιδραστήρες κ.λ.π.

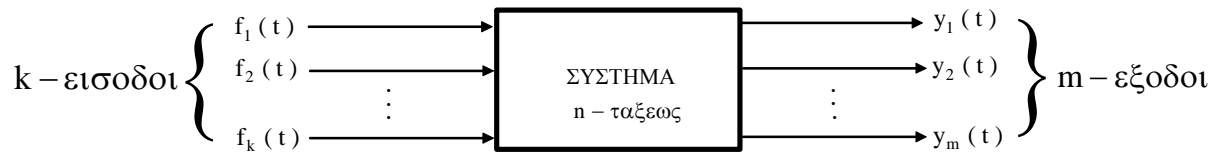
Τα συστήματα περιγράφονται από μαθηματικές σχέσεις, που συνδέουν κάποιο «αίτιο» με κάποιο «αποτέλεσμα», με χρήση διαφόρων «δυναμικών» μεταβλητών (δηλ. μεταβλητών που είναι συναρτήσεις του χρόνου). Οι μεταβλητές αυτές είναι φυσικά μεγέθη, η φυσική διάσταση των οποίων εξαρτάται από το ίδιο το σύστημα. Για παράδειγμα σε ένα ηλεκτρικό δίκτυο οι μεταβλητές αυτές θα είναι τάσεις ή ρεύματα, ενώ σε ένα μηχανικό σύστημα μπορούν να είναι δυνάμεις, ταχύτητες, επιταχύνσεις κ.λ.π.

Κάποιες από τις μεταβλητές αυτές θεωρούνται ως διεγέρσεις (ή είσοδοι, ή αίτια) και κάποιες άλλες ως αποκρίσεις (ή έξοδοι, ή αποτελέσματα). Ένα σύστημα μπορεί να έχει μία ή περισσότερες εισόδους και εξόδους. Επίσης αναφέρουμε ότι οι είσοδοι και οι έξοδοι ονομάζονται και σήματα.

Γενικά μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ένα σύστημα έχει k εισόδους και m εξόδους. Οι k - είσοδοι αποτελούν τα στοιχεία του διανύσματος εισόδου \hat{f} , και οι m - έξοδοι αποτελούν τα στοιχεία του διανύσματος εξόδου \hat{y} αντίστοιχα. Επομένως μπορούμε να γράψουμε:

$$\hat{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_k(t) \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \hat{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix}$$

ή σχηματικά:



Το βασικό πρόβλημα ενός συστήματος είναι η εύρεση του διανύσματος εξόδου \hat{y} για ένα δεδομένο διάνυσμα εισόδου \hat{f} . Το πρόβλημα αυτό λέγεται **ανάλυση** συστήματος

Ο τρόπος με τον οποίο το σύστημα επενεργεί επί των εισόδων \hat{f} για να παραχθούν οι έξοδοι \hat{y} μπορεί να παρασταθεί μαθηματικά μέσω ενός τελεστή T .

$$\hat{y} = T \hat{f}$$

Η ανωτέρω γενική σχέση μπορεί να πάρει τη μορφή αλγεβρικού ή ολοκληρωδιαφορικού συστήματος εξισώσεων (γραμμικού ή μη γραμμικού). Η σχέση αυτή λέμε ότι *περιγράφει* το σύστημα.

- Σε ένα γραμμικό και χρονικά σταθερό σύστημα η σχέση που συνδέει μια τυχούσα είσοδο $f_i(t)$ με μια τυχούσα έξοδο $y_j(t)$ είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση n - τάξεως, με σταθερούς συντελεστές. Ο ακέραιος αριθμός n , λέγεται **τάξη του συστήματος**.

4.9.2) Διατύπωση των εξισώσεων καταστάσεως

Μια ιδιαίτερα χρήσιμη μέθοδος περιγραφής ενός συστήματος είναι αυτή που χρησιμοποιεί τις λεγόμενες *μεταβλητές καταστάσεως*. Οι μεταβλητές καταστάσεως είναι ένα σύνολο n μεταβλητών $[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$ που σχηματίζουν το *διάνυσμα καταστάσεως* \hat{x} . Ο ακέραιος αριθμός n λέγεται, όπως προαναφέραμε, **τάξη του συστήματος**.

Η γνώση των μεταβλητών καταστάσεως για κάθε χρονική στιγμή t (όπου $t > 0$)* μας επιτρέπει να γνωρίζουμε την πλήρη συμπεριφορά του συστήματος.

Οι μεταβλητές καταστάσεως είναι φυσικά μεγέθη του συστήματος.

Για ένα γραμμικό και χρονικά σταθερό σύστημα (όπως αυτά που μας απασχολούν) οι μαθηματικές σχέσεις που συνδέουν τα 3 προαναφερθέντα διανύσματα, δηλ. το διάνυσμα εισόδου \hat{f} , το διάνυσμα εξόδου \hat{y} , και το διάνυσμα καταστάσεως \hat{x} , είναι οι ακόλουθες:

* Υπενθυμίζεται ότι η χρονική στιγμή $t = 0$ θεωρείται η στιγμή εφαρμογής των διεγέρσεων το συστήματος

$$\frac{d}{dt} \bar{x}(t) = \hat{A} \cdot \bar{x}(t) + \hat{B} \cdot \hat{f}(t) \quad \text{εξισώσεις καταστάσεως}$$

ή πιο αναλυτικά:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_k(t) \end{bmatrix}$$

Το διάνυσμα (ή πίνακας) καταστάσεως $\bar{x}(t)$ έχει διαστάσεις (γραμμές \times στήλες) $(n \times 1)$ και ο πίνακας \hat{A} έχει διαστάσεις $(n \times n)$.

Το διάνυσμα (ή πίνακας) εισόδου $\hat{f}(t)$ έχει διαστάσεις $(k \times 1)$ και ο πίνακας \hat{B} έχει διαστάσεις $(n \times k)$.

Οι πίνακες \hat{A} και \hat{B} αποτελούνται από σταθερούς πραγματικούς αριθμούς οι οποίοι μπορούν να προσδιοριστούν από τα στοιχεία του συστήματος.

- Παρατηρούμε ότι η εύρεση των μεταβλητών καταστάσεως $[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$ προϋποθέτει την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος διαφορικών εξισώσεων (μη ομογενούς) αλλά πάντοτε 1^{ης} τάξεως. Αυτό από μαθηματική άποψη θεωρείται απλούστερο από την επίλυση μιας διαφορικής εξίσωσης n – τάξεως.

Σημειώνουμε ότι για την επίλυση του ανωτέρω συστήματος διαφορικών εξισώσεων απαιτείται η γνώση των αρχικών συνθηκών δηλ. της τιμής του διανύσματος $\bar{x}(t)$ τη χρονική στιγμή $t=0$, ($\bar{x}(0) = [x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)]$)

Γνωρίζοντας το διάνυσμα καταστάσεως $\bar{x}(t)$, βρίσκουμε το ζητούμενο διάνυσμα εξόδου από την σχέση

$$\hat{y}(t) = \hat{C} \cdot \bar{x}(t) + \hat{D} \cdot \hat{f}(t) \quad \text{εξισώσεις εξόδου}$$

ή πιο αναλυτικά:

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1k} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mk} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_k(t) \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας \hat{C} έχει διαστάσεις $(m \times n)$ και ο πίνακας \hat{D} έχει διαστάσεις $(m \times k)$

Οι πίνακες \hat{C} και \hat{D} , αποτελούνται από σταθερούς πραγματικούς αριθμούς οι οποίοι μπορούν να προσδιοριστούν από τα στοιχεία του συστήματος.

Σημειώνουμε ότι η εκλογή των μεταβλητών καταστάσεως δεν είναι μονοσήμαντη και επίσης είναι δυνατόν κάποια από τα μεγέθη $y_i(t)$, δηλαδή κάποια από τα μεγέθη εξόδου, να είναι ταυτόχρονα και μεταβλητές καταστάσεως.

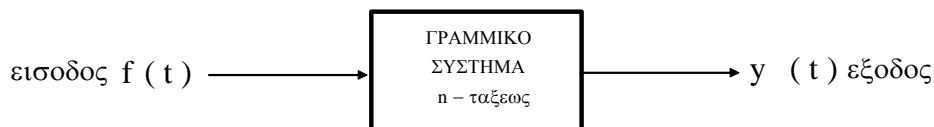
Μπορούμε να θεωρήσουμε σε ένα χώρο (γενικά n -διαστάσεων) ένα σημείο Q με συντεταγμένες τις τιμές των μεταβλητών καταστάσεως $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$. Το σημείο Q , καθώς αυξάνει ο χρόνος t , διαγράφει μια καμπύλη «τροχιά» στο χώρο, η οποία ονομάζεται τροχιά του συστήματος. Εποπτεία αυτής της τροχιάς μπορούμε να έχουμε προφανώς μόνον σε συστήματα $2^{α5}$ και $3^{η5}$ τάξεως.

Θα αναφέρουμε εδώ τα βασικότερα πλεονεκτήματα της μεθόδου αναλύσεως συστημάτων με χρήση των εξισώσεων καταστάσεως

- 1) Η μέθοδος αναφέρεται στο πεδίο του χρόνου άρα έχει άμεση φυσική εποπτεία
- 2) Μπορεί να εφαρμοστεί και σε μη γραμμικά και χρονικά μεταβλητά συστήματα
- 3) Έχει σημαντική ευκολία στην εύρεση των αρχικών συνθηκών.
- 4) Προσφέρεται για χρήση σε Η/Υ (σημαντική ευκολία στον προγραμματισμό)
- 5) Παρέχει τη δυνατότητα διατυπώσεως πιο προχωρημένων προβλημάτων της θεωρίας συστημάτων (όπως π.χ. η ευστάθεια).

4. 9. 3) Διατύπωση των εξισώσεων καταστάσεως για γραμμικό σύστημα μίας εισόδου – μίας εξόδου

Έστω ότι έχουμε ένα γραμμικό σύστημα με μία είσοδο $f(t)$ και μία έξοδο $y(t)$. Το σύστημα θεωρείται γενικά n – τάξεως και επομένως περιγράφεται από μια γραμμική διαφορική εξίσωση n – τάξεως, με σταθερούς συντελεστές.



Θα θεωρήσουμε ότι η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το σύστημα θα έχει την ακόλουθη μορφή:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 f(t)$$

Τα a_0, a_1, \dots, a_n και b_0 είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωσή μας στο δεύτερο μέλος της διαφορικής εξίσωσης **δεν** υπάρχουν παράγωγοι της συναρτήσεως $f(t)$ (είσοδος του συστήματος)

Οι αρχικές συνθήκες που συνοδεύουν την διαφορική εξίσωση θα είναι:

$$y(0^+), \quad \frac{dy(0^+)}{dt}, \quad \frac{d^2 y(0^+)}{dt^2}, \dots, \frac{d^{n-1} y(0^+)}{dt^{n-1}}$$

όπου $t=0$ η χρονική στιγμή εφαρμογής της εισόδου (διέγερσης) $f(t)$.

Το σύστημα, εφ' όσον είναι n – τάξεως, θα περιγράφεται από n – μεταβλητές καταστάσεως

Εδώ μια πολύ καλή εκλογή μεταβλητών καταστάσεως $[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$ είναι η ακόλουθη:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \frac{dy(t)}{dt} \\ x_3(t) &= \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \\ &\vdots \\ x_{n-1}(t) &= \frac{d^{n-2} y(t)}{dt^{n-2}} \\ x_n(t) &= \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} \end{aligned}$$

και τούτο γιατί **είναι γνωστές** οι αρχικές συνθήκες για τις συναρτήσεις αυτές για $t=0^+$

Παρατηρούμε ότι:

$$\frac{d x_1(t)}{d t} = \frac{d y(t)}{d t} = x_2(t)$$

$$\frac{d x_2(t)}{d t} = \frac{d^2 y(t)}{d t^2} = x_3(t)$$

.

.

.

$$\frac{d x_{n-1}(t)}{d t} = \frac{d y^{n-1}(t)}{d t^{n-1}} = x_n(t)$$

$$\frac{d x_n(t)}{d t} = \frac{d^n y(t)}{d t^n} = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{d^{n-1}}{d t^{n-1}} y(t) - \frac{a_{n-2}}{a_n} \frac{d^{n-2}}{d t^{n-2}} y(t) \dots - \frac{a_0}{a_n} y(t) + \frac{b_0}{a_n} f(t)$$

ή αντικαθιστώντας θα πάρουμε:

$$\frac{d x_1(t)}{d t} = \frac{d y(t)}{d t} = x_2(t)$$

$$\frac{d x_2(t)}{d t} = \frac{d^2 y(t)}{d t^2} = x_3(t)$$

.

.

.

$$\frac{d x_{n-1}(t)}{d t} = \frac{d y^{n-1}(t)}{d t^{n-1}} = x_n(t)$$

$$\frac{d x_n(t)}{d t} = \frac{d^n y(t)}{d t^n} = -\frac{a_{n-1}}{a_n} x_n(t) - \frac{a_{n-2}}{a_n} x_{n-1}(t) \dots - \frac{a_0}{a_n} x_1(t) + \frac{b_0}{a_n} f(t)$$

Σε μορφή πινάκων οι εξισώσεις καταστάσεως γράφονται:

$$\frac{d}{d t} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0/a_n & -a_1/a_n & \dots & \dots & -a_{n-1}/a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_0/a_n \end{bmatrix} \cdot f(t)$$

και οι εξισώσεις εξόδου:

$$y(t) = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

4.9.4) Εξισώσεις καταστάσεως σε ηλεκτρικά δίκτυα

Τα ηλεκτρικά δίκτυα, που αποτελούν μια κατηγορία συστημάτων, μπορούν να περιγραφούν με χρήση των εξισώσεων καταστάσεως.

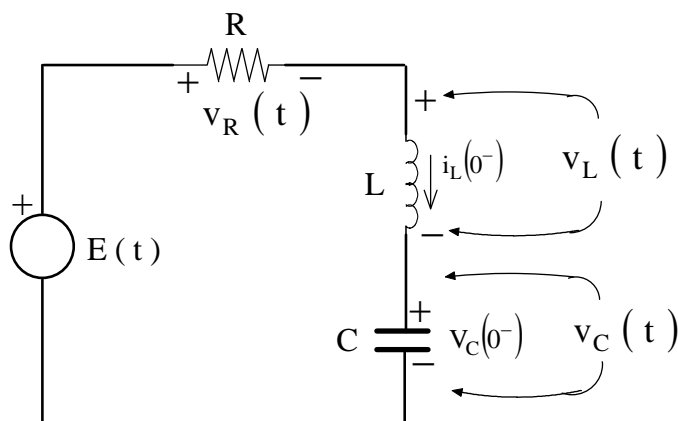
Ως μεταβλητές καταστάσεως εκλέγονται συνήθως τα ρεύματα των πηνίων και οι τάσεις των πυκνωτών και τούτο γιατί για τα μεγέθη αυτά δίδονται πάντοτε οι αρχικές καταστάσεις $i_L(0^-)$, $v_C(0^-)$. Οι αρχικές καταστάσεις είναι απαραίτητες όπως αναφέραμε για την επίλυση του διαφορικού συστήματος των εξισώσεων καταστάσεως. Εκλέγοντας λοιπόν τα $i_L(t)$, $v_C(t)$ ως μεταβλητές καταστάσεως έχουμε έτοιμες, από τα δεδομένα, τις αρχικές συνθήκες και δεν χρειάζεται να τις υπολογίσουμε

Η τάξη n ενός ηλεκτρικού δικτύου (δηλ η μέγιστη τάξη παραγώγου στη διαφορική εξίσωση που συνδέει είσοδο με έξοδο) είναι ίση με τον συνολικό αριθμό πηνίων και πυκνωτών που περιέχει το δίκτυο. Έτσι εξασφαλίζεται ότι ο αριθμός των μεταβλητών καταστάσεως που εκλέχθηκαν είναι ακριβώς ίσος με την τάξη του συστήματος.

Παρακάτω θα αναφέρουμε παραδείγματα γραφής των εξισώσεων καταστάσεως για ηλεκτρικά δίκτυα.

Παράδειγμα 1

Να γραφούν οι εξισώσεις καταστάσεως και οι εξισώσεις εξόδου για το παρακάτω δίκτυο R - L - C σειράς. Είσοδος του συστήματος θεωρείται η τάση της πηγής $E(t)$ και έξοδοι θεωρούνται οι τάσεις $v_R(t)$, $v_L(t)$, $v_C(t)$. Θεωρούνται γνωστές οι τιμές των R, L, C και $i_L(0^-)$, $v_C(0^-)$



Έχουμε: αριθμός εισόδων $k = 1$, αριθμός εξόδων $m = 3$, τάξη συστήματος $n = 2$.

Όπως προαναφέρθηκε εκλέγονται ως μεταβλητές καταστάσεως τα $i_L(t)$, $v_C(t)$.

Άρα:

Διάνυσμα καταστάσεως: $\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix}$, διάνυσμα εισόδου: $\hat{f}(t) = [E(t)]$,

διάνυσμα εξόδου: $\hat{y}(t) = \begin{bmatrix} v_R(t) \\ v_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix}$

Για να καταστρώσουμε τις εξισώσεις καταστάσεως προσπαθούμε να εκφράσουμε τις **πρώτες παραγώγους** των μεταβλητών καταστάσεως, $i_L(t)$ και $v_C(t)$ συναρτήσει των ίδιων των $i_L(t)$, $v_C(t)$ και ενδεχομένως της εισόδου $E(t)$.

Προφανώς θα ισχύει: $i_L(t) = i_R(t) = i_C(t)$

Γράφουμε τον Νόμο τάσεων Kirchhoff για τον μοναδικό βρόχο του δικτύου:

$$-E(t) + v_L(t) + v_R(t) + v_C(t) = 0$$

$$\text{ή} \quad -E(t) + L \frac{d i_L(t)}{d t} + R i_L(t) + v_C(t) = 0 \quad (1)$$

Επίσης η σχέση τάσεως- ρεύματος για τον πυκνωτή θα είναι κατά τα γνωστά

$$i_L(t) = i_C(t) = C \frac{d v_C(t)}{d t} \quad (2)$$

Παρατηρούμε ότι οι σχέσεις (1) και (2) με μια απλή ανακατάταξη μας δίνουν τις εξισώσεις καταστάσεως.

$$\text{Η σχέση (1) γράφεται:} \quad \frac{d i_L(t)}{d t} = -\frac{R}{L} i_L(t) - \frac{1}{L} v_C(t) + \frac{1}{L} E(t)$$

$$\text{και η σχέση (2):} \quad \frac{d v_C(t)}{d t} = \frac{1}{C} i_L(t)$$

ή σε μορφή πινάκων οι εξισώσεις καταστάσεως γράφονται:

$$\frac{d}{d t} \cdot \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} E(t) \quad (3)$$

$$\text{δηλ. ο πίνακας } \hat{A} \text{ (με διαστάσεις } 2 \times 2 \text{) θα είναι: } \hat{A} = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{και ο πίνακας } \hat{B} \text{ (με διαστάσεις } 2 \times 1 \text{) θα είναι: } \hat{B} = \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix}$$

Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε τις εξισώσεις εξόδου του συστήματος

Προσπαθούμε να εκφράσουμε τα 3 μεγέθη εξόδου $v_R(t)$, $v_L(t)$, $v_C(t)$ συναρτήσει των μεταβλητών καταστάσεως $i_L(t)$, $v_C(t)$ και ενδεχομένως της εισόδου $E(t)$.

$$\text{Παρατηρούμε ότι:} \quad v_R(t) = R i_L(t)$$

$$v_L(t) = -R i_L(t) - v_C(t) + E(t) \quad (\text{από τον Ν.Τ.Κ.})$$

$$\text{και} \quad v_C(t) = v_C(t)$$

Σε μορφή πινάκων οι εξισώσεις εξόδου θα είναι:

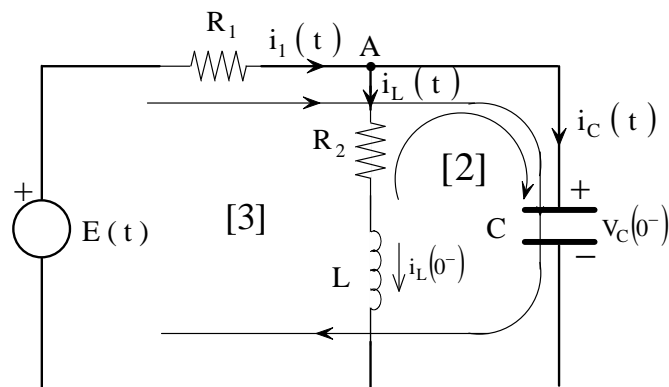
$$\begin{bmatrix} v_R(t) \\ v_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ -R & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot E(t)$$

δηλ. ο πίνακας \hat{C} (με διαστάσεις 3×2) θα είναι: $\hat{C} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ -R & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

και ο πίνακας \hat{D} (με διαστάσεις 3×1) θα είναι: $\hat{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Παράδειγμα 2

Δίδεται το ακόλουθο δίκτυο:



Θεωρούνται γνωστές οι τιμές των R_1 , R_2 , L , C και $i_L(0^-)$, $v_C(0^-)$

Είσοδος θεωρείται η τάση της πηγής $E(t)$ και έξοδος η τάση του πυκνωτή $v_C(t)$, δηλ. πρόκειται για σύστημα με μία είσοδο (άρα $k = 1$) και μία έξοδο (άρα $m = 1$).

Ζητείται να γραφούν οι εξισώσεις καταστάσεως και οι εξισώσεις εξόδου του δικτύου.

Η τάξη του συστήματος είναι $n = 2$ και σύμφωνα με τα προηγούμενα ως μεταβλητές καταστάσεως εκλέγονται τα μεγέθη $i_L(t)$, $v_C(t)$.

Ο νόμος τάσεων Kirchhoff στον βρόχο [2] δίνει:

$$v_C(t) - L \frac{di_L(t)}{dt} - R_2 i_L(t) = 0 \quad (1)$$

Παρατηρούμε ότι η σχέση (1) είναι ήδη μία από τις δύο εξισώσεις καταστάσεως διότι συνδέει την πρώτη παράγωγο του $i_L(t)$ με τα $i_L(t)$, $v_C(t)$.

Ο νόμος ρευμάτων Kirchhoff στον κόμβο (A) δίνει:

$$i_1(t) - i_L(t) - i_C(t) = 0$$

ή

$$i_1(t) - i_L(t) - C \frac{d v_C(t)}{d t} = 0 \quad (2)$$

και ο νόμος τάσεων Kirchhoff στον βρόχο [3] δίνει:

$$-E(t) + i_1(t) R_1 + v_C(t) = 0$$

ή

$$i_1(t) = \frac{1}{R_1} E(t) - \frac{1}{R_1} v_C(t) \quad (3)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2) και (3) παίρνουμε:

$$\frac{1}{R_1} E(t) - \frac{1}{R_1} v_C(t) - i_L(t) - C \frac{d v_C(t)}{d t} = 0 \quad (4)$$

Παρατηρούμε ότι η σχέση (4) είναι η δεύτερη από τις εξισώσεις καταστάσεως διότι συνδέει την πρώτη παράγωγο του $v_C(t)$ με τα $i_L(t)$, $v_C(t)$ και την είσοδο $E(t)$.

Αν ανακατατάξουμε τις εξισώσεις (1) και (4) θα πάρουμε τελικά τις εξισώσεις καταστάσεως του δικτύου:

$$\begin{aligned} \frac{d i_L(t)}{d t} &= -\frac{R_2}{L} i_L(t) + \frac{1}{L} v_C(t) \\ \frac{d v_C(t)}{d t} &= -\frac{1}{C} i_L(t) - \frac{1}{R_1 C} v_C(t) + \frac{1}{R_1 C} E(t) \end{aligned}$$

ή σε μορφή πινάκων:

$$\frac{d}{d t} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_2/L & 1/L \\ -1/C & -1/R_1 C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/R_1 C \end{bmatrix} E(t)$$

Οι εξισώσεις εξόδου θα είναι:

$$v_C(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΜΕΛΕΤΗ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ ΣΤΗΝ ΗΜΙΤΟΝΙΚΗ ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ

5.1) Γενικά για την Ημιτονική Μόνιμη Κατάσταση (Η.Μ.Κ.)

Η μελέτη ενός ηλεκτρικού δικτύου γίνεται πρώτιστα στο πεδίο του χρόνου. Όλα τα μεγέθη, με τα οποία περιγράφεται η συμπεριφορά του ηλεκτρικού δικτύου, (τάσεις, ρεύματα κ.λ.π.) εκφράζονται σαν συναρτήσεις του χρόνου. Οι συναρτήσεις αυτές δεν υφίστανται κανένα περιορισμό και μπορούν να έχουν οποιαδήποτε μορφή. Η μελέτη ενός ηλεκτρικού δικτύου στο πεδίο του χρόνου παρέχει μεγάλη φυσική εποπτεία.

Υπάρχει όμως και μία διαφορετική μέθοδος ανάλυσης δικτύων και συστημάτων στην οποία γίνεται η ακόλουθη παραδοχή:

Η χρονική εξάρτηση όλων των μεγεθών είναι, αποκλειστικά, της μορφής:

$$a(t) = A_m \sin(\omega t + \varphi)$$

όταν ισχύει η ειδική αυτή παραδοχή, τότε θεωρούμε ότι το δίκτυο βρίσκεται στην Ημιτονική Μόνιμη Κατάσταση (Η.Μ.Κ.)

Η ημιτονοειδής χρονική εξάρτηση όλων των τάσεων και των ρευμάτων ενός δικτύου μπορεί, αρχικά, να φαίνεται περιοριστική, λόγω όμως της μεγάλης σπουδαιότητας της ημιτονοειδούς συναρτήσεως στις πρακτικές εφαρμογές (π.χ. εναλλασσόμενο ρεύμα) καλύπτει ένα σημαντικότατο πεδίο μελέτης των ηλεκτρικών δικτύων και συστημάτων γενικότερα.

5.2) Παραστατικοί μιγαδικοί (phasors)

Με βάση την παραδοχή της ημιτονοειδούς χρονικής εξάρτησης έχει αναπτυχθεί μια μαθηματική μεθοδολογία η οποία μπορεί να περιγράψει με αρκετά απλό τρόπο την συμπεριφορά δικτύων και συστημάτων. Πρόκειται για την μεθοδολογία των παραστατικών μιγαδικών, η στροφέων, ή phasors.

Η ημιτονοειδής συνάρτηση:

$$a(t) = A_m \sin(\omega t + \varphi)$$

Μπορεί να παρασταθεί από τον στρεφόμενο μιγαδικό αριθμό:

$$\bar{A}(t) = A_m e^{j(\omega t + \varphi)} = A_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}$$

Ο $\bar{A}(t)$ αποκαλείται και στροφέας ή phasor και ισχύει $a(t) = \text{Im} \{ \bar{A}(t) \}$

Όπως εξηγήθηκε στην παράγραφο 1.2.2 στην έκφραση του $\bar{A}(t)$ είναι δυνατόν να απαλειφθεί ο όρος $e^{j\omega t}$ (χρονική εξάρτηση) και έτσι να προκύψει ο σταθερός μιγαδικός αριθμός:

$$\bar{A} = A_m e^{j\varphi}.$$

Αρα λοιπόν η ημιτονοειδής συνάρτηση $a(t) = A_m \sin(\omega t + \varphi)$ μπορεί, εξ ίσου, να παρασταθεί από τον σταθερό μιγαδικό αριθμό $\bar{A} = A_m e^{j\varphi}$ αντί του $\bar{A}(t) = A_m e^{j(\omega t + \varphi)}$.

Ο μιγαδικός $\bar{A} = A_m e^{j\varphi}$ συνηθίζεται να γράφεται και ως:

$$\bar{A} = \bar{A}(\omega) = A_m e^{j\varphi}$$

θεωρώντας βέβαια γνωστή την κυκλική συχνότητα ω στην οποία αναφερόμαστε.

Οι πράξεις μεταξύ ημιτονοειδών συναρτήσεων ανάγονται σε πράξεις μεταξύ μιγαδικών αριθμών. Έτσι πολύπλοκες τριγωνομετρικές εκφράσεις αντικαθίστανται από απλή μιγαδική άλγεβρα.

Αντίστροφα, όπως προαναφέρθηκε, αν είναι γνωστός ο $\bar{A} = A_m e^{j\varphi}$, και η κυκλική συχνότητα ω , τότε η ημιτονοειδής συνάρτηση $a(t)$ που περιγράφει ο \bar{A} , προκύπτει από τη σχέση:

$$a(t) = \text{Im} \{ \bar{A} e^{j\omega t} \} = \text{Im} \{ A_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} \} = A_m \sin(\omega t + \varphi)$$

Συνοψίζουμε εδώ όλα τα προηγούμενα:

α) Η μελέτη ενός δικτύου ή ενός συστήματος, στην Η.Μ.Κ. προϋποθέτει την παραδοχή ότι όλα τα δυναμικά μεγέθη (δηλ. τα μεγέθη που είναι συναρτήσεις του χρόνου) έχουν την μορφή $a(t) = A_m \sin(\omega t + \varphi)$

β) Για την μαθηματική περιγραφή του δικτύου ή του συστήματος χρησιμοποιείται η μεθοδολογία των παραστατικών μιγαδικών (phasors). Αυτό αποτελεί σημαντικό πλεονέκτημα.

γ) Είναι προφανές ότι κάνοντας την παραδοχή χρονικής εξάρτησης αποκλειστικά της μορφής $a(t) = A_m \sin(\omega t + \varphi)$ περιορίζεται σημαντικά το εύρος των δυνατών καταστάσεων που μπορούν να μελετηθούν.

Πιο συγκεκριμένα στην Η.Μ.Κ. δεν μπορούν να μελετηθούν μεταβατικά φαινόμενα αλλά μόνον η αποκριση μόνιμης κατάστασης του δικτύου ή του συστήματος.

δ) Είναι δυνατόν, με χρήση της ανάλυσης Fourier, να μελετηθούν και περιπτώσεις με χρονικές εξαρτήσεις μη ημιτονοειδείς αλλά πάντοτε στη μόνιμη κατάσταση (Αυτό θα γίνει καλλίτερα κατανοητό σε επόμενο κεφάλαιο)

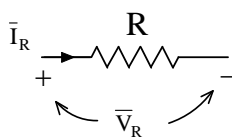
Αναφέρουμε τέλος ότι η γνώση μόνον της μόνιμης απόκρισης ενός δικτύου ή συστήματος είναι αρκετή σε πολλές περιπτώσεις εφαρμογών (π.χ. ανάλυση κυκλωμάτων εναλλασσομένου ρεύματος). Εκεί ακριβώς βρίσκεται και η μεγάλη αξία της μελέτης στην Η.Μ.Κ. λόγω και της μαθηματικής της απλότητας.

5. 3) Σχέσεις τάσεως ρεύματος των τριών βασικών ηλεκτρικών στοιχείων στην Η.Μ.Κ.

Παρακάτω διατυπώνονται για τα τρία βασικά ηλεκτρικά στοιχεία οι σχέσεις τάσεως – ρεύματος στην Η.Μ.Κ. Οι σχέσεις αυτές, όπως είναι φυσικό, προκύπτουν απ' ευθείας από τις αντίστοιχες σχέσεις που ισχύουν στο πεδίο του χρόνου, θέτοντας την βασική παραδοχή ότι όλα τα μεγέθη (τάσεις – ρεύματα) έχουν ημιτονοειδή μορφή.

5.3. 1) Ωμική αντίσταση R

Στο πεδίο του χρόνου: $V_R (t) = R i_R (t)$



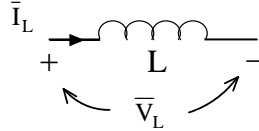
Θεωρούμε ότι $i_R (t) = I_{Rm} \sin (\omega t + \varphi)$ άρα ο phasor θα είναι $\bar{I}_R = I_{Rm} e^{j\varphi}$

και $V_R (t) = R i_R (t) = R I_{Rm} \sin (\omega t + \varphi)$ άρα ο phasor θα είναι

$$\bar{V}_R = R I_{Rm} e^{j\varphi} = R \bar{I}_R$$

5.3.2) Πηνίο με αυτεπαγωγή L

Στο πεδίο του χρόνου: $V_L(t) = L \frac{d i_L(t)}{d t}$



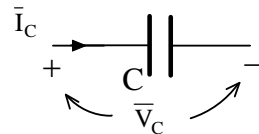
Θεωρούμε ότι $i_L(t) = I_{Lm} \sin(\omega t + \varphi)$ άρα ο phasor θα είναι $\bar{I}_L = I_{Lm} e^{j\varphi}$

και $V_L(t) = L \frac{d i_L(t)}{d t} = \omega L I_{Lm} \cos(\omega t + \varphi) = \omega L I_{Lm} \sin(\omega t + \varphi + \pi/2)$

άρα ο phasor θα είναι: $\bar{V}_L = \omega L I_{Lm} e^{j(\varphi + \pi/2)} = j \omega L I_{Lm} e^{j\varphi} = j \omega L \bar{I}_L$

5.3.3) Πυκνωτής με χωρητικότητα C

Στο πεδίο του χρόνου: $i_C(t) = C \frac{d V_C(t)}{d t}$



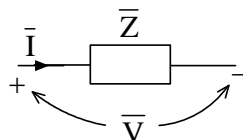
Θεωρούμε ότι $V_C(t) = V_{Cm} \sin(\omega t + \varphi)$ άρα ο phasor θα είναι $\bar{V}_C = V_{Cm} e^{j\varphi}$

και $i_C(t) = C \frac{d V_C(t)}{d t} = \omega C V_{Cm} \cos(\omega t + \varphi) = \omega C V_{Cm} \sin(\omega t + \varphi + \pi/2)$

άρα ο phasor θα είναι: $\bar{I}_C = \omega C V_{Cm} e^{j(\varphi + \pi/2)} = j \omega C V_{Cm} e^{j\varphi} = j \omega C \bar{V}_C$

5.4) Σύνθετη αντίσταση στην Η.Μ.Κ.

Ακριβώς όπως και στο πεδίο του χρόνου μπορούμε και στην Η.Μ.Κ. να σκεφτούμε έναν «γενικευμένο» νόμο του Ohm σύμφωνα με τον οποίο σε ένα ηλεκτρικό στοιχείο ορίζεται η γενικευμένη σύνθετη αντίσταση $\bar{Z}(j\omega)$ (ή και απλά $\bar{Z}(\omega)$)

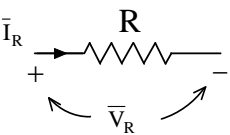
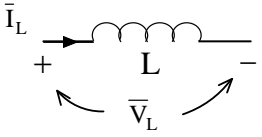
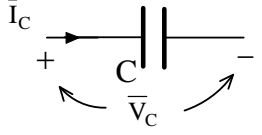


$$\bar{Z}(\omega) = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} \quad (\text{Ohm})$$

και η γενικευμένη σύνθετη αγωγιμότητα $\bar{Y}(\omega)$

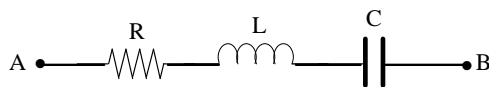
$$\bar{Y}(\omega) = \frac{1}{\bar{Z}(\omega)} = \frac{\bar{I}}{\bar{V}} \quad (\text{Ohm}^{-1})$$

Για τα τρία βασικά παθητικά ηλεκτρικά στοιχεία θα είναι:

<p>Ωμική αντίσταση R</p> 	$\bar{Z}_R(\omega) = \frac{\bar{V}_R}{\bar{I}_R} = R$	$\bar{Y}_R(\omega) = \frac{\bar{I}_R}{\bar{V}_R} = \frac{1}{R}$
<p>Πηνίο L</p> 	$\bar{Z}_L(\omega) = \frac{\bar{V}_L}{\bar{I}_L} = j\omega L$	$\bar{Y}_L(\omega) = \frac{\bar{I}_L}{\bar{V}_L} = \frac{1}{j\omega L}$
<p>Πυκνωτής C</p> 	$\bar{Z}_C(\omega) = \frac{\bar{V}_C}{\bar{I}_C} = \frac{1}{j\omega C}$	$\bar{Y}_C(\omega) = \frac{\bar{I}_C}{\bar{V}_C} = j\omega C$

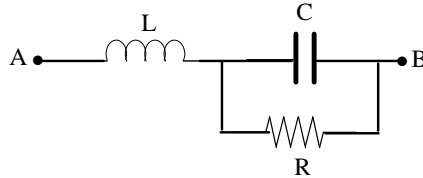
Αν θεωρήσουμε συνδεσμολογίες δύο ακροδεκτών **A-B**, αποτελούμενες από τα βασικά στοιχεία R, L, C μπορούμε να υπολογίσουμε την συνολική γενικευμένη σύνθετη αντίσταση $\bar{Z}(\omega)$. Ισχύουν και εδώ όλοι οι κανόνες σύνθεσης αντιστάσεων που είναι γνωστοί από τη στοιχειώδη θεωρία κυκλωμάτων. Παρακάτω αναφέρουμε δύο παραδείγματα:

α) Να βρεθεί η $\bar{Z}_{AB}(\omega)$



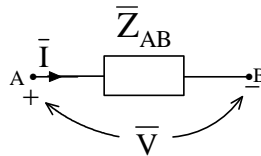
$$\bar{Z}_{AB}(\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

β) Να βρεθεί η $\bar{Z}_{AB}(\omega)$



$$\bar{Z}_{AB}(\omega) = j\omega L + \frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = j\omega L + \frac{\frac{R}{j\omega C}}{\frac{1 + j\omega RC}{j\omega C}} = j\omega L + \frac{R}{1 + j\omega RC}$$

Γενικά μπορούμε να γράψουμε:



$$\text{άν } \bar{V} = V_m e^{j\phi_v} \text{ και } \bar{I} = I_m e^{j\phi_i}$$

$$\text{Τότε } \bar{Z}_{AB} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{V_m}{I_m} e^{j(\phi_v - \phi_i)} = R_{AB} + jX_{AB}$$

Στην περίπτωση που το στοιχείο \bar{Z} αποτελείται μόνον από παθητικά στοιχεία R, L, C τότε το πραγματικό μέρος R_{AB} και το φανταστικό μέρος X_{AB} μπορούν να γραφούν σαν ρητές συναρτήσεις (πηλικά πολυωνύμων) του ω , δηλαδή:

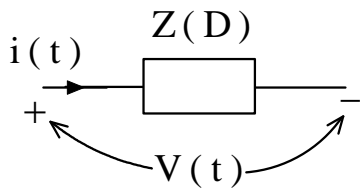
$$\bar{Z}_{AB} = \bar{Z}_{AB}(\omega) = R_{AB}(\omega) + jX_{AB}(\omega)$$

5.5) Ισχύς στην Η.Μ.Κ.

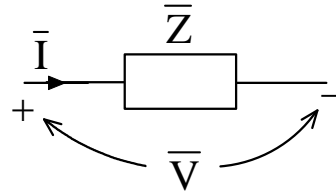
Όταν η τάση $V(t)$ και το ρεύμα $i(t)$ σε ένα ηλεκτρικό στοιχείο είναι ημιτονοειδούς μορφής τότε η στιγμιαία ισχύς $p(t) = V(t) i(t)$ θα μεταβάλλεται σύμφωνα με το τετράγωνο ημιτόνου. Η στιγμιαία ισχύς δεν έχει πρακτική αξία και έτσι χρησιμοποιείται η μέση τιμή της η οποία αποκαλείται μέση ισχύς ή ενεργός ισχύς ή πραγματική ισχύς. (και οι 3 αυτοί όροι σημαίνουν το ίδιο πράγμα)

Παρακάτω περιγράφεται το θέμα της ισχύος στην Η.Μ.Κ. αναλυτικά

Έστω ένα ηλεκτρικό στοιχείο:



Στο πεδίο του χρόνου



Στην Η.Μ.Κ.

Θεωρούμε κατά τα γνωστά:

$$V(t) = V_m \sin(\omega t + \phi_V) \quad \text{άρα} \quad \bar{V} = V_m e^{j\phi_V}$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \phi_I) \quad \text{άρα} \quad \bar{I} = I_m e^{j\phi_I}$$

Η μέση (ή ενεργός) ισχύς θα είναι:

$$P_\mu = P_{ev} = \int_0^T V(t) i(t) dt = \int_0^T p(t) dt = \int_0^T V_m \sin(\omega t + \phi_V) I_m \sin(\omega t + \phi_I) dt$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι το αποτέλεσμα του ολοκληρώματος αυτού είναι:

$$P_{ev} = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\phi_V - \phi_I)$$

αν χρησιμοποιήσουμε τις ενεργές τιμές των $V(t)$ και $i(t)$, $V_{ev} = V_m / \sqrt{2}$ και $I_{ev} = I_m / \sqrt{2}$ θα πάρουμε:

$$P_{ev} = V_{ev} I_{ev} \cos(\phi_V - \phi_I)$$

ορίζοντας την γωνία ϕ ως: $\phi = \phi_V - \phi_I$

θα έχουμε: $P_{ev} = V_{ev} I_{ev} \cos \phi$ (Watts)

Η ενεργός ισχύς $P_{\varepsilon v}$ που απορροφά ένα ηλεκτρικό στοιχείο είναι αυτή που τελικά μετατρέπεται σε ωφέλιμο έργο προς τον «εξωτερικό κόσμο» (θερμότητα, μηχανική ενέργεια κ.λ.π.)

Η τιμή του $\cos \varphi$ ονομάζεται **συντελεστής ισχύος**

Αντίστοιχα ορίζονται:

η άεργος ισχύς: $P_{\alpha} = V_{\varepsilon v} I_{\varepsilon v} \sin \varphi \quad (\text{VAR})$

και η φαινομένη ισχύς: $P_{\varphi} = \sqrt{P_{\varepsilon v}^2 + P_{\alpha}^2} = V_{\varepsilon v} I_{\varepsilon v} \quad (\text{VA})$

Μπορούμε να φτάσουμε στα ίδια συμπεράσματα ορίζοντας την λεγόμενη «μγαδική ισχύ» \bar{S} ως εξής:

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \bar{V} \cdot \bar{I}^* = \frac{1}{2} V_m I_m e^{j(\varphi_v - \varphi_i)} = V_{\varepsilon v} I_{\varepsilon v} e^{j\varphi} = V_{\varepsilon v} I_{\varepsilon v} \cos \varphi + j V_{\varepsilon v} I_{\varepsilon v} \sin \varphi = P_{\varepsilon v} + j P_{\alpha}$$

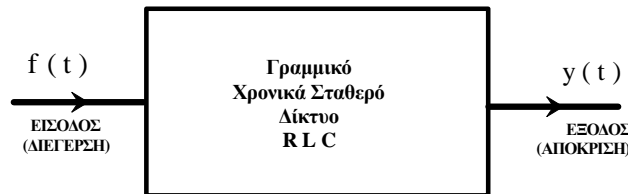
όπου: $P_{\varepsilon v} = V_{\varepsilon v} I_{\varepsilon v} \cos \varphi = \text{Re} \{ \bar{S} \}$ η ενεργός ισχύς σε Watt

$P_{\alpha} = V_{\varepsilon v} I_{\varepsilon v} \sin \varphi = \text{Im} \{ \bar{S} \}$ η άεργος ισχύς σε VAR

$P_{\varphi} = \sqrt{P_{\varepsilon v}^2 + P_{\alpha}^2} = | \bar{S} |$ η φαινομένη ισχύς σε VA

5. 6) Εύρεση της μόνιμης απόκρισης γραμμικού δικτύου σε ημιτονοειδή διεγέρση

Ένα γραμμικό ηλεκτρικό δίκτυο , ή σύστημα γενικότερα, θα περιγράφεται ως γνωστόν από την γραμμική Δ.Ε.



$$a_n D^n y(t) + a_{n-1} D^{n-1} y(t) + \dots + a_1 D y(t) + a_0 y(t) = \\ = b_m D^m f(t) + b_{m-1} D^{m-1} f(t) + \dots + b_1 D f(t) + b_0 f(t)$$

η οποία γράφεται και ως:

$$A(D) y(t) = B(D) f(t)$$

Θεωρούμε ως σήμα εισόδου την ημιτονοειδή συνάρτηση

$$f(t) = F_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

τότε είναι γνωστό από την θεωρία των διαφορικών εξισώσεων ότι η **μερική λύση** της ανωτέρω Δ.Ε. θα είναι της μορφής

$$y(t) = Y_0 \sin(\omega t + \theta)$$

δηλ. θα είναι μια ημιτονοειδής συνάρτηση με την **ίδια** κυκλική συχνότητα ω , αλλά διαφορετικό πλάτος και διαφορετική αρχική φάση. Η **μερική λύση εκφράζει την μόνιμη απόκριση του δικτύου** και μπορεί να υπολογιστεί κατά τα γνωστά όπως έχει αναφερθεί στο κεφάλαιο « Επίλυση γραμμικών Δ.Ε. ».

Θα δείξουμε εδώ και έναν άλλο, πιο εύκολο, τρόπο εύρεσης της μερικής λύσης (ή μόνιμης απόκρισης) $y(t)$, ο οποίος μάλιστα θα μας οδηγήσει σε μία πολύ βασική έννοια της θεωρίας συστημάτων, την έννοια της συναρτήσεως μεταφοράς.

Γράφουμε τις ημιτονοειδείς συναρτήσεις $f(t)$ και $y(t)$ κάνοντας χρήση των παραστατικών μιγαδικών τους (phasors) :

$$f(t) = \text{Im} \left\{ \bar{F} e^{j\omega t} \right\} \quad \text{όπου} \quad \bar{F} = F_0 e^{j\varphi}$$

$$y(t) = \text{Im} \left\{ \bar{Y} e^{j\omega t} \right\} \quad \text{όπου} \quad \bar{Y} = Y_0 e^{j\theta}$$

όπου προφανώς τα μεγέθη Y_0 και θ είναι άγνωστα.

Αντικαθιστούμε τις μιγαδικές εκφράσεις των $f(t)$ και $y(t)$ στην Δ.Ε. και έχουμε:

$$a_n D^n \operatorname{Im} \{ Y_0 e^{j\theta} e^{j\omega t} \} + a_{n-1} D^{n-1} \operatorname{Im} \{ Y_0 e^{j\theta} e^{j\omega t} \} + \dots + a_1 D \operatorname{Im} \{ Y_0 e^{j\theta} e^{j\omega t} \} + \\ + a_0 \operatorname{Im} \{ Y_0 e^{j\theta} e^{j\omega t} \} = b_m D^m \operatorname{Im} \{ F_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t} \} + b_{m-1} D^{m-1} \operatorname{Im} \{ F_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t} \} + \\ + \dots + b_1 D \operatorname{Im} \{ F_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t} \} + b_0 \operatorname{Im} \{ F_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t} \}$$

περνώντας τους τελεστές των παραγώγων μέσα στις εκφράσεις των $\operatorname{Im} \{ \dots \}$ η ανωτέρω σχέση γράφεται και ως εξής:

$$\operatorname{Im} \{ a_n D^n Y_0 e^{j\theta} e^{j\omega t} \} + \operatorname{Im} \{ a_{n-1} D^{n-1} Y_0 e^{j\theta} e^{j\omega t} \} + \dots + \operatorname{Im} \{ a_1 D Y_0 e^{j\theta} e^{j\omega t} \} + \\ + \operatorname{Im} \{ a_0 Y_0 e^{j\theta} e^{j\omega t} \} = \operatorname{Im} \{ b_m D^m F_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t} \} + \operatorname{Im} \{ b_{m-1} D^{m-1} F_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t} \} + \\ + \dots + D \operatorname{Im} \{ b_1 F_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t} \} + \operatorname{Im} \{ b_0 F_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t} \}$$

Παρατηρούμε ότι γενικά σε ένα όρο της μορφής:

$$a_k D^k Y_0 e^{j\theta} e^{j\omega t}$$

i) Το μέγεθος $Y_0 e^{j\theta}$ είναι σταθερό, ανεξάρτητο του χρόνου, άρα εξέρχεται της παραγωγίσεως

ii) Η παράγωγος $D^k e^{j\omega t} = (j\omega)^k e^{j\omega t}$

συνεπώς η Δ.Ε. γράφεται τώρα:

$$\operatorname{Im} \{ a_n Y_0 e^{j\theta} (j\omega)^n e^{j\omega t} \} + \operatorname{Im} \{ a_{n-1} Y_0 e^{j\theta} (j\omega)^{n-1} e^{j\omega t} \} + \dots + \operatorname{Im} \{ a_1 Y_0 e^{j\theta} (j\omega) \\ e^{j\omega t} \} + \operatorname{Im} \{ a_0 Y_0 e^{j\theta} e^{j\omega t} \} = \operatorname{Im} \{ b_m F_0 e^{j\varphi} (j\omega)^m e^{j\omega t} \} + \operatorname{Im} \{ b_{m-1} F_0 e^{j\varphi} (j\omega)^{m-1} \\ e^{j\omega t} \} + \dots + \operatorname{Im} \{ b_1 F_0 e^{j\varphi} (j\omega) e^{j\omega t} \} + \operatorname{Im} \{ b_0 F_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t} \}$$

και επειδή για τον «τελεστή» $\operatorname{Im} \{ \dots \}$ ισχύει η γραμμικότητα δηλαδή

$$\operatorname{Im} \{ \bar{z}_1 \} + \operatorname{Im} \{ \bar{z}_2 \} = \operatorname{Im} \{ \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \}$$

θα πάρουμε τελικά:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \{ a_n Y_0 e^{j\theta} (j\omega)^n e^{j\omega t} + a_{n-1} Y_0 e^{j\theta} (j\omega)^{n-1} e^{j\omega t} + \dots + a_1 Y_0 e^{j\theta} (j\omega) e^{j\omega t} + \\ + a_0 Y_0 e^{j\theta} e^{j\omega t} \} = \operatorname{Im} \{ b_m F_0 e^{j\varphi} (j\omega)^m e^{j\omega t} + b_{m-1} F_0 e^{j\varphi} (j\omega)^{m-1} e^{j\omega t} + \dots \\ + b_1 F_0 e^{j\varphi} (j\omega) e^{j\omega t} + b_0 F_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t} \} \end{aligned}$$

βγάζοντας τους κοινούς παράγοντες

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \{ Y_0 e^{j\theta} e^{j\omega t} [a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0] \} = \\ = \operatorname{Im} \{ F_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t} [b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 (j\omega) + b_0] \} \end{aligned}$$

$$\text{ή} \quad \operatorname{Im} \{ Y_0 e^{j\theta} e^{j\omega t} A(j\omega) \} = \operatorname{Im} \{ F_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t} B(j\omega) \}$$

(δηλ στα πολυώνυμα $A(D)$ και $B(D)$ θέτουμε όπου D το $j\omega$)

η τελευταία έκφραση $\operatorname{Im} \{ Y_0 e^{j\theta} e^{j\omega t} A(j\omega) \} = \operatorname{Im} \{ F_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t} B(j\omega) \}$ ισχύει προφανώς για κάθε t .

Στο σημείο αυτό θεωρούμε ότι το γινόμενο $Y_0 e^{j\theta} A(j\omega)$ (ανεξάρτητο του χρόνου t) γράφεται γενικά

$$Y_0 e^{j\theta} A(j\omega) = s_1 + j s_2$$

και επίσης το γινόμενο $F_0 e^{j\varphi} B(j\omega)$ γράφεται

$$F_0 e^{j\varphi} B(j\omega) = p_1 + j p_2$$

$$\text{άρα η ισότητα} \quad \operatorname{Im} \{ Y_0 e^{j\theta} e^{j\omega t} A(j\omega) \} = \operatorname{Im} \{ F_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t} B(j\omega) \}$$

$$\text{γράφεται:} \quad \operatorname{Im} \{ e^{j\omega t} (s_1 + j s_2) \} = \operatorname{Im} \{ e^{j\omega t} (p_1 + j p_2) \}$$

$$\text{ή} \quad \operatorname{Im} \{ (s_1 + j s_2) (\cos \omega t + j \sin \omega t) \} = \operatorname{Im} \{ (p_1 + j p_2) (\cos \omega t + j \sin \omega t) \}$$

μετά από απλές, αλγεβρικές πράξεις θα πάρουμε:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \{ s_1 \cos \omega t + j s_1 \sin \omega t + j s_2 \cos \omega t - s_2 \sin \omega t \} = \\ = \operatorname{Im} \{ p_1 \cos \omega t + j p_1 \sin \omega t + j p_2 \cos \omega t - p_2 \sin \omega t \} \end{aligned}$$

εξισώνοντας τα φανταστικά μέρη των δύο μιγαδικών ποσοτήτων καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ισχύει:

$$s_1 \sin \omega t + s_2 \cos \omega t = p_1 \sin \omega t + p_2 \cos \omega t \quad \text{για κάθε } t$$

η ανωτέρω σχέση γράφεται:

$$(s_1 - p_1) \sin \omega t + (s_2 - p_2) \cos \omega t = 0 \quad \text{για κάθε } t$$

επειδή όμως οι συναρτήσεις $\sin \omega t$ και $\cos \omega t$ είναι **γραμμικά ανεξάρτητες** θα ισχύει:

$$(s_1 - p_1) = 0 \quad \text{άρα} \quad s_1 = p_1$$

και $(s_2 - p_2) = 0 \quad \text{άρα} \quad s_2 = p_2$

από τις δύο τελευταίες ισότητες προκύπτει ότι:

$$s_1 + j s_2 = p_1 + j p_2$$

άρα και $Y_0 e^{j\theta} A(j\omega) = F_0 e^{j\varphi} B(j\omega)$

δηλαδή $\bar{Y} A(j\omega) = \bar{F} B(j\omega)$

ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε:

$$\bar{Y}(\omega) A(j\omega) = \bar{F}(\omega) B(j\omega)$$

Το τελικό λοιπόν συμπέρασμα είναι ότι ο παραστατικός μιγαδικός $\bar{Y} = Y_0 e^{j\theta}$ (phasor) της άγνωστης συνάρτησης $y(t)$ υπολογίζεται από την απλή σχέση:

$$\boxed{\bar{Y}(\omega) = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} \bar{F}(\omega)}$$

Δηλαδή στην αρχική διαφορική σχέση $A(D)y(t) = B(D)f(t)$ η οποία ισχύει στο πεδίο του χρόνου, στη θέση των $y(t)$ και $f(t)$ θέτουμε τους αντίστοιχους παραστατικούς μιγαδικούς $\bar{Y}(\omega)$ και $\bar{F}(\omega)$, αντίστοιχα και επίσης :

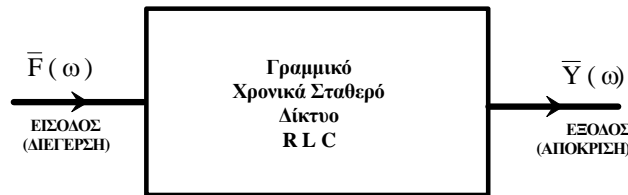
- Τα πολώνυμα του τελεστή D , $A(D)$ και $B(D)$ μετατρέπονται σε πολώνυμα του παράγοντα $j\omega$, θέτοντας απλώς όπου D το $j\omega$

5.7) Η συνάρτηση μεταφοράς

Με βάση την προηγούμενη ανάλυση οδηγούμαστε σε μία πολύ σημαντική έννοια της θεωρίας δικτύων και συστημάτων γενικότερα. Πρόκειται για την έννοια της συναρτήσεως μεταφοράς.

Ας θεωρήσουμε και πάλι ένα γραμμικό και χρονικά σταθερό δίκτυο, στην Η.Μ.Κ.

Για ένα δίκτυο ή σύστημα που ευρίσκεται στην Η.Μ.Κ. μπορούμε να πούμε ότι ευρίσκεται και στο Πεδίο της Συχνότητας (σε αντίθεση με το γνωστό μας Πεδίο του Χρόνου)



Είδαμε στα προηγούμενα ότι , σε ημιτονοειδή διέγερση, η **απόκριση μόνιμης κατάστασης** του δικτύου δίνεται από την σχέση:

$$\bar{Y} = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} \bar{F}$$

Αν θεωρήσουμε το πηλίκο $\frac{\text{αποκριση}}{\text{διεγερση}}$, στο πεδίο της συχνότητας, και θέσουμε τους

αντίστοιχους παραστατικούς μιγαδικούς της διέγερσης και της απόκρισης θα προκύψει:

$$\frac{\bar{Y}}{\bar{F}} = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)}$$

Η μιγαδική συνάρτηση του $j\omega$

$$H(j\omega) = \frac{\bar{Y}}{\bar{F}} = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)}$$

λέγεται **συνάρτηση μεταφοράς** του δικτύου (ή συστήματος γενικότερα) , με θεωρούμενη διέγερση (είσοδο) την \bar{F} και απόκριση (έξοδο) την \bar{Y} . Η συνάρτηση μεταφοράς ορίζεται **μόνον** στο πεδίο της συχνότητας, και όπως παρατηρούμε ο παραστατικός μιγαδικός της απόκρισης του συστήματος (πάντα στη μόνιμη κατάσταση!) δίνεται από ένα απλό γινόμενο μεταξύ της συναρτήσεως μεταφοράς και του παραστατικού μιγαδικού της διέγερσης.

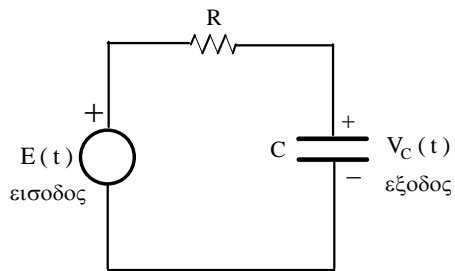
$$\bar{Y} = H(j\omega) \bar{F}$$

Πρέπει να τονιστεί ότι η συνάρτηση μεταφοράς ενός δικτύου **δεν εξαρτάται** από τα μεγέθη \bar{F} και \bar{Y} αλλά μόνον από την εσωτερική δομή του δικτύου

5.8) Παραδείγματα

Παράδειγμα 1)

Στα παρακάτω δίκτυα να βρεθούν οι συναρτήσεις μεταφοράς



Λύση:

Στο πεδίο της συχνότητας θα ισχύει:

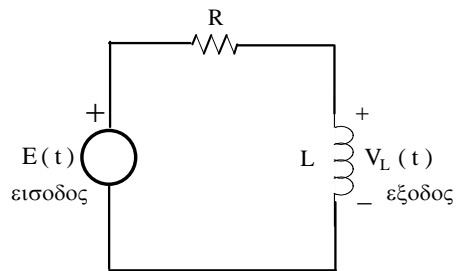
$$\bar{V}_C = \bar{E} \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$

άρα:

$$H(j\omega) = \frac{\bar{V}_C}{\bar{E}} = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$

και τελικά

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega RC + 1}$$



Λύση:

Στο πεδίο της συχνότητας θα ισχύει:

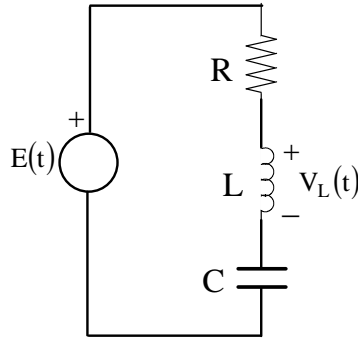
$$\bar{V}_L = \bar{E} \frac{j\omega L}{R + j\omega L}$$

άρα:

$$H(j\omega) = \frac{\bar{V}_L}{\bar{E}} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L}$$

Παράδειγμα 2)

Στο παρακάτω δίκτυο είσοδος θεωρείται η τάση της πηγής $E(t)$ και έξοδος η τάση του πηνίου $V_L(t)$. Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς.

**Λύση**

Θεωρούμε ότι το δίκτυο βρίσκεται στο πεδίο της συχνότητας. Για να βρούμε την σχέση μεταξύ των τάσεων \bar{E} και \bar{V}_L , μπορούμε π.χ. να εφαρμόσουμε τον κανόνα του διαιρέτη τάσεως:

$$\bar{V}_L = \bar{E} \frac{j\omega L}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$$

πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή επί $j\omega C$ παίρνουμε

$$\bar{V}_L = \bar{E} \frac{-\omega^2 LC}{j\omega RC - \omega^2 LC + 1}$$

άρα η ζητούμενη συνάρτηση μεταφοράς θα είναι:

$$H(j\omega) = \frac{\bar{V}_L}{\bar{E}} = \frac{-\omega^2 LC}{j\omega RC - \omega^2 LC + 1}$$

Αν θεωρήσουμε μοναδιαίες τιμές στοιχείων $R = 1 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$, $C = 1 \text{ F}$ η συνάρτηση μεταφοράς γράφεται:

$$H(j\omega) = \frac{-\omega^2}{1 - \omega^2 + j\omega}$$

Σε ένα σήμα εισόδου $E(t) = 4 \sin(5t + 32^\circ)$ με παραστατικό μιγαδικό $\bar{E} = 4 e^{j32^\circ}$ ($\omega = 5 \text{ r/s}$) θα πάρουμε μόνιμη απόκριση με παραστατικό μιγαδικό \bar{V}_L όπου:

$$\bar{V}_L = H(j\omega) \bar{E} = H(j5) \bar{E}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς $H(j\omega)$, για $\omega = 5 \text{ rad/sec}$ παίρνει τιμή $H(j5)$ ή πιο απλά $H(5)$ όπου:

$$H(5) = \frac{-5^2}{1-5^2 + j5} = \frac{-25}{-24 + j5} = (0.998 + j0.208) = 1.019 e^{j11.8^\circ}$$

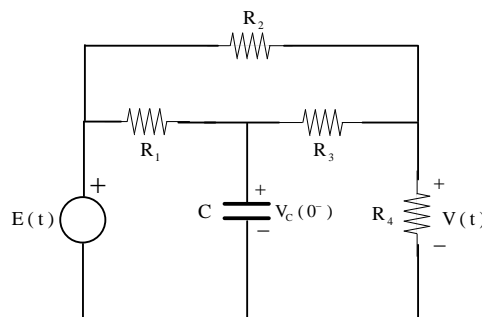
άρα
$$\bar{V}_L = H(j5) \bar{E} = 1.019 e^{j11.8^\circ} \cdot 4 e^{j32^\circ} = 4.076 e^{j43.8^\circ}$$

και η απόκριση στο πεδίο του χρόνου θα γράφεται:

$$V_L(t) = 4.076 \sin(5t + 43.8^\circ)$$

Παράδειγμα 3)

Στο παρακάτω δίκτυο είσοδος θεωρείται η τάση της πηγής $E(t)$ και έξοδος η τάση $V(t)$. Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς.



Λύση:

Για το εικονιζόμενο δίκτυο έχει βρεθεί η Δ.Ε. που συνδέει διέγερση με απόκριση στο εδάφιο 4.8 σελ 119

Επαναλαμβάνουμε εδώ την Δ.Ε.

$$[CD(R_1R_2R_3 + R_1R_2R_4 + R_1R_3R_4) + R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_4 + R_2R_4 + R_3R_4] V(t) = [R_1R_3R_4CD + R_1R_4 + R_2R_4 + R_3R_4] E(t)$$

Επομένως αντικαθιστώντας το σύμβολο D με το $j\omega$ και τα μεγέθη $E(t)$, $V(t)$ με τους αντίστοιχους παραστατικούς μιγαδικούς \bar{E} και \bar{V} , προκύπτει αμέσως η συνάρτηση μεταφοράς

$$H(j\omega) = \frac{\bar{V}}{\bar{E}} = \frac{j\omega R_1R_3R_4 + R_1R_4 + R_2R_4 + R_3R_4}{j\omega(R_1R_2R_3 + R_1R_2R_4 + R_1R_3R_4) + R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_4 + R_2R_4 + R_3R_4}$$

Αν θεωρήσουμε και πάλι μοναδιαίες τιμές στοιχείων $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 1 \Omega$ και $C = 1 F$ η συνάρτηση μεταφοράς θα γράφεται:

$$H(j\omega) = \frac{\bar{V}}{\bar{E}} = \frac{j\omega + 3}{j3\omega + 5}$$

Σε ένα σήμα εισόδου $E(t) = 3\sin(2t)$, με παραστατικό μιγαδικό $\bar{E} = 3e^{j0} = 3$, θα πάρουμε απόκριση με παραστατικό μιγαδικό $\bar{V} = H(j\omega)\bar{E} = H(j2)\bar{E}$

οπou:

$$H(j2) = \frac{j2 + 3}{j6 + 5} = \frac{3.606 e^{j33.7^\circ}}{7.810 e^{j50.2^\circ}} = 0.462 e^{-j16.5^\circ}$$

άρα:

$$\bar{V} = H(j2)\bar{E} = 0.462 e^{-j16.5^\circ} \cdot 3 = 1.386 e^{-j16.5^\circ}$$

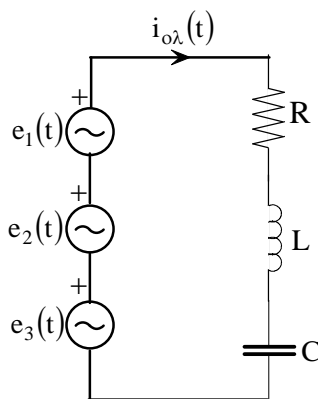
και στο πεδίο του χρόνου:

$$V(t) = 1.386 \sin(2t - 16.5^\circ)$$

Παράδειγμα 4) (Θεώρημα επαλληλίας στην Η.Μ.Κ.)

Στο παράδειγμα αυτό θα ασχοληθούμε με το βασικό αυτό θεώρημα της θεωρίας κυκλωμάτων, και τον τρόπο εφαρμογής του στην Η.Μ.Κ., χρησιμοποιώντας ένα απλό παράδειγμα

Έστω το ακόλουθο ηλεκτρικό δίκτυο:



Οι τιμές των στοιχείων είναι: $R = 10 \Omega$, $L = 50 \text{ mH}$, $C = 400 \mu\text{F}$

και οι τάσεις των πηγών: $e_1(t) = 20 \sin(100t) \text{ V}$, $e_2(t) = 15 \sin(200t) \text{ V}$, $e_3(t) = 8 \sin(300t) \text{ V}$

Να υπολογιστεί το ρεύμα $i_{\text{ολ}}(t)$.

Λύση:

Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα της επαλληλίας, δηλ. θα επιλύσουμε το δίκτυο 3 φορές, με μία πηγή να λειτουργεί κάθε φορά, και στο τέλος θα προσθέσουμε τα αποτελέσματα.

ΠΡΟΣΟΧΗ! Η επίλυση του δικτύου θα γίνει με την μέθοδο των παραστατικών μιγαδικών (phasors) και ως γνωστόν δεν επιτρέπεται η τελική πρόσθεση των αποτελεσμάτων να γίνει στο μιγαδικό πεδίο, αλλά στο πεδίο του χρόνου.

Οι αντίστοιχοι phasors των πηγών θα είναι:

$$e_1(t) = 20 \sin(100t) \text{ V}, \text{ αρα } \bar{E}_1 = 20 \text{ V} \quad \omega_1 = 100 \text{ rad/sec}$$

$$e_2(t) = 15 \sin(200t) \text{ V}, \text{ αρα } \bar{E}_2 = 15 \text{ V} \quad \omega_2 = 200 \text{ rad/sec}$$

$$e_3(t) = 8 \sin(300t) \text{ V}, \text{ αρα } \bar{E}_3 = 8 \text{ V} \quad \omega_3 = 300 \text{ rad/sec}$$

και $\bar{I}_i = \frac{\bar{E}_i}{\bar{Z}_{ολ}(\omega_i)}$ όπου $\bar{Z}_{ολ}(\omega_i) = R + j\omega_i L - \frac{j}{\omega_i C}$ με $i = 1, 2, 3$

κάνοντας τους αριθμητικούς υπολογισμούς θα πάρουμε:

$$\bar{Z}_{ολ}(\omega_1) = 22.36 \angle -63.4^\circ \Omega \quad \text{και} \quad \bar{I}_1 = 0.894 \angle 63.4^\circ \text{ A}$$

$$\bar{Z}_{ολ}(\omega_2) = 10.31 \angle -14.0^\circ \Omega \quad \text{και} \quad \bar{I}_2 = 1.455 \angle 14.0^\circ \text{ A}$$

$$\bar{Z}_{ολ}(\omega_3) = 12.02 \angle 33.7^\circ \Omega \quad \text{και} \quad \bar{I}_3 = 0.665 \angle -33.7^\circ \text{ A}$$

και τελικά στο πεδίο του χρόνου:

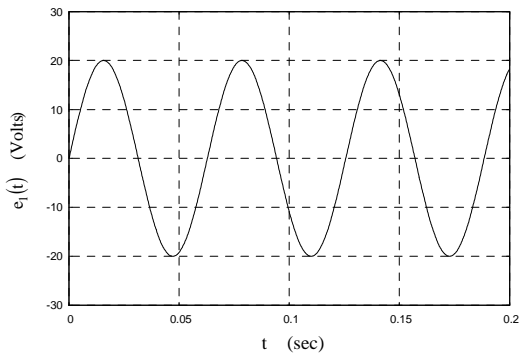
$$i_1(t) = 0.894 \sin(100t + 63.4^\circ) \text{ A}$$

$$i_2(t) = 1.455 \sin(200t + 14.0^\circ) \text{ A}$$

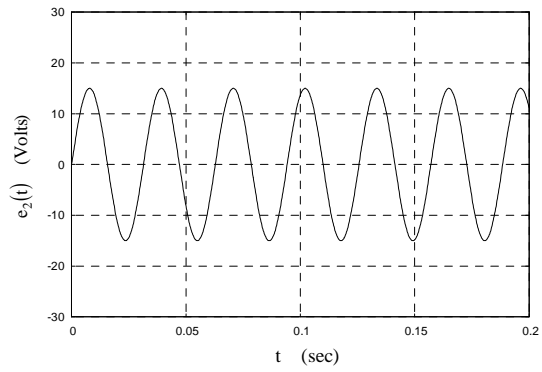
$$i_3(t) = 0.665 \sin(300t - 33.7^\circ) \text{ A}$$

το ρεύμα $i_{ολ}(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t)$ προφανώς είναι μη ημιτονοειδές

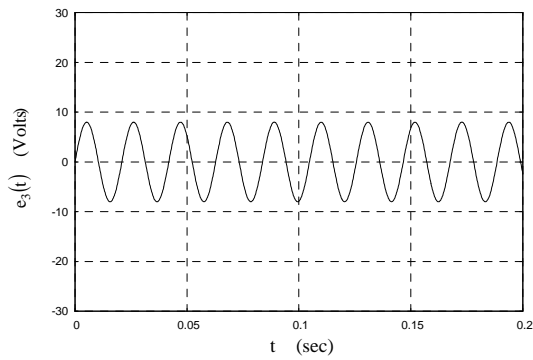
Παρακάτω δείχνουμε τις γραφικές παραστάσεις όλων των μεγεθών που σχετίζονται με το πρόβλημα



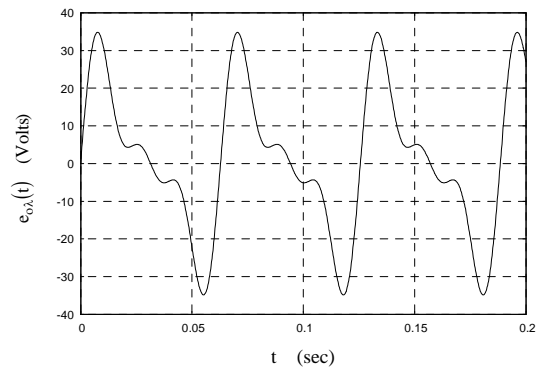
Η τάση της πηγής $e_1(t)$



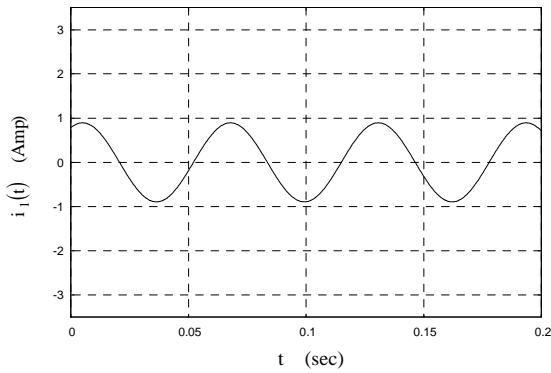
Η τάση της πηγής $e_2(t)$



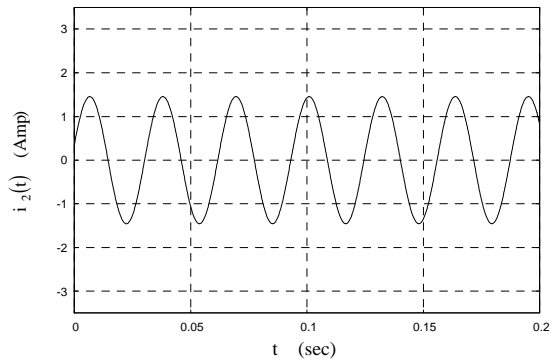
Η τάση της πηγής $e_3(t)$



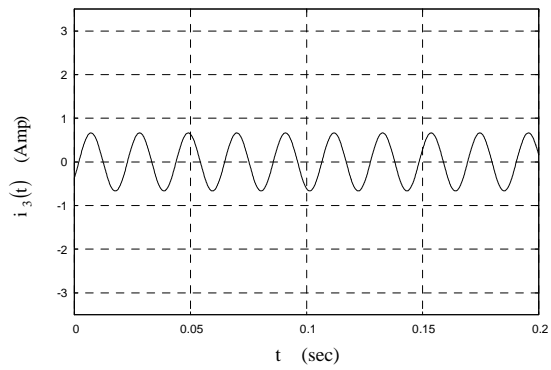
Η τάση $e_{ολ}(t) = e_1(t) + e_2(t) + e_3(t)$



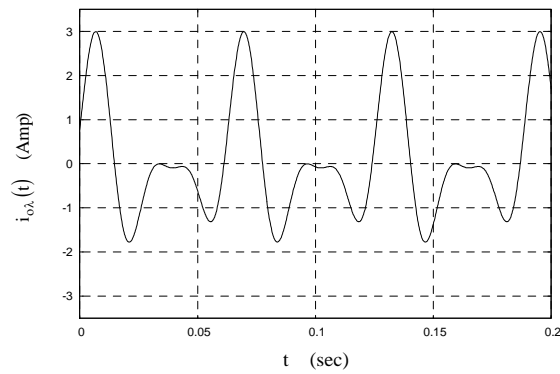
Ρεύμα $i_1(t)$ (δρά μόνον η πηγή $e_1(t)$)



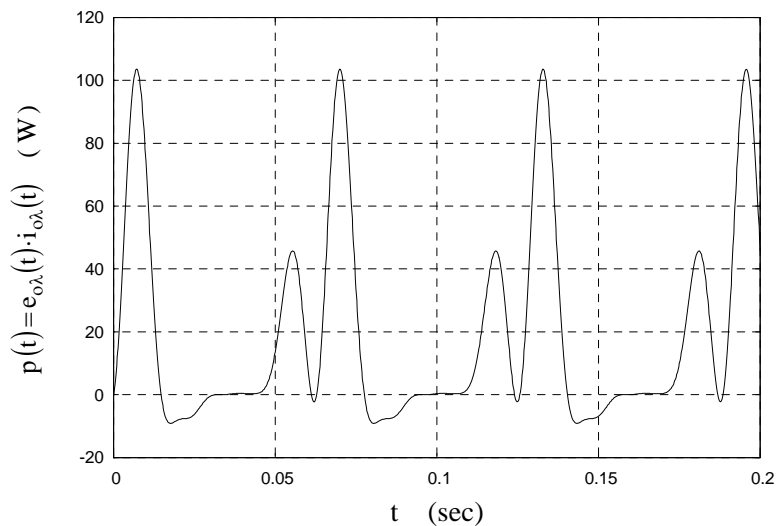
Ρεύμα $i_2(t)$ (δρά μόνον η πηγή $e_2(t)$)



Ρεύμα $i_3(t)$ (δρά μόνον η πηγή $e_3(t)$)



Ρεύμα $i_{ολ}(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t)$
είναι μη ημιτονοειδές



Η στιγμιαία ισχύς $p(t) = e_{ολ}(t) i_{ολ}(t)$ που απορροφά η συνδεσμολογία RLC. Παρατηρήστε ότι παίρνει και αρνητικές τιμές

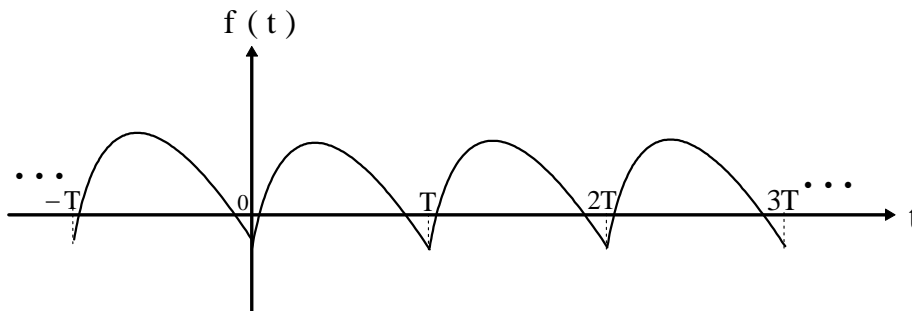
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΑΝΑΛΥΣΗ FOURIER ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ

6. 1) Ανάλυση Fourier περιοδικών συναρτήσεων

6. 1. 1) Εισαγωγικά

Έστω μία περιοδική συνάρτηση του χρόνου $f(t)$, την οποία μπορούμε να αποκαλούμε και «σήμα». Η συνάρτηση $f(t)$ ορίζεται από το $-\infty$ έως το $+\infty$. Η περίοδος της $f(t)$ είναι ίση με T και ισχύει $f(t) = f(t + T)$.



Εάν η συνάρτηση $f(t)$ πληροί κάποιες προϋποθέσεις, που δεν θα αναφερθούν εδώ και θα θεωρηθεί ότι ισχύουν πάντοτε, τότε είναι δυνατόν η $f(t)$ να αναλυθεί σε ένα **άπειρο άθροισμα γραμμικά ανεξαρτήτων συναρτήσεων**. Διαφορετικά, μπορούμε να πούμε ότι η $f(t)$ μπορεί να γραφεί στη μορφή μια **σειράς συναρτήσεων** η οποία θα συγκλίνει για κάθε t .

6. 1. 2) Σειρά Fourier - τριγωνομετρικές μορφές A και B

Όταν οι όροι της σειράς, στην οποία αναπτύσσεται η περιοδική συνάρτηση $f(t)$, είναι ημιτονοειδείς και συνημιτονοειδείς συναρτήσεις, τότε η σειρά αυτή ονομάζεται σειρά Fourier. Οι ημιτονοειδείς και συνημιτονοειδείς συναρτήσεις έχουν κυκλικές συχνότητες που είναι **ακέραια πολλαπλάσια μιας βασικής κυκλικής συχνότητας ω_1** . Η ω_1 δίνεται από την σχέση

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}, \text{ όπου } T \text{ η περίοδος της } f(t)$$

Το ανάπτυγμα της $f(t)$ θα γράφεται ως εξής:

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \sin(n\omega_1 t) + b_n \cos(n\omega_1 t)] \quad (6.1)$$

όπου $n = 1, 2, \dots$ (δείκτης)

a_n, b_n συντελεστές εξαρτώμενοι από τον δείκτη n , αλλά όχι από τον χρόνο t

$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, όπου T η περίοδος της $f(t)$, η βασική (ή θεμελιώδης) κυκλική συχνότητα

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad \text{η μέση τιμή της } f(t)$$

Το ανωτέρω ανάπτυγμα μιας περιοδικής συναρτήσεως $f(t)$ σε ημιτονοειδείς και συνημιτονοειδείς συναρτήσεις αποκαλείται, όπως προαναφέρθηκε, **ανάπτυγμα Fourier**.

Οι συντελεστές a_n και b_n , του αναπτύγματος Fourier, δίνονται από τους τύπους:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega_1 t) dt \quad (6.2) \quad \text{και} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega_1 t) dt \quad (6.3)$$

οι τύποι αυτοί όπως και ο τύπος που δίνει το c_0 , αποδεικνύονται εύκολα με χρήση των παρακάτω ολοκληρωμάτων:

$$\int_0^T \sin(n\omega t) dt = 0, \quad \int_0^T \cos(n\omega t) dt = 0 \quad \text{όπου } n \text{ ακέραιος και } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\int_0^T \sin(n\omega t) \cos(k\omega t) dt = 0 \quad \text{ανεξάρτητα από τις τιμές των } k, n$$

$$\int_0^T \sin(n\omega t) \sin(k\omega t) dt = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ T/2 & k = n \end{cases} \quad \text{και} \quad \int_0^T \cos(n\omega t) \cos(k\omega t) dt = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ T/2 & k = n \end{cases}$$

Αν πολλαπλασιάσουμε το ανάπτυγμα (6.1) επί $\sin(n\omega_1 t)$ και επί $\cos(n\omega_1 t)$ διαδοχικά, και ολοκληρώσουμε τα γινόμενα από 0 έως T , θα προκύψουν αμέσως οι τύποι (6.2) και (6.3). Η σχετική διαδικασία αφήνεται ως άσκηση.

Σχετικά με το ανάπτυγμα Fourier κάνουμε τις εξής παρατηρήσεις:

α) Οι συναρτήσεις $a_n \sin(n\omega_1 t)$ και $b_n \cos(n\omega_1 t)$, όπως είναι γνωστό, είναι σε κάθε περίπτωση γραμμικά ανεξάρτητες.

β) Η μέση τιμή του αθροίσματος $\sum_{n=1}^{\infty} [a_n \sin(n\omega_1 t) + b_n \cos(n\omega_1 t)]$ είναι προφανώς μηδέν. Έτσι γίνεται αντιληπτός ο λόγος της ύπαρξης του όρου c_0 στο ανάπτυγμα, διότι η μέση τιμή της $f(t)$ δεν είναι αναγκαστικά μηδέν.

Παρακάτω θα διατυπώσουμε και μια δεύτερη, ισοδύναμη, μορφή του αναπτύγματος σε σειρά Fourier μιας περιοδικής συναρτήσεως.

Είναι γνωστή η τριγωνομετρική ταυτότητα:

$$a_n \sin(n\omega_1 t) + b_n \cos(n\omega_1 t) = c_n \sin(n\omega_1 t + \varphi_n)$$

όπου: $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ και $\varphi_n = \tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$

(Προσοχή χρειάζεται στον σωστό υπολογισμό της γωνίας $\varphi_n = \tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$ ανάλογα με τα πρόσημα των a_n και b_n)

Επομένως το ανάπτυγμα Fourier της $f(t)$ γράφεται ισοδύναμα και με τη μορφή:

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\omega_1 t + \varphi_n) \quad (6.4)$$

Η ανωτέρω μορφή είναι πιά εύχρηστη για την περιγραφή ενός σήματος και για το λόγο αυτό χρησιμοποιείται περισσότερο

(Παρατήρηση : αντί για την έκφραση $f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\omega_1 t + \varphi_n)$ θα μπορούσαμε επίσης να είχαμε την ισοδύναμη $f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$. Για αποφυγή συγχύσεων θα χρησιμοποιούμε μία από τις δύο και συγκεκριμένα την έκφραση με το ημίτονο)

Οι όροι του αναπτύγματος Fourier μιας συναρτήσεως ονομάζονται **αρμονικές**. Έτσι π.χ. θα έχουμε:

ο όρος $c_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$ αποτελεί την 1^η αρμονική, η οποία αποκαλείται και **θεμελειώδης**

ο όρος $c_2 \sin(2\omega_1 t + \varphi_2)$ αποτελεί την 2^η αρμονική

και γενικά,

ο όρος $c_n \sin(n\omega_1 t + \varphi_n)$ αποτελεί την n-οστή αρμονική

Η έκφραση ενός σήματος $f(t)$ μέσω ενός (απείρου) αθροίσματος ημιτονοειδών συναρτήσεων μας δίνει άμεσα μια εικόνα του σήματος αυτού στο πεδίο της συχνότητας. Αυτό γίνεται μέσω των πλατών c_n , και των αρχικών γωνιών φάσεως φ_n , των αρμονικών του. Δηλαδή έχει σημασία να γνωρίζουμε για κάθε συχνότητα $n\omega_1$ ποιά είναι το αντίστοιχο πλάτος και η αρχική φάση. Είναι επίσης πιθανό τα μεγέθη αυτά να έχουν μηδενικές τιμές για κάποιες συχνότητες.

Η ανάλυση ενός σήματος σε σειρά Fourier, ή διαφορετικά ανάλυση στις αρμονικές του, είναι πολύ χρήσιμη στην πράξη και μπορεί να μας δώσει πληροφορίες που δεν φαίνονται από την απλή μελέτη της μορφής του σήματος στο πεδίο του χρόνου.

Οι δύο προηγούμενες μορφές αναπτυγμάτων Fourier λέγονται **τριγωνομετρικές μορφές** γιατί χρησιμοποιούν τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

- Όταν το αναπτύγμα γίνεται σε ημίτονα και συνημίτονα με συντελεστές a_n και b_n , αντίστοιχα τότε έχουμε την λεγόμενη τριγωνομετρική μορφή **A**.

- Όταν το αναπτύγμα γίνεται μόνο σε ημίτονα ή μόνο σε συνημίτονα με συντελεστές c_n και γωνίες φάσεως φ_n , τότε έχουμε την ισοδύναμη τριγωνομετρική μορφή **B**.

Αναφέρουμε εδώ ότι οι αρχικοί τύποι (6.2) και (6.3), μας δίνουν τους συντελεστές a_n και b_n της μορφής A και στη συνέχεια μπορούν να υπολογιστούν οι συντελεστές c_n και φ_n της μορφής B.

6.1.3) Μιγαδική μορφή σειράς Fourier

Επειδή στην μελέτη δικτύων και συστημάτων, στο πεδίο της συχνότητας, χρησιμοποιείται σε μεγάλο βαθμό η μιγαδική ανάλυση έχει επικρατήσει και χρησιμοποιείται ευρύτατα και μια τρίτη μορφή αναπτύγματος Fourier η λεγόμενη **μιγαδική μορφή**.

Η μιγαδική μορφή μπορεί να προκύψει από την τριγωνομετρική μορφή με χρήση των σχέσεων:

$$\sin(n\omega t) = \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j} \quad \text{και} \quad \cos(n\omega t) = \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2}$$

οι οποίες προκύπτουν άμεσα από τον τύπο του Euler: $e^{\pm jn\omega t} = \cos(n\omega t) \pm j \sin(n\omega t)$

Αντικαθιστώντας τις μιγαδικές εκφράσεις για το ημίτονο και το συνημίτονο στο ανάπτυγμα (6.1) και μετά από απλή άλγεβρα, θα καταλήξουμε στη σχέση:

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{jn\omega t} \left[\frac{b_n - ja_n}{2} \right] + e^{-jn\omega t} \left[\frac{b_n + ja_n}{2} \right] \right\}$$

Αν ονομάσουμε $\bar{F}_n = \frac{b_n - ja_n}{2}$ τον μιγαδικό συντελεστή του όρου $e^{jn\omega t}$ τότε

ο όρος $e^{-jn\omega t}$ θα έχει αντίστοιχα συντελεστή $\bar{F}_{-n} = \frac{b_n + ja_n}{2} = \bar{F}_n^*$

Άρα μπορούμε να γράψουμε:

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{F}_n e^{jn\omega t} \quad (\text{εδώ στο άθροισμα ο δείκτης } n \text{ δεν παίρνει την τιμή } 0)$$

με $\bar{F}_n = \frac{b_n - j a_n}{2}$ (για τα θετικά n) και $\bar{F}_{-n} = \frac{b_n + j a_n}{2} = \bar{F}_n^*$ (για τα αρνητικά n)

Ουσιαστικά πρόκειται για άπειρο άθροισμα μιγαδικών σε συζυγή ζεύγη που δίνει σαν αποτέλεσμα πραγματικό αριθμό.

Παρατηρούμε ότι: $\bar{F}_n = \frac{1}{2}(b_n - j a_n)$ (για $n > 0$)

Δηλαδή:
$$\bar{F}_n = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n \omega_1 t) dt - j \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n \omega_1 t) dt \right]$$

ή
$$\bar{F}_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) [\cos(n \omega_1 t) - j \sin(n \omega_1 t)] dt$$

ή τελικά
$$\bar{F}_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \quad (\text{για } n > 0)$$

αντίστοιχα θα πάρουμε:

$$\bar{F}_{-n} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{jn\omega_1 t} dt \quad (\text{για } n < 0)$$

Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε συνοπτικά:

$$\bar{F}_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \quad (\text{για } n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots)$$

και ειδικά για $n = 0$
$$\bar{F}_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-j0} dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = c_0$$

Άρα τελικά η μιγαδική μορφή της σειράς Fourier γράφεται ως εξής:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{F}_n e^{jn\omega_1 t} \quad (6.5)$$

όπου: $\bar{F}_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$ και $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$

επίσης ισχύουν οι σχέσεις:

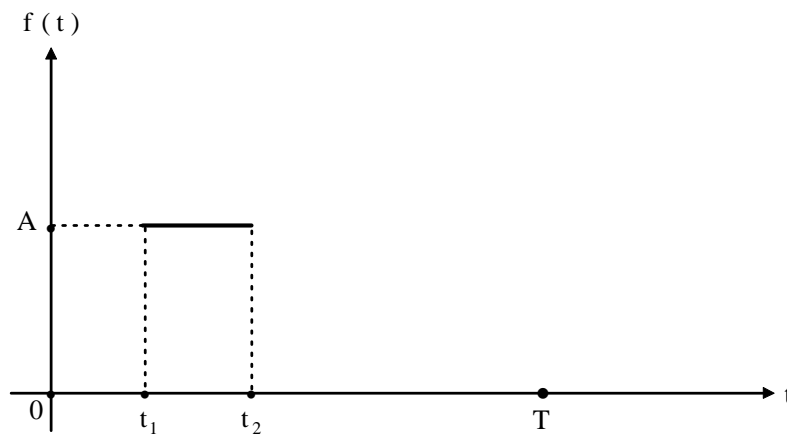
$$\bar{F}_n = \frac{b_n - ja_n}{2} = |\bar{F}_n| e^{j\phi_n}, \quad \bar{F}_{-n} = \frac{b_n + ja_n}{2} = \bar{F}_n^* = |\bar{F}_n| e^{-j\phi_n}, \quad |\bar{F}_n| = \frac{c_n}{2}, \quad \bar{F}_0 = c_0$$

Στο σημείο αυτό αναφέρουμε ότι οι αρνητικές συχνότητες $(-n\omega_1)$ προφανώς δεν υπάρχουν και απλώς προκύπτουν από την μαθηματική έκφραση.

6.2) Παραδείγματα αναπτυγμάτων Fourier περιοδικών συναρτήσεων

Αναφέρουμε αρχικά ότι σέ όλα τα παραδείγματα που ακολουθούν, τα αναπτύγματα υπολογίζονται σε Τριγωνομετρική Μορφή **A**. Αν θέλουμε το ανάπτυγμα σε άλλη μορφή (Τριγωνομετρική Μορφή **B**, ή μιγαδική) χρησιμοποιούμε τους κατάλληλους τύπους μετατροπής

Παράδειγμα 1) Έστω ότι έχουμε το ακόλουθο σήμα $f(t)$ (τετραγωνικός παλμός). Το σήμα είναι περιοδικό, με περίοδο T , και στο παρακάτω σχήμα φαίνεται για μια περίοδο, Θεωρούνται γνωστές οι παράμετροι A, T, t_1, t_2 .



Το σήμα αυτό, για το χρονικό διάστημα μιας περιόδου, έχει την ακόλουθη αναλυτική έκφραση:

$$f(t) = \begin{cases} A & \text{για } t_1 < t < t_2 \\ 0 & \text{αλλου} \end{cases}$$

Για να βρούμε το ανάπτυγμα του σήματος σε σειρά Fourier εφαρμόζουμε τους σχετικούς τύπους

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{A}{T} (t_2 - t_1)$$

$$\text{και } a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n \omega_1 t) dt =$$

$$= \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} A \sin(n \omega_1 t) dt = \frac{2A}{T} \cdot \frac{1}{n \omega_1} \cdot [-\cos(n \omega_1 t_2) + \cos(n \omega_1 t_1)]$$

και επειδή $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ θα πάρουμε τελικά:

$$a_n = \frac{A}{\pi n} \cdot [-\cos(n\omega_1 t_2) + \cos(n\omega_1 t_1)]$$

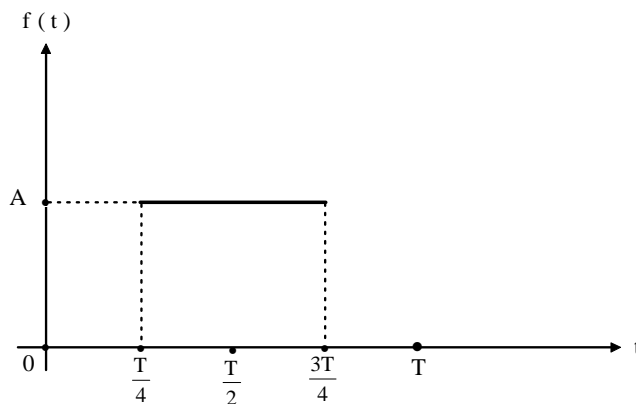
με όμοιο τρόπο θα πάρουμε για τον συντελεστή $b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega_1 t) dt$

$$b_n = \frac{A}{\pi n} \cdot [\sin(n\omega_1 t_2) - \sin(n\omega_1 t_1)]$$

Μεταβάλλοντας τις παραμέτρους t_1 και t_2 μπορούμε να πάρουμε διάφορες ειδικές περιπτώσεις για το σήμα αυτό.

Αριθμητική εφαρμογή

Αν στο παράδειγμα 1 θέσουμε: $t_1 = \frac{T}{4}$ και $t_2 = \frac{3T}{4}$ (όπου εδώ έχουμε κάποια συμμετρία στο σήμα) θα πάρουμε:



$$c_0 = \frac{1}{T} A \left(\frac{3T}{4} - \frac{T}{4} \right) = \frac{A}{2}$$

$$a_n = \frac{A}{\pi n} \cdot \left[-\cos\left(n \frac{2\pi}{T} \frac{3T}{4}\right) + \cos\left(n \frac{2\pi}{T} \frac{T}{4}\right) \right] = \frac{A}{\pi n} \cdot \left[-\cos\left(\frac{3\pi n}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \right]$$

με χρήση της τριγωνομετρικής ταυτότητας

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right)$$

παίρνουμε:

$$a_n = \frac{2A}{\pi n} \cdot \left[\sin(\pi n) \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \right] = 0, \text{ για κάθε } n$$

και επίσης:

$$b_n = \frac{A}{\pi n} \cdot \left[\sin\left(n \frac{2\pi 3T}{4}\right) - \sin\left(n \frac{2\pi T}{4}\right) \right] = \frac{A}{\pi n} \cdot \left[\sin\left(\frac{3\pi n}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \right]$$

όμοια, με χρήση της τριγωνομετρικής ταυτότητας

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

παίρνουμε:

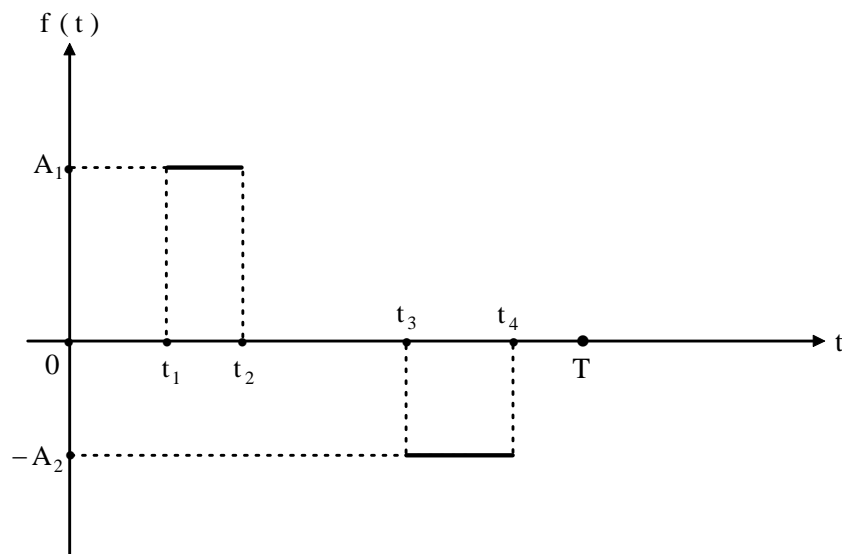
$$b_n = \frac{2A}{\pi n} \cdot \left[\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \cos(\pi n) \right] = \frac{2A(-1)^n}{\pi n} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

(παρατηρούμε ότι $b_n = 0$, για $n = 2, 4, 6, 8, \dots$)

Άρα τελικά το ανάπτυγμα Fourier γράφεται:

$$f(t) = \frac{A}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A(-1)^n}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \cos(n\omega_1 t)$$

Παράδειγμα 2) Με βάση το προηγούμενο παράδειγμα 1, μπορούμε να θεωρήσουμε και το ακόλουθο σήμα, το οποίο φαίνεται και πάλι για μια περίοδο.



Θεωρούνται γνωστές οι παράμετροι $A_1, A_2, t_1, t_2, t_3, t_4, T$

Η αναλυτική έκφραση του σήματος θα είναι:

$$f(t) = \begin{cases} A_1 & t_1 < t < t_2 \\ -A_2 & t_3 < t < t_4 \\ 0 & \text{αλλου} \end{cases}$$

Ο υπολογισμός του αναπτύγματος Fourier του σήματος αυτού, γίνεται εύκολα χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του προηγούμενου παραδείγματος. Έτσι θα έχουμε:

$$\text{μέση τιμή: } c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{T} [A_1(t_2 - t_1) - A_2(t_4 - t_3)]$$

και

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} A_1 \sin(n\omega_1 t) dt - \frac{2}{T} \int_{t_3}^{t_4} A_2 \sin(n\omega_1 t) dt =$$

και μετά τις αντίστοιχες πράξεις

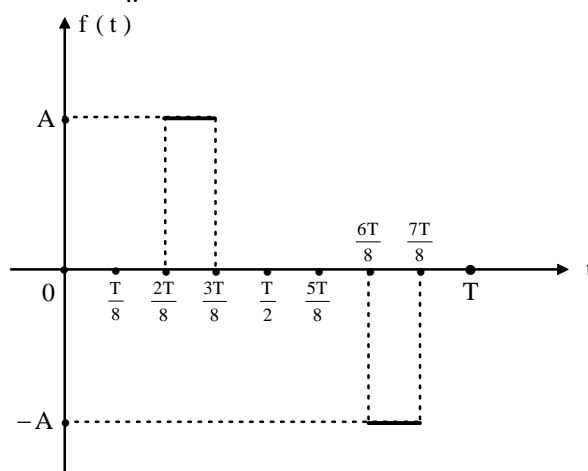
$$a_n = \frac{A_1}{\pi n} [-\cos(n\omega_1 t_2) + \cos(n\omega_1 t_1)] - \frac{A_2}{\pi n} [-\cos(n\omega_1 t_4) + \cos(n\omega_1 t_3)]$$

όμοια:

$$b_n = \frac{A_1}{\pi n} [\sin(n\omega_1 t_2) - \sin(n\omega_1 t_1)] - \frac{A_2}{\pi n} [\sin(n\omega_1 t_4) - \sin(n\omega_1 t_3)]$$

Αριθμητική εφαρμογή

Έστω ότι έχουμε το ακόλουθο σήμα:



Μπορούμε εύκολα να βρούμε το ανάπτυγμα Fourier του σήματος χρησιμοποιώντας τους προηγούμενους τύπους και θέτοντας $A_1 = A$, $-A_2 = -A$, $t_1 = 2T/8$, $t_2 = 3T/8$, $t_3 = 6T/8$ και $t_4 = 7T/8$. Έτσι θα πάρουμε:

$$\text{μέση τιμή σήματος: } c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{T} \left[A \left(\frac{3T}{8} - \frac{2T}{8} \right) - A \left(\frac{7T}{8} - \frac{6T}{8} \right) \right] = 0$$

και

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{A}{\pi n} \cdot \left[-\cos\left(n\omega_1 \frac{3T}{8}\right) + \cos\left(n\omega_1 \frac{2T}{8}\right) \right] - \frac{A}{\pi n} \cdot \left[-\cos\left(n\omega_1 \frac{7T}{8}\right) + \cos\left(n\omega_1 \frac{6T}{8}\right) \right] = \\ &= \frac{A}{\pi n} \cdot \left[-\cos\left(\frac{3\pi n}{4}\right) + \cos\left(\frac{2\pi n}{4}\right) \right] - \frac{A}{\pi n} \cdot \left[-\cos\left(\frac{7\pi n}{4}\right) + \cos\left(\frac{6\pi n}{4}\right) \right] \end{aligned}$$

και με χρήση της τριγωνομετρικής ταυτότητας

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right)$$

το a_n γράφεται:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{A}{\pi n} \cdot \left[2 \sin\left(\frac{5\pi n}{8}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{8}\right) \right] - \frac{A}{\pi n} \cdot \left[2 \sin\left(\frac{13\pi n}{8}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{8}\right) \right] = \\ &= \frac{2A}{\pi n} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{8}\right) \left[\sin\left(\frac{5\pi n}{8}\right) - \sin\left(\frac{13\pi n}{8}\right) \right] \end{aligned}$$

και πάλι χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)$$

θα πάρουμε τελικά για τον συντελεστή a_n :

$$a_n = \frac{2A}{\pi n} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{8}\right) 2 \sin\left(-\frac{\pi n}{2}\right) \cos\left(\frac{9\pi n}{8}\right) =$$

$$a_n = -\frac{4A}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{8}\right) \cos\left(\frac{9\pi n}{8}\right)$$

Με εντελώς αντίστοιχη πορεία υπολογισμών θα βρούμε για τον συντελεστή b_n :

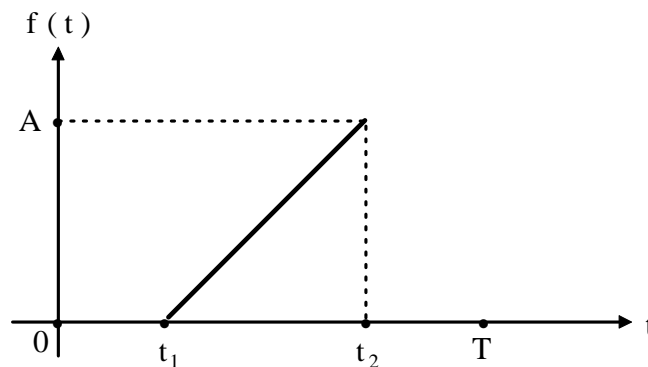
$$b_n = \frac{4A}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{8}\right) \sin\left(\frac{9\pi n}{8}\right)$$

Άρα τελικά το ανάπτυγμα Fourier γράφεται:

$$f(t) = -\frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \left[\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{8}\right) \cos\left(\frac{9\pi n}{8}\right) \sin(n\omega_1 t) \right] \right\} +$$

$$+ \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \left[\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{8}\right) \sin\left(\frac{9\pi n}{8}\right) \cos(n\omega_1 t) \right] \right\}$$

Παράδειγμα 3) Έχουμε επίσης το ακόλουθο σήμα, το οποίο φαίνεται και πάλι για μια περίοδο



Θεωρούνται γνωστές οι παράμετροι A, t_1, t_2, T

Η αναλυτική έκφραση του σήματος θα είναι:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{t_2 - t_1} (t - t_1) & t_1 \leq t \leq t_2 \\ 0 & \text{αλλου} \end{cases}$$

Ο υπολογισμός της μέσης τιμής γίνεται εύκολα από το εμβαδόν του τριγώνου:

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{2} A (t_2 - t_1) = \frac{A (t_2 - t_1)}{2T}$$

Για τον υπολογισμό των συντελεστών a_n και b_n θα χρησιμοποιήσουμε τα ολοκληρώματα:

$$\int k t \sin(n \omega_1 t) dt = -\frac{k t}{n \omega_1} \cos(n \omega_1 t) + \frac{k}{n^2 \omega_1^2} \sin(n \omega_1 t)$$

και

$$\int k t \cos(n \omega_1 t) dt = \frac{k t}{n \omega_1} \sin(n \omega_1 t) + \frac{k}{n^2 \omega_1^2} \cos(n \omega_1 t)$$

Έτσι ο συντελεστής a_n υπολογίζεται από τη σχέση:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} \frac{A t}{t_2 - t_1} \sin(n \omega_1 t) dt - \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} \frac{A t_1}{t_2 - t_1} \sin(n \omega_1 t) dt$$

Μετά από αρκετή, αλλά απλή, άλγεβρα το τελικό αποτέλεσμα για τον συντελεστή a_n θα είναι:

$$a_n = -\frac{A}{\pi n} \cos(n \omega_1 t_2) + \frac{2A}{T} \cdot \frac{1}{n^2 \omega_1^2} \cdot \frac{1}{t_2 - t_1} (\sin(n \omega_1 t_2) - \sin(n \omega_1 t_1))$$

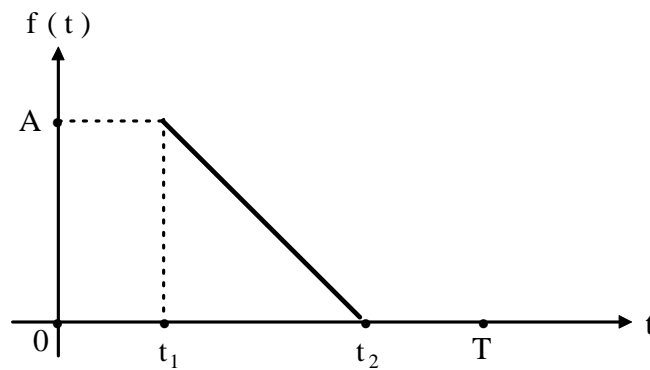
και όμοια για τον συντελεστή b_n

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} \frac{A t}{t_2 - t_1} \cos(n \omega_1 t) dt - \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} \frac{A t_1}{t_2 - t_1} \cos(n \omega_1 t) dt$$

και τελικά

$$b_n = \frac{A}{\pi n} \sin(n \omega_1 t_2) + \frac{2A}{T} \cdot \frac{1}{n^2 \omega_1^2} \cdot \frac{1}{t_2 - t_1} (\cos(n \omega_1 t_2) - \cos(n \omega_1 t_1))$$

Παράδειγμα 4) Για το ακόλουθο σήμα, το οποίο φαίνεται και πάλι για μια περίοδο



Θεωρούνται γνωστές οι παράμετροι A, t_1, t_2, T

Η αναλυτική έκφραση του σήματος θα είναι:

$$f(t) = \begin{cases} A - \frac{A}{t_2 - t_1} (t - t_1) & t_1 \leq t \leq t_2 \\ 0 & \text{αλλου} \end{cases}$$

Η μέση τιμή του σήματος:

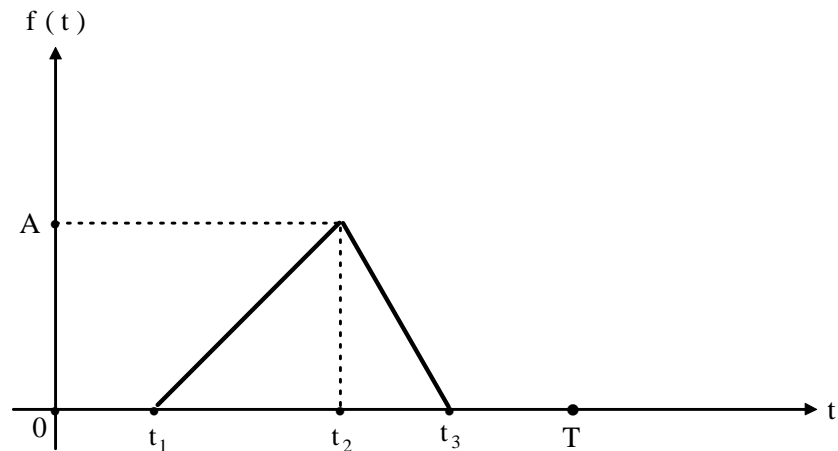
$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{2} A (t_2 - t_1) = \frac{A (t_2 - t_1)}{2T}$$

και οι συντελεστές a_n και b_n υπολογίζονται με όμοιο τρόπο όπως στο προηγούμενο παράδειγμα:

$$a_n = \frac{A}{\pi n} \cos(n \omega_1 t_1) - \frac{2A}{T} \cdot \frac{1}{n^2 \omega_1^2} \cdot \frac{1}{t_2 - t_1} (\sin(n \omega_1 t_2) - \sin(n \omega_1 t_1))$$

$$b_n = -\frac{A}{\pi n} \sin(n \omega_1 t_1) - \frac{2A}{T} \cdot \frac{1}{n^2 \omega_1^2} \cdot \frac{1}{t_2 - t_1} (\cos(n \omega_1 t_2) - \cos(n \omega_1 t_1))$$

Παράδειγμα 5) Συνδυάζοντας τα παραδείγματα **3** και **4** μπορούμε να «κατασκευάσουμε» το ακόλουθο σήμα το οποίο φαίνεται πάλι για μια περίοδο



Θεωρούνται γνωστές οι παράμετροι A, t_1, t_2, t_3, T

Η αναλυτική έκφραση του σήματος θα είναι:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{t_2 - t_1} (t - t_1) & t_1 \leq t \leq t_2 \\ A - \frac{A}{t_3 - t_2} (t - t_2) & t_2 \leq t \leq t_3 \\ 0 & \text{αλλου} \end{cases}$$

Ο υπολογισμός της μέσης τιμής γίνεται εύκολα από το εμβαδόν του τριγώνου:

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{2} A (t_3 - t_1) = \frac{A (t_3 - t_1)}{2T}$$

Ο υπολογισμός των συντελεστών a_n και b_n γίνεται με προσεκτική χρήση των αποτελεσμάτων των προηγούμενων περιπτώσεων **3** και **4** και συγκεκριμένα:

- τα αποτελέσματα του παραδείγματος **3** χρησιμοποιούνται ως έχουν
- στα αποτελέσματα του παραδείγματος **4** θέτουμε $t_1 = t_2$ και $t_2 = t_3$

και προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις που δίνουν τα a_n και b_n

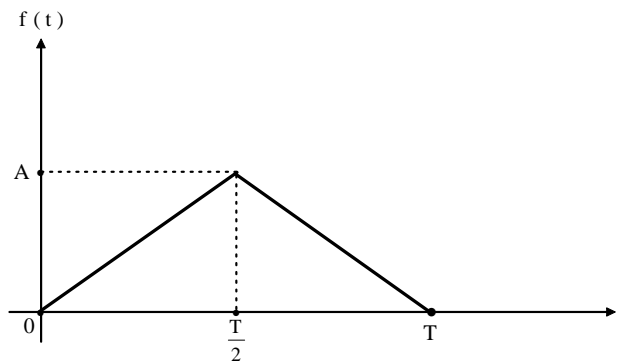
Έτσι τελικά προκύπτουν οι σχέσεις:

$$a_n = \frac{2A}{T} \cdot \frac{1}{n^2 \omega_1^2} \left[\frac{1}{t_2 - t_1} (\sin(n \omega_1 t_2) - \sin(n \omega_1 t_1)) - \frac{1}{t_3 - t_2} (\sin(n \omega_1 t_3) - \sin(n \omega_1 t_2)) \right]$$

$$b_n = \frac{2A}{T} \cdot \frac{1}{n^2 \omega_1^2} \left[\frac{1}{t_2 - t_1} (\cos(n \omega_1 t_2) - \cos(n \omega_1 t_1)) - \frac{1}{t_3 - t_2} (\cos(n \omega_1 t_3) - \cos(n \omega_1 t_2)) \right]$$

Αριθμητική εφαρμογή

Παρακάτω εξετάζουμε μια πιο ειδική περίπτωση του σήματος αυτού:



Εδώ θα ισχύει: $t_1 = 0$, $t_2 = T/2$ και $t_3 = T$

Η μέση τιμή του σήματος θα είναι: $c_0 = \frac{A}{2}$

και οι εκφράσεις για τους συντελεστές a_n και b_n γίνονται:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2A}{T} \cdot \frac{1}{n^2 \omega_1^2} \left[\frac{2}{T} \left(\sin\left(n \omega_1 \frac{T}{2}\right) \right) - \frac{2}{T} \left(\sin(n \omega_1 T) - \sin\left(n \omega_1 \frac{T}{2}\right) \right) \right] = \\ &= \frac{4A}{T^2} \cdot \frac{1}{n^2 \omega_1^2} [\sin(\pi n) - \sin(2\pi n) - \sin(\pi n)] = 0 \quad \text{για κάθε } n \end{aligned}$$

επίσης

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2A}{T} \cdot \frac{1}{n^2 \omega_1^2} \left[\frac{2}{T} \left(\cos\left(n \omega_1 \frac{T}{2}\right) - \cos(n \omega_1 0) \right) - \frac{2}{T} \left(\cos(n \omega_1 T) - \cos\left(n \omega_1 \frac{T}{2}\right) \right) \right] = \\ &= \frac{4A}{T^2} \cdot \frac{1}{n^2 \omega_1^2} [(\cos(\pi n) - 1) - (\cos(2\pi n) - \cos(\pi n))] = \\ &= \frac{4A}{T^2} \cdot \frac{1}{n^2 \omega_1^2} [(-1)^n - 1 - 1 + (-1)^n] = \frac{8A}{T^2} \cdot \frac{1}{n^2 (4\pi^2 / T^2)} [(-1)^n - 1] \end{aligned}$$

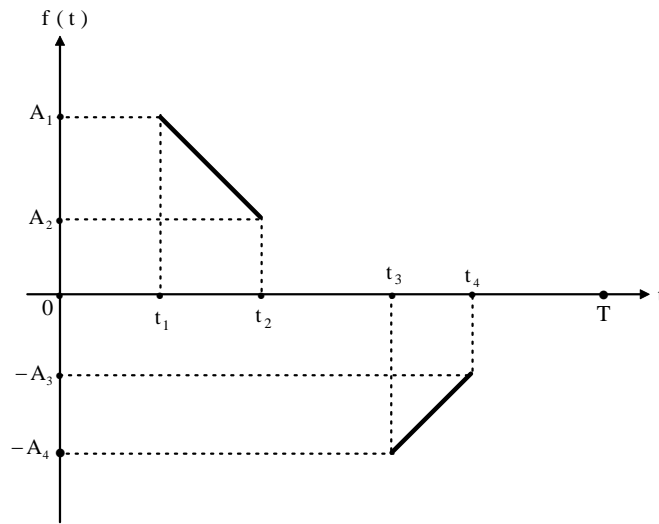
άρα τελικά

$$b_n = \frac{2A}{\pi^2 n^2} \cdot [(-1)^n - 1]$$

και το ανάπτυγμα Fourier γράφεται:

$$f(t) = \frac{A}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A}{\pi^2 n^2} \left((-1)^n - 1 \right) \cos(n \omega_1 t)$$

Παράδειγμα 6) Θεωρούμε το ακόλουθο σήμα



Το σήμα στη γενική αυτή μορφή δεν παρουσιάζει καμία συμμετρία . Θεωρούνται γνωστές οι παράμετροι A_1, A_2, A_3, A_4, t_1 έως t_4 και T

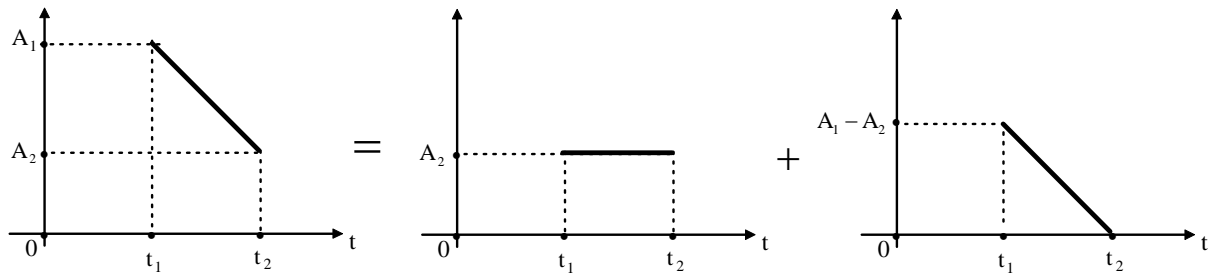
Η αναλυτική έκφραση του σήματος θα είναι:

$$f(t) = \begin{cases} A_1 - \frac{A_1 - A_2}{t_2 - t_1} (t - t_1) & t_1 \leq t \leq t_2 \\ -A_4 + \frac{A_4 - A_3}{t_4 - t_3} (t - t_3) & t_3 \leq t \leq t_4 \\ 0 & \text{αλλου} \end{cases}$$

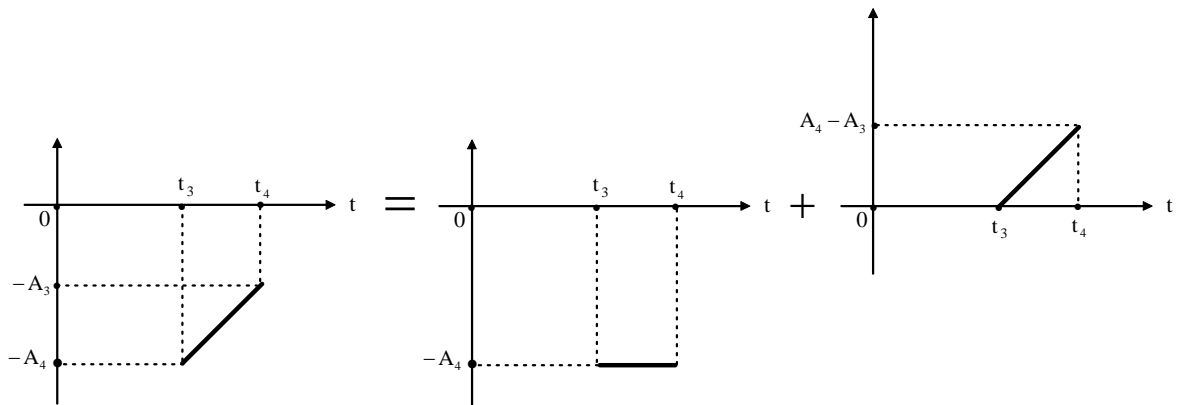
Για να βρούμε το ανάπτυγμα Fourier του σήματος αυτού, συνδυάζουμε κατάλληλα τις περιπτώσεις **1**, **3** και **4** (τετραγωνικός παλμός και γραμμική μεταβολή, αύξουσα, ή φθίνουσα) και συγκεκριμένα:

- Το τμήμα για $t_1 \leq t \leq t_2$ προκύπτει από την επαλληλία ενός τετραγωνικού παλμού (**παράδειγμα 1**) με ύψος A_2 , και μιας φθίνουσας γραμμικής μεταβολής (**παράδειγμα 4**).

Σχηματικά φαίνεται καλλίτερα πως προκύπτει το αποτέλεσμα:



- Όμοια για το τμήμα για $t_3 \leq t \leq t_4$ όπως φαίνεται και από το παρακάτω σχήμα:



Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η εύρεση του αναπτύγματος Fourier του σήματος του παραδείγματος 6 προκύπτει αμέσως με υπέρθεση των αποτελεσμάτων που είναι γνωστά από τα παραδείγματα 1, 3 και 4. Έτσι θα έχουμε:

Η μέση τιμή του σήματος υπολογίζεται από τα εμβαδά των δύο τραπεζίων:

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{T} \left[\frac{A_1 + A_2}{2} (t_2 - t_1) - \frac{A_3 + A_4}{2} (t_4 - t_3) \right]$$

και οι συντελεστές a_n και b_n :

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{A_2}{\pi n} \cdot [-\cos(n\omega_1 t_2) + \cos(n\omega_1 t_1)] + \\
&+ \frac{A_1 - A_2}{\pi n} \cos(n\omega_1 t_1) - \frac{2(A_1 - A_2)}{T} \cdot \frac{1}{n^2 \omega_1^2} \cdot \frac{1}{t_2 - t_1} (\sin(n\omega_1 t_2) - \sin(n\omega_1 t_1)) \\
&- \frac{A_4}{\pi n} \cdot [-\cos(n\omega_1 t_4) + \cos(n\omega_1 t_3)] - \\
&- \frac{A_4 - A_3}{\pi n} \cos(n\omega_1 t_4) + \frac{2(A_4 - A_3)}{T} \cdot \frac{1}{n^2 \omega_1^2} \cdot \frac{1}{t_4 - t_3} (\sin(n\omega_1 t_4) - \sin(n\omega_1 t_3))
\end{aligned}$$

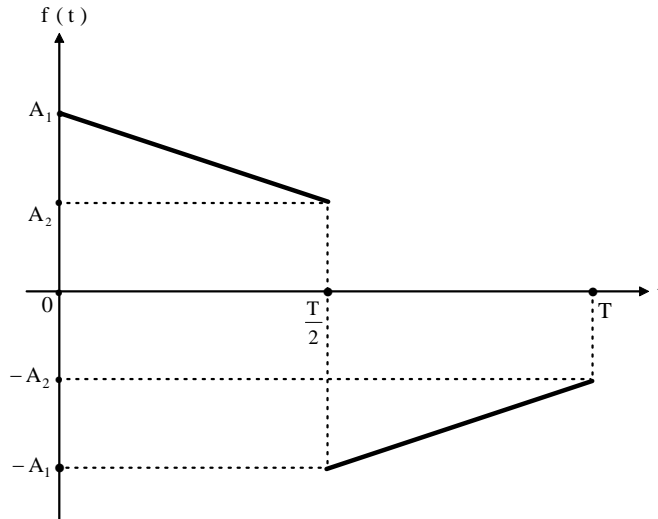
και

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{A_2}{\pi n} \cdot [\sin(n\omega_1 t_2) - \sin(n\omega_1 t_1)] - \\
&- \frac{A_1 - A_2}{\pi n} \sin(n\omega_1 t_1) - \frac{2(A_1 - A_2)}{T} \cdot \frac{1}{n^2 \omega_1^2} \cdot \frac{1}{t_2 - t_1} (\cos(n\omega_1 t_2) - \cos(n\omega_1 t_1)) \\
&- \frac{A_4}{\pi n} \cdot [\sin(n\omega_1 t_4) - \sin(n\omega_1 t_3)] + \\
&+ \frac{A_4 - A_3}{\pi n} \sin(n\omega_1 t_4) + \frac{2(A_4 - A_3)}{T} \cdot \frac{1}{n^2 \omega_1^2} \cdot \frac{1}{t_4 - t_3} (\cos(n\omega_1 t_4) - \cos(n\omega_1 t_3))
\end{aligned}$$

Στις ανωτέρω εκφράσεις γίνονται κάποιες απλοποιήσεις , όπως αμέσως φαίνεται. Επίσης αναφέρουμε ότι σε περιπτώσεις συμμετρίας οι εκφράσεις για τα a_n και b_n απλοποιούνται ακόμη περισσότερο. Παρακάτω εξετάζουμε μια αριθμητική εφαρμογή για το σήμα αυτό

Αριθμητική εφαρμογή

Να βρεθεί το ανάπτυγμα Fourier του σήματος



Το σήμα παρουσιάζει πλήρη συμμετρία. Για να βρούμε το ανάπτυγμα χρησιμοποιούμε τους προηγούμενους τύπους θέτοντας: $t_1 = 0$, $t_2 = T/2$, $t_3 = T/2$, $t_4 = T$ και $-A_3 = -A_2$, $-A_4 = -A_1$. Έτσι θα έχουμε:

Η μέση τιμή του σήματος θα είναι προφανώς μηδενική λόγω της συμμετρίας. Άρα $c_0 = 0$

Για τον συντελεστή a_n

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{A_2}{\pi n} \cdot [-\cos(\pi n) + \cos(0)] + \\ &+ \frac{A_1 - A_2}{\pi n} \cos(0) - \frac{2(A_1 - A_2)}{T} \cdot \frac{1}{n^2 \omega_1^2} \cdot \frac{2}{T} (\sin(\pi n) - \sin(0)) \\ &- \frac{A_1}{\pi n} \cdot [-\cos(2\pi n) + \cos(\pi n)] - \\ &- \frac{A_1 - A_2}{\pi n} \cos(2\pi n) + \frac{2(A_1 - A_2)}{T} \cdot \frac{1}{n^2 \omega_1^2} \cdot \frac{2}{T} (\sin(2\pi n) - \sin(\pi n)) \end{aligned}$$

η έκφραση αυτή, μετά τις απλοποιήσεις, και με χρήση της σχέσης $\cos(\pi n) = (-1)^n$ θα δώσει τελικά:

$$a_n = \frac{A_2}{\pi n} \cdot [-(-1)^n] + \frac{A_1}{\pi n} - \frac{A_1}{\pi n} (-1)^n + \frac{A_2}{\pi n} \cdot$$

ή

$$a_n = \frac{A_1 + A_2}{\pi n} \cdot [1 - (-1)^n]$$

με όμοιο σκεπτικό θα πάρουμε για τον συντελεστή b_n

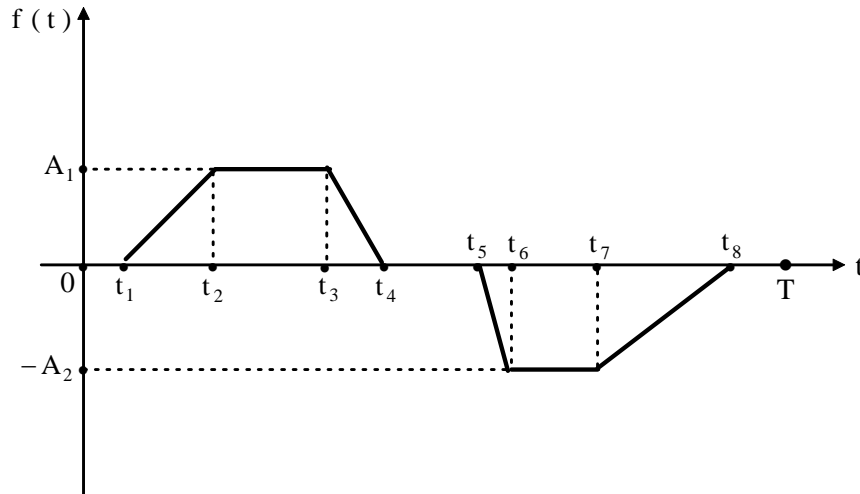
$$b_n = \frac{2(A_1 - A_2)}{\pi^2 n^2} \cdot [1 - (-1)^n]$$

Το ανάπτυγμα Fourier σήματος θα γράφεται:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(A_1 + A_2)}{\pi n} \cdot [1 - (-1)^n] \sin(n \omega_1 t) + \frac{2(A_1 - A_2)}{\pi^2 n^2} \cdot [1 - (-1)^n] \cos(n \omega_1 t) \right\}$$

Παρατηρούμε ότι για $n = 2, 4, 6, 8, \dots$ η ποσότητα $(1 - (-1)^n)$ παίρνει την τιμή 0 και επομένως μηδενίζονται και οι δύο συντελεστές a_n και b_n .

Παράδειγμα 7) Θεωρούμε το ακόλουθο σήμα το οποίο επίσης μπορεί να προκύψει ως συνδυασμός των περιπτώσεων **2, 3** και **4**.



Το σήμα στη γενική αυτή μορφή δεν παρουσιάζει καμία συμμετρία . Θεωρούνται γνωστές οι παράμετροι $A_1, -A_2, t_1$ έως t_8 και T

Η αναλυτική έκφραση του σήματος θα είναι:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{A_1}{t_2 - t_1} (t - t_1) & t_1 \leq t \leq t_2 \\ A_1 & t_2 \leq t \leq t_3 \\ A_1 - \frac{A_1}{t_4 - t_3} (t - t_3) & t_3 \leq t \leq t_4 \\ \frac{A_2}{t_6 - t_5} (t - t_5) & t_5 \leq t \leq t_6 \\ -A_2 & t_6 \leq t \leq t_7 \\ -A_2 + \frac{A_2}{t_8 - t_7} (t - t_7) & t_7 \leq t \leq t_8 \\ 0 & \text{αλλου} \end{cases}$$

Ο υπολογισμός της μέσης τιμής του σήματος γίνεται εύκολα από το εμβαδόν των τραπεζίων:

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{T} \left[\frac{(t_3 - t_2) + (t_4 - t_1)}{2} A_1 - \frac{(t_7 - t_6) + (t_8 - t_5)}{2} A_2 \right]$$

Για βρούμε το ανάπτυγμα Fourier χρησιμοποιούμε τα αποτελέσματα των περιπτώσεων 2, 3 και 4 θέτοντας τις κατάλληλες τιμές. Η όλη διαδικασία είναι αρκετά επίπονη και θα αναφέρουμε εδώ μόνον τις τελικές εκφράσεις για τους συντελεστές a_n και b_n

$$a_n = \frac{2A_1}{T} \cdot \frac{1}{n^2 \omega_1^2} \left[\frac{1}{t_2 - t_1} (\sin(n \omega_1 t_2) - \sin(n \omega_1 t_1)) - \frac{1}{t_4 - t_3} (\sin(n \omega_1 t_4) - \sin(n \omega_1 t_3)) \right] -$$

$$- \frac{2A_2}{T} \cdot \frac{1}{n^2 \omega_1^2} \left[\frac{1}{t_6 - t_5} (\sin(n \omega_1 t_6) - \sin(n \omega_1 t_5)) - \frac{1}{t_8 - t_7} (\sin(n \omega_1 t_8) - \sin(n \omega_1 t_7)) \right]$$

και

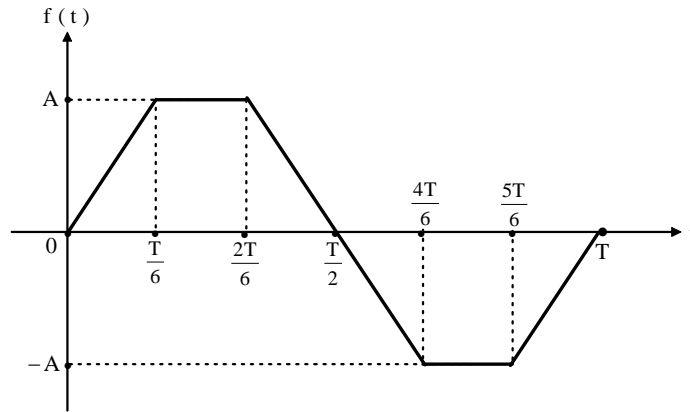
$$b_n = \frac{2A_1}{T} \cdot \frac{1}{n^2 \omega_1^2} \left[\frac{1}{t_2 - t_1} (\cos(n \omega_1 t_2) - \cos(n \omega_1 t_1)) - \frac{1}{t_4 - t_3} (\cos(n \omega_1 t_4) - \cos(n \omega_1 t_3)) \right] -$$

$$- \frac{2A_2}{T} \cdot \frac{1}{n^2 \omega_1^2} \left[\frac{1}{t_6 - t_5} (\cos(n \omega_1 t_6) - \cos(n \omega_1 t_5)) - \frac{1}{t_8 - t_7} (\cos(n \omega_1 t_8) - \cos(n \omega_1 t_7)) \right]$$

Παρακάτω εξετάζουμε μια ειδική περίπτωση του σήματος αυτού που παρουσιάζει μια πλήρη συμμετρία

Αριθμητική εφαρμογή

Να βρεθεί το ανάπτυγμα Fourier του σήματος



Για να βρούμε το ανάπτυγμα Fourier του σήματος αυτού, χρησιμοποιούμε τους προηγούμενους τύπους για τους συντελεστές a_n και b_n θέτοντας: $A_1 = A$, $-A_2 = -A$, $t_1 = 0$, $t_2 = T/6$, $t_3 = 2T/6$, $t_4 = t_5 = T/2$, $t_6 = 4T/6$, $t_7 = 5T/6$, $t_8 = T$

Η μέση τιμή του σήματος $c_0 = 0$ όπως φαίνεται αμέσως λόγω της συμμετρίας.

Ο τύπος για τον συντελεστή a_n θα δώσει:

$$a_n = \frac{2A}{T} \cdot \frac{1}{n^2 \omega_1^2} \left[\frac{1}{T/6} \left(\sin\left(\frac{2\pi n}{6}\right) - 0 \right) - \frac{1}{T/6} \left(\sin\left(\frac{6\pi n}{6}\right) - \sin\left(\frac{4\pi n}{6}\right) \right) \right] -$$

$$- \frac{2A}{T} \cdot \frac{1}{n^2 \omega_1^2} \left[\frac{1}{T/6} \left(\sin\left(\frac{8\pi n}{6}\right) - \sin\left(\frac{6\pi n}{6}\right) \right) - \frac{1}{T/6} \left(0 - \sin\left(\frac{10\pi n}{6}\right) \right) \right]$$

ή

$$a_n = \frac{2A}{T} \cdot \frac{1}{n^2 \omega_1^2} \cdot \frac{6}{T} \cdot \left[\sin\left(\frac{2\pi n}{6}\right) + \sin\left(\frac{4\pi n}{6}\right) - \sin\left(\frac{8\pi n}{6}\right) - \sin\left(\frac{10\pi n}{6}\right) \right]$$

Με χρήση της ταυτότητας:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

θα πάρουμε:

$$a_n = \frac{12A}{T^2} \cdot \frac{1}{n^2 (4\pi^2 / T^2)} \cdot \left[2 \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi n}{6}\right) - 2 \sin\left(\frac{9\pi n}{6}\right) \cos\left(\frac{\pi n}{6}\right) \right] \quad \text{ή}$$

$$a_n = \frac{6A}{\pi^2} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi n}{6}\right) \left(\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \sin\left(\frac{9\pi n}{6}\right) \right) \right]$$

και με χρήση της ταυτότητας:

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)$$

θα πάρουμε τελικά:

$$a_n = \frac{12A}{\pi^2} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi n}{6}\right) \left(\sin\left(\frac{-\pi n}{2}\right) \cos(\pi n) \right) \right]$$

ή

$$a_n = -\frac{12A}{\pi^2} \cdot \frac{(-1)^n}{n^2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi n}{6}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \right]$$

παρατηρούμε ότι, λόγω του όρου $\sin(\pi n / 2)$, $a_n = 0$ για $n = 2, 4, 6, 8, \dots$

Με εντελώς όμοιο τρόπο θα βρούμε για τον συντελεστή b_n

$$b_n = \frac{12A}{\pi^2} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi n}{6}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \sin(\pi n) \right]$$

Παρατηρούμε αμέσως ότι $b_n = 0$ για κάθε n , διότι υπάρχει ο όρος $\sin(\pi n)$ ο οποίος έχει μηδενική τιμή για κάθε n

Το ανάπτυγμα Fourier σήματος θα γράφεται:

$$f(t) = -\frac{12A}{\pi^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi n}{6}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \right] \sin(n \omega_1 t)$$

6.3) Φάσματα Fourier

Λέγοντας «φάσμα» εννοούμε την γραφική παράσταση κάποιων παραμέτρων σχετικών με την ανάλυση σε σειρά Fourier ενός σήματος, συναρτήσκει πάντοτε της συχνότητας. (ή ακριβέστερα ακεραίων πολλαπλασίων της βασικής συχνότητας ω_1 δηλ. του $n \omega_1$)

Έτσι θα έχουμε:

Για το ανάπτυγμα σε τριγωνομετρική μορφή: $f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin (n \omega_1 t + \vartheta_n)$

Φάσμα Πλάτους

Η γραφική παράσταση των πλατών c_n συναρτήσκει του $n\omega_1$

Φάσμα Γωνίας

Η γραφική παράσταση των γωνιών ϑ_n συναρτήσκει του $n\omega_1$

Φάσμα Ισχύος

Η γραφική παράσταση των τετραγώνων των πλατών c_n^2 συναρτήσκει του $n\omega_1$

Για το ανάπτυγμα σε μιγαδική μορφή: $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{F}_n e^{jn\omega_1 t}$ όπου: $\bar{F}_n = |\bar{F}_n| e^{j\varphi_n}$

Φάσμα Πλάτους

Η γραφική παράσταση των μέτρων $|\bar{F}_n|$ συναρτήσκει του $n\omega_1$

Φάσμα Γωνίας

Η γραφική παράσταση των γωνιών φ_n συναρτήσκει του $n\omega_1$

Φάσμα Ισχύος

Η γραφική παράσταση των τετραγώνων των μέτρων $|\bar{F}_n|^2$ συναρτήσκει του $n\omega_1$

Στην περίπτωση αναπτύγματος σε μιγαδική μορφή εμφανίζονται και οι «αρνητικές συχνότητες» και έτσι τα φάσματα ονομάζονται «δίπλευρα» δηλ το ω εκτείνεται από το $-\infty$ έως το $+\infty$, πάντα σε ακέραια πολλαπλάσια (τόρα και αρνητικά) της βασικής συχνότητας ω_1 .

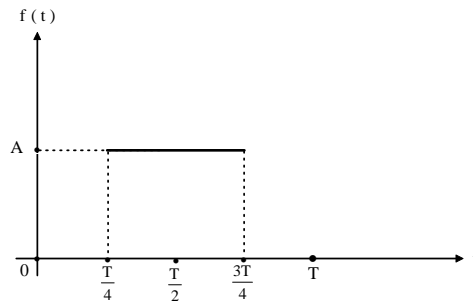
Μπορούμε να έχουμε και στην περίπτωση αυτή «μονόπλευρα» φάσματα (δηλ. $0 \leq \omega < \infty$) πλάτους και ισχύος αρκεί να πολλαπλασιάσουμε επί 2 τους συντελεστές $|\bar{F}_n|$ και $|\bar{F}_n|^2$

Σημαντικότερο από όλα τα φάσματα είναι το φάσμα ισχύος το οποίο και μας δίνει πληροφορίες για το πως κατανέμεται η ισχύς που μεταφέρει το σήμα στις διάφορες αρμονικές του.

Παρακάτω θα δώσουμε δύο αριθμητικά παραδείγματα αναπτυγμάτων Fourier και τις γραφικές παραστάσεις των αντιστοίχων φασμάτων. Για να σχεδιάσουμε το φάσμα ενός σήματος πρέπει αυτό να είναι εκφρασμένο στην τριγωνομετρική μορφή **B**, ή στην μιγαδική μορφή. Σημειώνουμε ότι στην γραφική παράσταση ενός φάσματος διακριτών συχνοτήτων συνηθίζεται η μορφή του «ιστογράμματος».

Παράδειγμα 1)

Έστω το ακόλουθο σήμα:



Το ανάπτυγμα του σήματος σε σειρά Fourier (Μορφή **A**) έχει βρεθεί στα προηγούμενα (σελ.) και είναι:

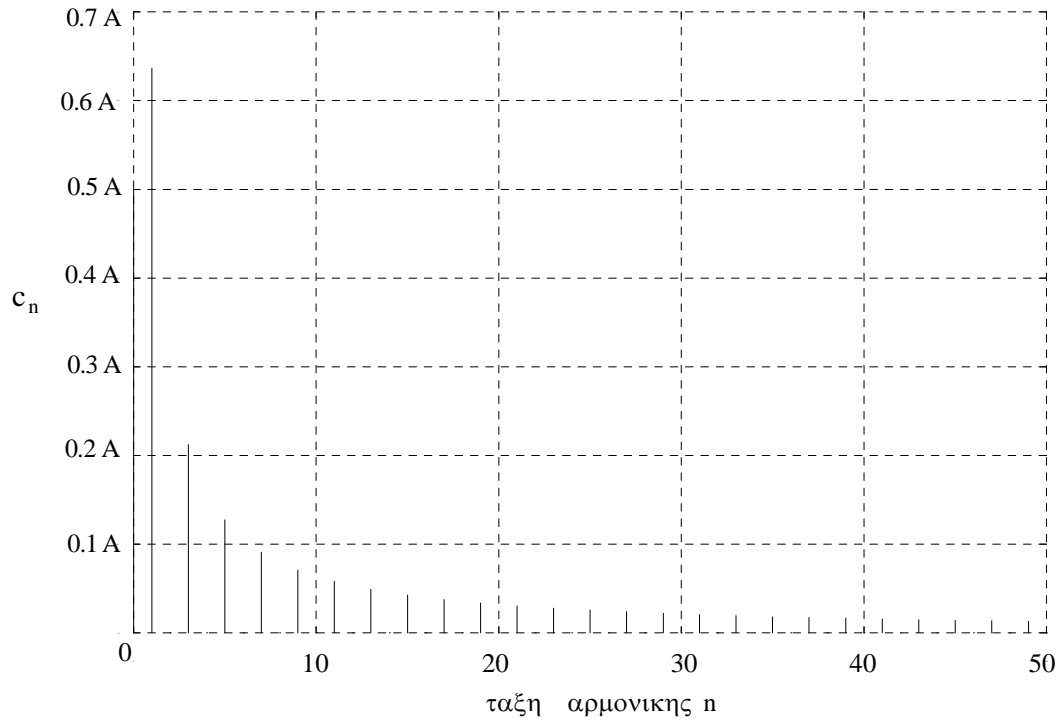
$$f(t) = \frac{A}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A(-1)^n}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \cos(n\omega_1 t)$$

δηλ ισχύει $a_n = 0$ για κάθε n και $b_n = \frac{2A(-1)^n}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$

άρα οι συντελεστές c_n της μορφής **B** όπου $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ θα έχουν τιμές :

$$c_n = \sqrt{b_n^2} = |b_n| = \frac{2A}{\pi n} \left| \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \right|$$

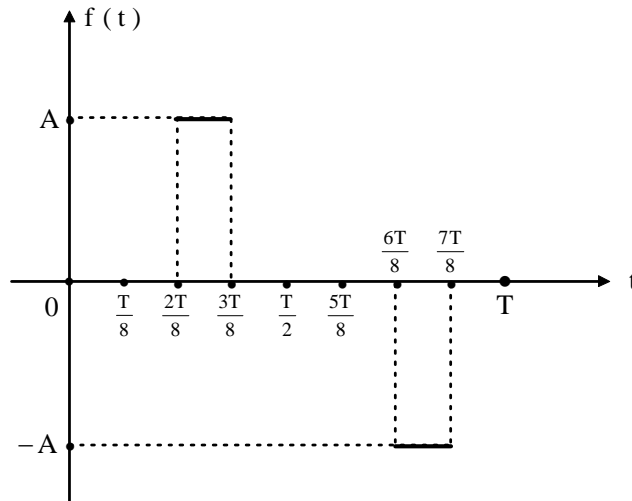
Παρακάτω φαίνεται το φάσμα πλάτους του σήματος. Στον οριζόντιο άξονα έχει τεθεί ο δείκτης n δηλ. η τάξη των αρμονικών.



Έχει γίνει γραφική παράσταση μέχρι την τιμή $n = 50$. Υπενθυμίζεται ότι η n -οστή τάξη αρμονικής αντιστοιχεί σε κυκλική συχνότητα $n\omega_1$ (rad/sec) ή σε συχνότητα $n\omega_1/2\pi$ (Hz). Παρατηρούμε ότι το σήμα έχει μόνον τις περιττές αρμονικές ($n = 1, 3, 5, 7, \dots$)

Παράδειγμα 2)

Έστω το ακόλουθο σήμα:



Το ανάπτυγμα Fourier του σήματος (Μορφή **A**) είναι (βλ. και σελ.)

$$f(t) = -\frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \left[\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{8}\right) \cos\left(\frac{9\pi n}{8}\right) \sin(n \omega_1 t) \right] \right\} +$$

$$+ \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \left[\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{8}\right) \sin\left(\frac{9\pi n}{8}\right) \cos(n \omega_1 t) \right] \right\}$$

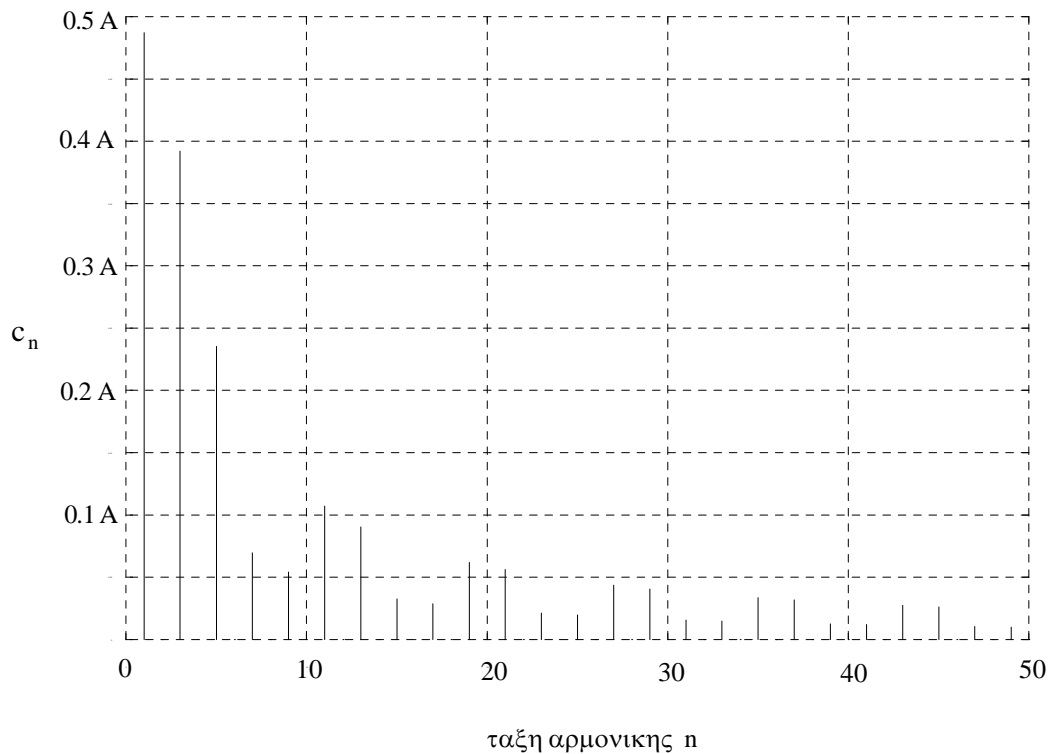
δηλαδή έχουμε:

$$a_n = -\frac{4A}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{8}\right) \cos\left(\frac{9\pi n}{8}\right)$$

και

$$b_n = \frac{4A}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{8}\right) \sin\left(\frac{9\pi n}{8}\right)$$

Οι συντελεστές c_n υπολογίζονται κατά τα γνωστά από την σχέση $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$. Παρακάτω φαίνεται το φάσμα πλάτους του σήματος



6. 4) Τύπος του Parseval

Ένα περιοδικό σήμα $f(t)$ που έχει αναπτύγματα Fourier:

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin(n \omega_1 t + \vartheta_n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{F}_n e^{jn\omega_1 t}$$

έχει ενεργό τιμή f_{ev} που δίδεται από τη γνωστή σχέση: $f_{\text{ev}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt$

Η ενεργός τιμή όμως μπορεί να υπολογιστεί και από την ακόλουθη σχέση που ονομάζεται τύπος του Parseval.

$$f_{\text{ev}}^2 = c_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{c_n}{\sqrt{2}} \right)^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\bar{F}_n|^2 = |\bar{F}_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2|\bar{F}_n|^2$$

Δηλαδή το τετράγωνο της ενεργού τιμής του σήματος ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των ενεργών τιμών των αρμονικών του.

Αν το σήμα $f(t)$ είναι σήμα τάσεως ή ρεύματος, τότε, όπως είναι γνωστό, το τετράγωνο της ενεργού τιμής του είναι ανάλογο της ισχύος που μεταφέρει το σήμα. Παρατηρούμε λοιπόν πως η συνολική ισχύς του σήματος κατανέμεται στις αρμονικές του και αθροίζοντας τις ισχύες όλων των αρμονικών έχουμε την συνολική αυτή ισχύ.

6. 5) Παράμετροι σημάτων αναλυμένων σε σειρά Fourier

6. 5. 1) Ποσοστό ισχύος ε_k της k -οστης αρμονικής και ζώνης αρμονικών

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Parseval μπορούμε να ορίσουμε το ποσοστό ισχύος ε_k (%) που φέρει π.χ. η k -οστη αρμονική (με συχνότητα $k\omega_1$), σε σχέση με την ολική ισχύ του σήματος.

$$\varepsilon_k (\%) = \frac{P_k}{P} = \frac{\left(\frac{c_k}{\sqrt{2}}\right)^2}{c_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{c_n}{\sqrt{2}}\right)^2} \times 100 (\%)$$

όπου P η ολική ισχύς του σήματος και P_k η ισχύς που φέρει η k -οστή αρμονική

Αντίστοιχα το ποσοστό ισχύος $\varepsilon_{k_1-k_2}$ (%) που φέρει μια ζώνη αρμονικών από τη συχνότητα $k_1\omega$ έως τη συχνότητα $k_2\omega$ θα είναι:

$$\varepsilon_{k_1-k_2} (\%) = \frac{P_{k_1-k_2}}{P} = \frac{\sum_{k=k_1}^{k_2} \left(\frac{c_k}{\sqrt{2}}\right)^2}{c_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{c_n}{\sqrt{2}}\right)^2} \times 100 (\%)$$

6. 5. 2) Υπόλοιπο αρμονικών

Μια ακόμη πολύ χρήσιμη παράμετρος για την μελέτη ενός περιοδικού σήματος αναλυμένου κατά Fourier είναι το λεγόμενο υπόλοιπο αρμονικών R_2 όπου:

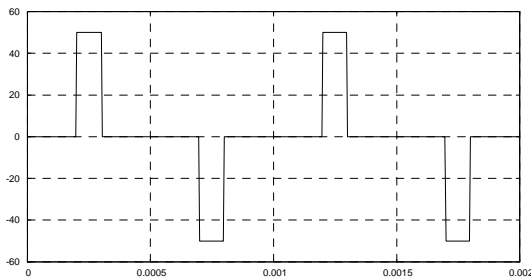
$$R_2 = \sqrt{\left(\frac{c_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{c_3}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{c_4}{\sqrt{2}}\right)^2 + \dots}$$

με χρήση του τύπου Parseval το R_2 γράφεται και ως εξής:

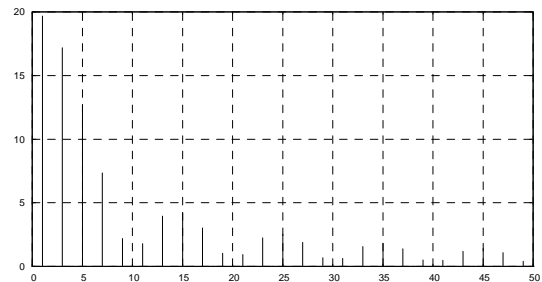
$$R_2 = \sqrt{f_{\varepsilon v}^2 - c_0^2 - \left(\frac{c_1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

Το υπόλοιπο αρμονικών R_2 μας δίνει μια σαφή ένδειξη για το πόσο «πλούσιο» ή «φτωχό» είναι το σήμα σε ανώτερες αρμονικές.

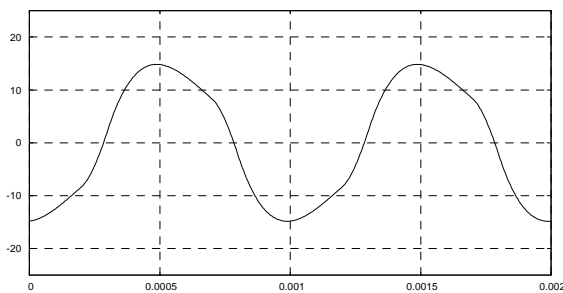
Στα παρακάτω σχήματα φαίνονται δύο διαφορετικά σήματα και τα αντίστοιχα φάσματά πλάτους των σημάτων αυτών.



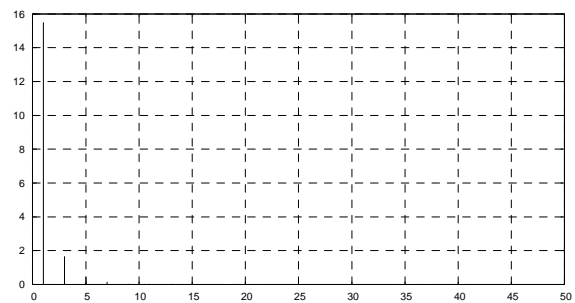
Σήμα με απότομες μεταβολές (ασυνέχειες)



Το φάσμα πλάτους του σήματος είναι πλούσιο σε ανώτερες αρμονικές. Το R_2 έχει μεγάλη τιμή



Σήμα χωρίς απότομες μεταβολές



Το φάσμα πλάτους του σήματος είναι φτωχό σε ανώτερες αρμονικές. Το R_2 έχει μικρή τιμή

Αντίστοιχα με το υπόλοιπο R_2 , μπορεί να οριστεί γενικά το υπόλοιπο R_k

$$R_k = \sqrt{\left(\frac{c_k}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{c_{k+1}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{c_{k+2}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \dots}$$

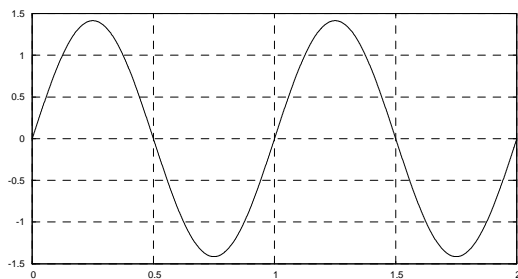
6.5.3) Περιεχόμενο αρμονικών

Μια άλλη χρήσιμη παράμετρος είναι το περιεχόμενο αρμονικών n_π , η καλλίτερα η λεγόμενη «ολική αρμονική παραμόρφωση» (Total Harmonic Distortion, THD (%))

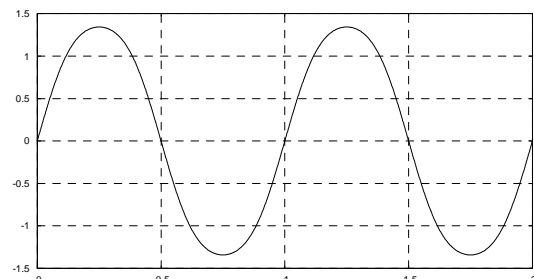
$$n_\pi (\%) = \text{THD} (\%) = \frac{R_2}{\left(\frac{C_1}{\sqrt{2}}\right)} \times 100 (\%)$$

Όσο μικρότερη τιμή έχει η παράμετρος αυτή τόσο το περιοδικό σήμα $f(t)$ πλησιάζει προς το τέλειο (ή καθαρό) ημίτονο, το οποίο προφανώς έχει $\text{THD} = 0 (\%)$

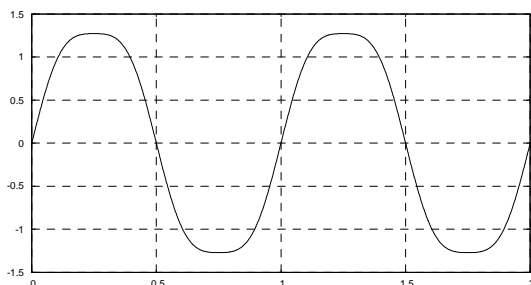
Στα παρακάτω σχήματα φαίνεται ένα καθαρό ημίτονο και κάποια άλλα με παραμορφώσεις.



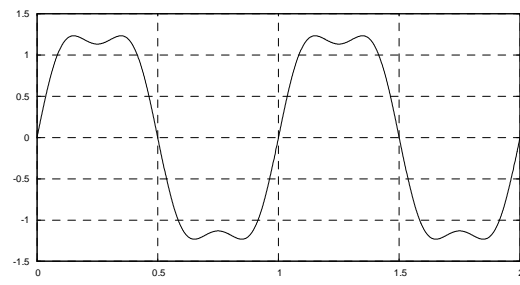
καθαρό ημίτονο χωρίς παραμόρφωση



ημίτονο με παραμόρφωση THD = 5 %



ημίτονο με παραμόρφωση THD = 10 %

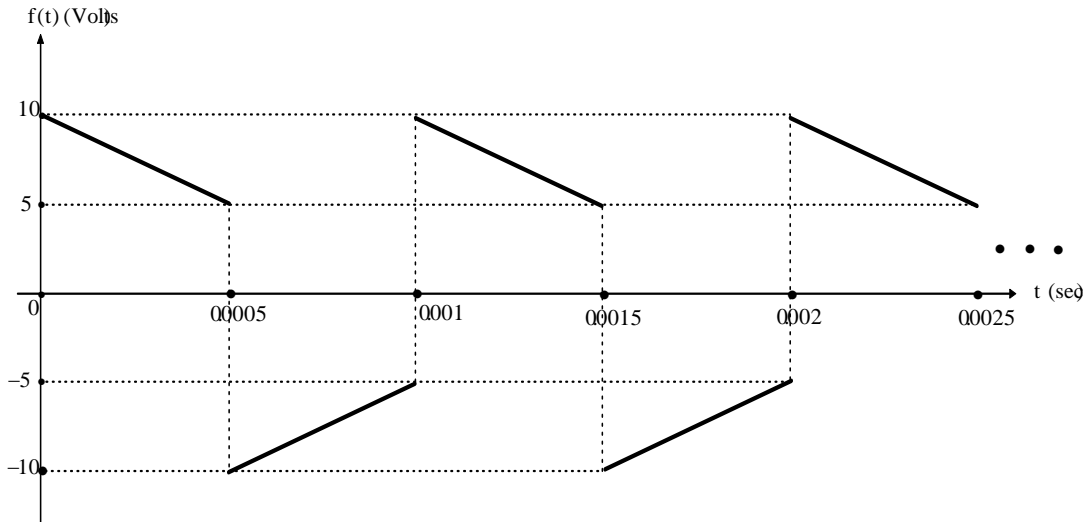


ημίτονο με παραμόρφωση THD = 20 %

Αναφέρουμε εδώ ότι η ημιτονοειδής τάση, 220 V 50 Hz, που δίνεται στους καταναλωτές από την Δ.Ε.Η. δεν είναι απαλλαγμένη από παραμόρφωση και έχει ένα THD περί το 5 % ή και μεγαλύτερο κάποιες φορές. Για τα ηλεκτρικά συστήματα των πολεμικών πλοίων υπάρχουν ειδικοί κανονισμοί που θέτουν όρια στην παραμόρφωση της παρεχόμενης τροφοδοσίας.

6.6) Αριθμητικό παράδειγμα αναλύσεως σήματος σε σειρά Fourier

Θεωρούμε το παρακάτω περιοδικό σήμα $f(t)$



(το σήμα προφανώς συνεχίζεται μέχρι το άπειρο)

Παρατηρώντας την αριθμητική εφαρμογή του **Παραδείγματος 6** (σελ. 176 – 177) βλέπουμε ότι είναι ακριβώς το ίδιο σήμα αρκεί να θέσουμε τις τιμές:

$$A_1 = 10 \text{ V} , \quad A_2 = 5 \text{ V} \quad \text{και} \quad T = 0.001 \text{ sec} , \quad \text{άρα} \quad \omega_1 = 6283.18 \text{ rad/sec}$$

Οι τύποι που δίνουν τους συντελεστές a_n και b_n (**Μορφή Α**) είναι:

$$a_n = \frac{A_1 + A_2}{\pi n} \cdot [1 - (-1)^n] \quad \text{και} \quad b_n = \frac{2(A_1 - A_2)}{\pi^2 n^2} \cdot [1 - (-1)^n]$$

προφανώς $c_0 = 0$ (μέση τιμή του σήματος είναι μηδέν)

και το σήμα γράφεται:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \{ a_n \sin(n \omega_1 t) + b_n \cos(n \omega_1 t) \} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n \omega_1 t + \vartheta_n)$$

όπου ως γνωστόν $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ και $\vartheta_n = \tan^{-1}(b_n / a_n)$

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι τιμές των a_n , b_n , c_n , ϑ_n για $n=1$ έως 20

n	a_n (volts)	b_n (volts)	c_n (volts)	ϑ_n (rad)
1	9.549296	2.026423	9.761939	0.209
2	0	0	0	0
3	3.183099	0.225158	3.191052	0.071
4	0	0	0	0
5	1.909859	0.081057	1.911579	0.042
6	0	0	0	0
7	1.364185	0.041355	1.364812	0.030
8	0	0	0	0
9	1.061033	0.025017	1.061328	0.023
10	0	0	0	0
11	0.868118	0.016747	0.868279	0.019
12	0	0	0	0
13	0.734561	0.011991	0.734659	0.016
14	0	0	0	0
15	0.636620	0.009063	0.636683	0.014
16	0	0	0	0
17	0.561723	0.007012	0.561767	0.012
18	0	0	0	0
19	0.502594	0.005613	0.502626	0.011
20	0	0	0	0

Με βάση τα στοιχεία του ανωτέρω πίνακα η αρμονικές του σήματος θα γράφονται στη **Μορφή**

B:

-1^η αρμονική: $f_1(t) = 9.761939 \sin(\omega_1 t + 0.209)$ Volts

-2^η αρμονική: $f_2(t) = 0$

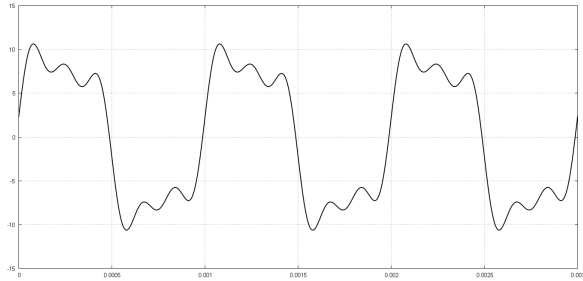
-3^η αρμονική: $f_3(t) = 3.191052 \sin(3\omega_1 t + 0.071)$ Volts

-4^η αρμονική: $f_4(t) = 0$

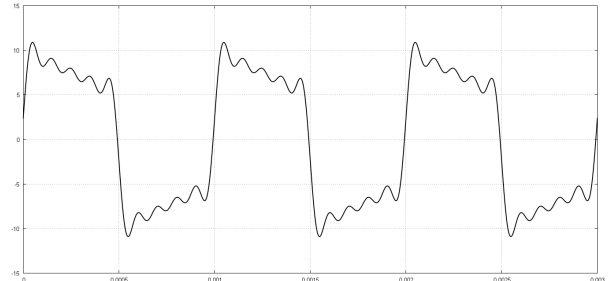
-5^η αρμονική: $f_5(t) = 1.911579 \sin(5\omega_1 t + 0.042)$ Volts

κ.λ.π.

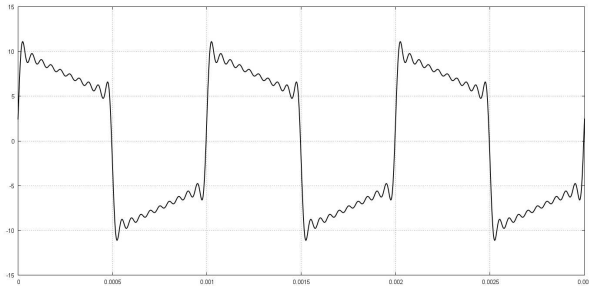
Στα παρακάτω σχήματα φαίνεται η «αναπαραγωγή» του σήματος από τις αρμονικές του χρησιμοποιώντας διαδοχικά τις πρώτες 5, 10, 20, 50 και 100 αρμονικές. Είναι προφανής η βελτίωση που επιτυγχάνεται όσο αυξάνει η τελική τιμή του n



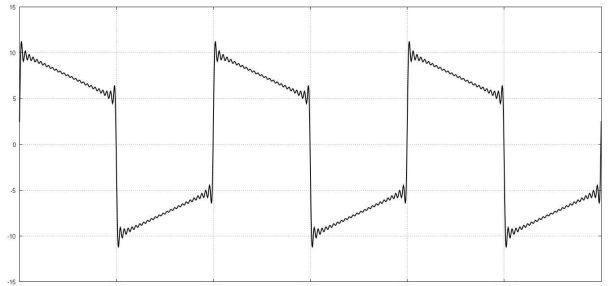
αναπαραγωγή με τις 5 πρώτες αρμονικές ($n = 1$ έως 5)



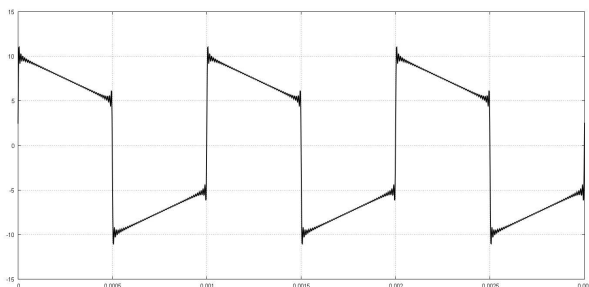
αναπαραγωγή με τις 10 πρώτες αρμονικές ($n = 1$ έως 10)



αναπαραγωγή με τις 20 πρώτες αρμονικές ($n = 1$ έως 20)



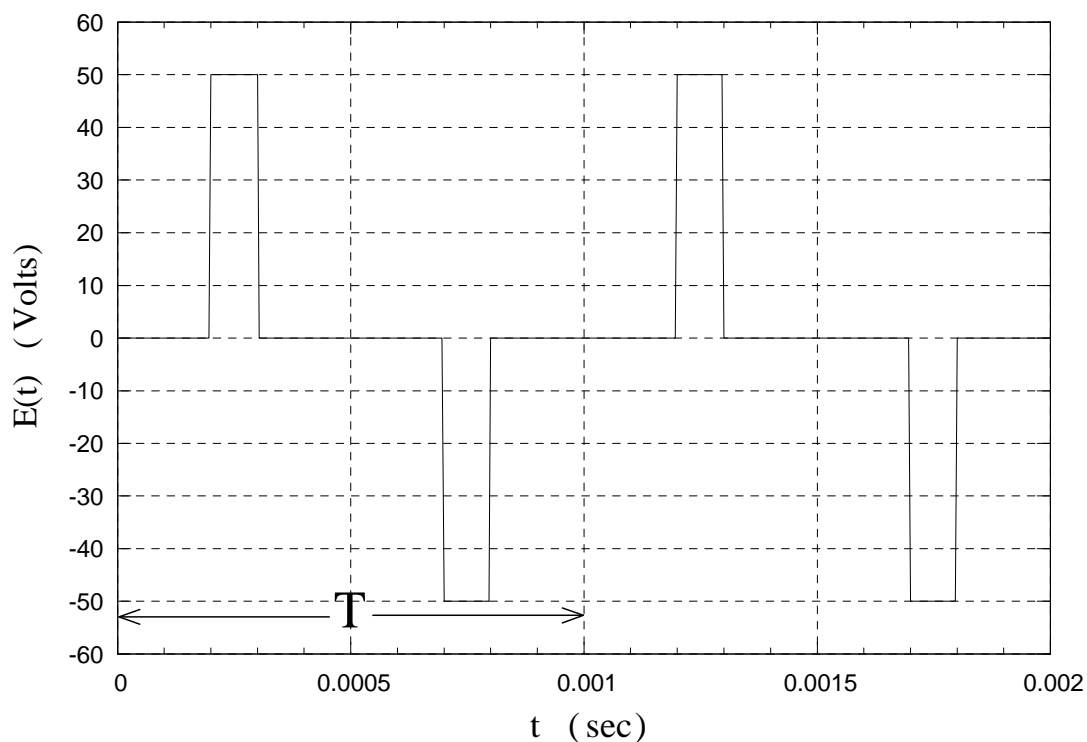
αναπαραγωγή με τις 50 πρώτες αρμονικές ($n = 1$ έως 50)



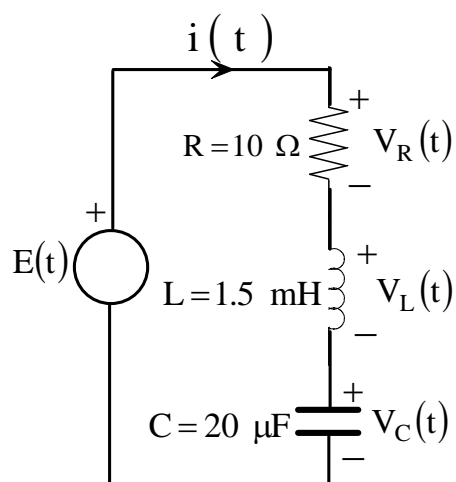
αναπαραγωγή με τις 100 πρώτες αρμονικές ($n = 1$ έως 100)

6.7) Παράδειγμα επίλυσης ηλεκτρικού δικτύου με χρήση ανάλυσης Fourier

Έχουμε το παρακάτω περιοδικό σήμα $E(t)$:



Θεωρούμε ότι στο παρακάτω ηλ. δίκτυο η τάση της πηγής έχει τη μορφή του σήματος $E(t)$, και έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τα μεγέθη : $i(t)$, $V_R(t)$, $V_L(t)$, $V_C(t)$



6.7.1) Εύρεση αναπτυγμάτων Fourier του σήματος εισόδου $E(t)$

Αρχικά θα αναλύσουμε το σήμα $E(t)$ σε σειρά Fourier τριγωνομετρικής μορφής A . Εύκολα φαίνεται ότι το σήμα αυτό αντιπροσωπεύεται από το **παράδειγμα 2** (σελ. 164) των αναπτυγμάτων Fourier που προαναφέρθηκαν, αρκεί να θέσουμε:

$$A_1 = 50, \quad -A_2 = -50, \quad T = 0.001 \text{ sec}, \quad t_1 = 0.0002 \text{ sec} = 0.2T \text{ sec},$$

$$t_2 = 0.0003 \text{ sec} = 0.3T \text{ sec}, \quad t_3 = 0.0007 \text{ sec} = 0.7T \text{ sec}, \quad t_4 = 0.0008 \text{ sec} = 0.8T \text{ sec}$$

Έτσι θα έχουμε:

Η μέση τιμή του σήματος $c_0 = 0$ λόγω της προφανούς συμμετρίας

ο συντελεστής a_n θα προκύψει:

$$a_n = \frac{50}{\pi n} [-\cos(2\pi n \cdot 0.3) + \cos(2\pi n \cdot 0.2)] - \frac{50}{\pi n} [-\cos(2\pi n \cdot 0.8) + \cos(2\pi n \cdot 0.7)]$$

$$\text{ή} \quad a_n = \frac{50}{\pi n} [2 \sin(0.5\pi n) \sin(0.1\pi n) - 2 \sin(1.5\pi n) \sin(0.1\pi n)]$$

$$\text{άρα:} \quad a_n = \frac{100}{\pi n} [\sin(0.1\pi n) (\sin(0.5\pi n) - \sin(1.5\pi n))]$$

και τελικά:

$$a_n = \frac{100}{\pi n} \sin(0.1\pi n) 2 \sin(-0.5\pi n) \cos(\pi n) \Rightarrow$$

$$a_n = -\frac{200 \cdot (-1)^n}{\pi n} \sin(0.1\pi n) \sin(0.5\pi n)$$

παρατηρούμε ότι $a_n = 0$ για $n = 2, 4, 6, 8, \dots$ λόγω του όρου $\sin(0.5\pi n)$

Για τον συντελεστή b_n θα πάρουμε:

$$b_n = \frac{50}{\pi n} [\sin(2\pi n \cdot 0.3) - \sin(2\pi n \cdot 0.2)] - \frac{50}{\pi n} [\sin(2\pi n \cdot 0.8) - \sin(2\pi n \cdot 0.7)]$$

$$\text{ή:} \quad b_n = \frac{50}{\pi n} [2 \sin(0.1\pi n) \cos(0.5\pi n) - 2 \sin(0.1\pi n) \cos(1.5\pi n)]$$

$$\text{άρα:} \quad b_n = \frac{100}{\pi n} [\sin(0.1\pi n) (\cos(0.5\pi n) - \cos(1.5\pi n))]$$

και τελικά:

$$b_n = \frac{100}{\pi n} \sin(0.1\pi n) 2 \sin(\pi n) \sin(0.5\pi n)$$

δηλαδή $b_n = 0$ για κάθε n , λόγω του όρου $\sin(\pi n)$.

Συνεπώς το ανάπτυγμα του σήματος $E(t)$ θα γράφεται:

$$E(t) = -\frac{200}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(0.1 \pi n) \sin(0.5 \pi n)}{n} \sin(n \omega_1 t)$$

όπου :

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.001} = 6283.18 \text{ rad/sec}$$

Στον παρακάτω πίνακα υπολογίζουμε αναλυτικά τους συντελεστές του αναπτύγματος Fourier σε τριγωνομετρική μορφή A , μέχρι την 11^η αρμονική.

Τάξη αρμονικής n	Συντελεστής a_n	Συντελεστής b_n
1	19.6726	0
2	0	0
3	-17.1679	0
4	0	0
5	12.7324	0
6	0	0
7	-7.3577	0
8	0	0
9	2.1858	0
10	0	0
11	1.7884	0

κ.λ.π.....

άρα το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier σε τριγωνομετρική μορφή A θα γράφεται :

$$E(t) = 19.6726 \sin(\omega_1 t) - 17.1679 \sin(3\omega_1 t) + 12.7324 \sin(5\omega_1 t) - 7.3577 \sin(7\omega_1 t) + \\ + 2.1858 \sin(9\omega_1 t) + 1.7884 \sin(11\omega_1 t) + \dots$$

όπου :

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = 6283.2 \text{ rad/sec}$$

Αν θέλουμε το ανάπτυγμα σε τριγωνομετρική μορφή **B** εφαρμόζουμε τις σχέσεις :

Τριγωνομετρική μορφή **B** :

$$c_0 = c_0 \quad \text{όπως στην τριγωνομετρική μορφή **A** (εδώ } c_0 = 0 \text{)}$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\varphi_n = \tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

Προσοχή χρειάζεται στην εκλογή της τιμής της γωνίας φ_n που μπορεί να είναι 0 (διότι $b_n = 0$ για κάθε n), αλλά μπορεί να πάρει και την τιμή $\pm \pi$, διότι:

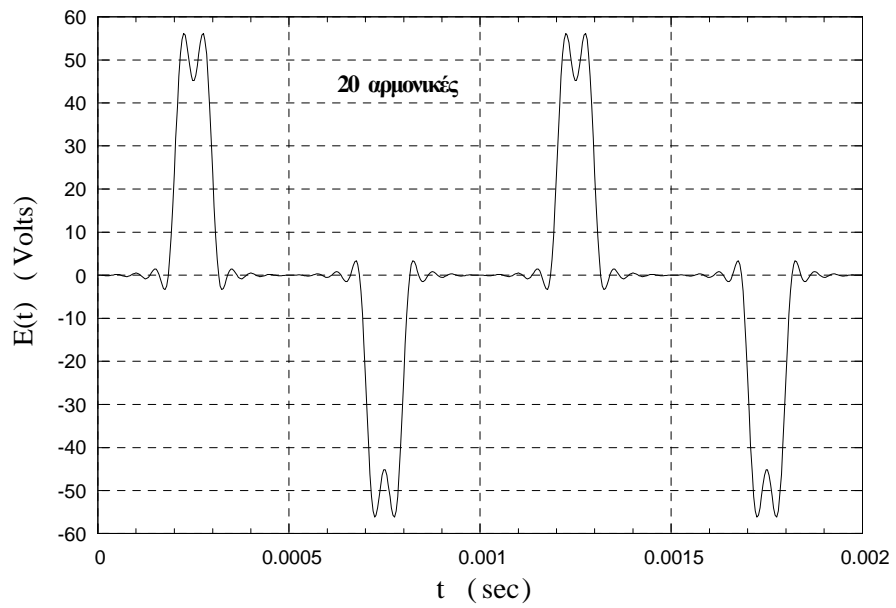
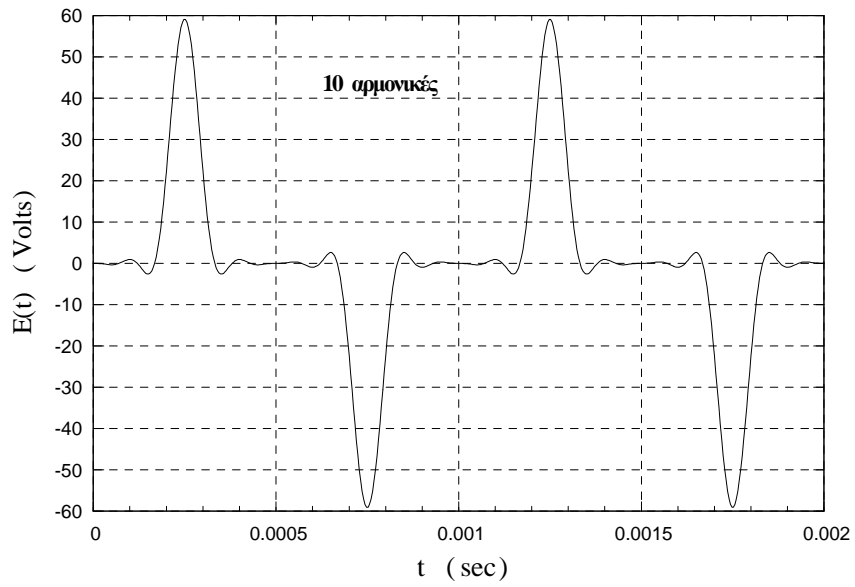
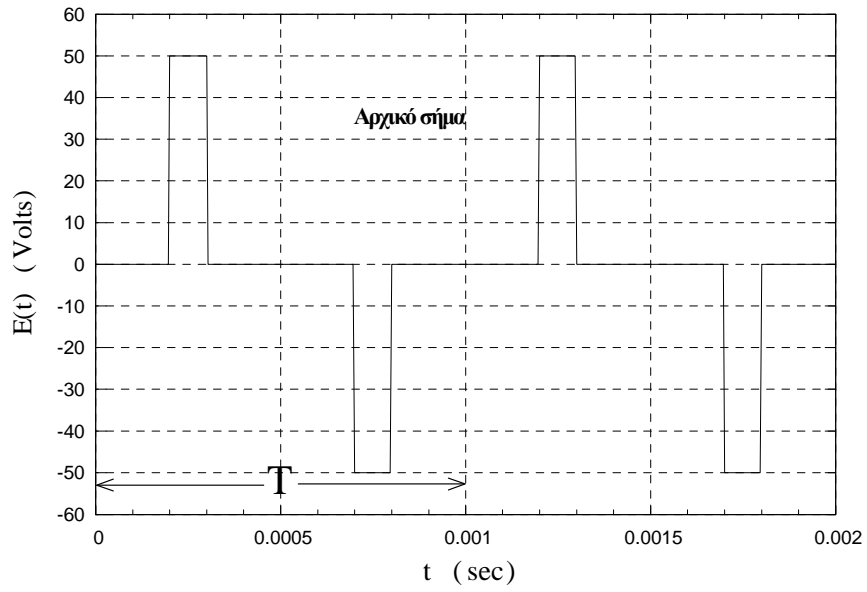
$$\tan^{-1}(0) = 0 \quad \text{ή} \quad \pm \pi$$

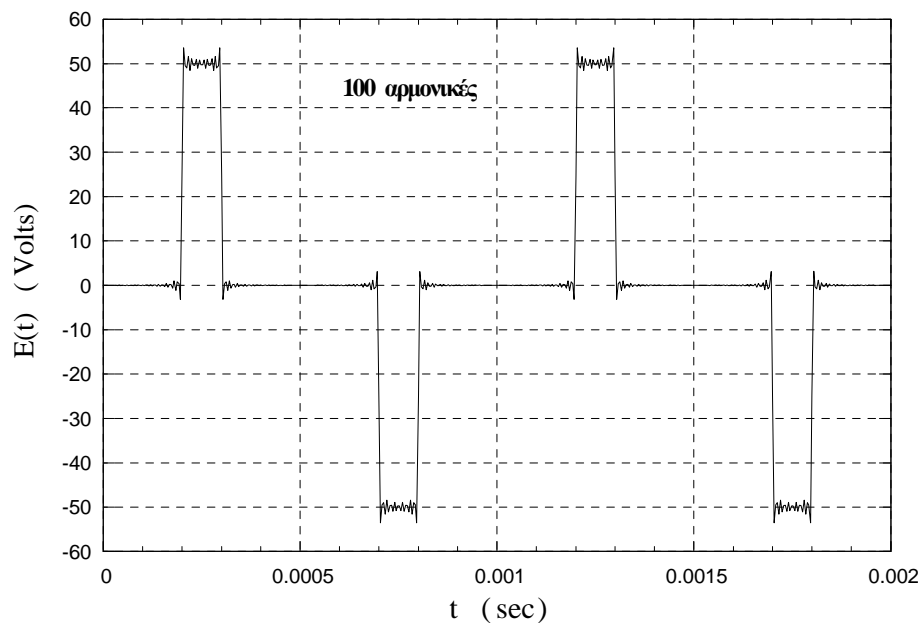
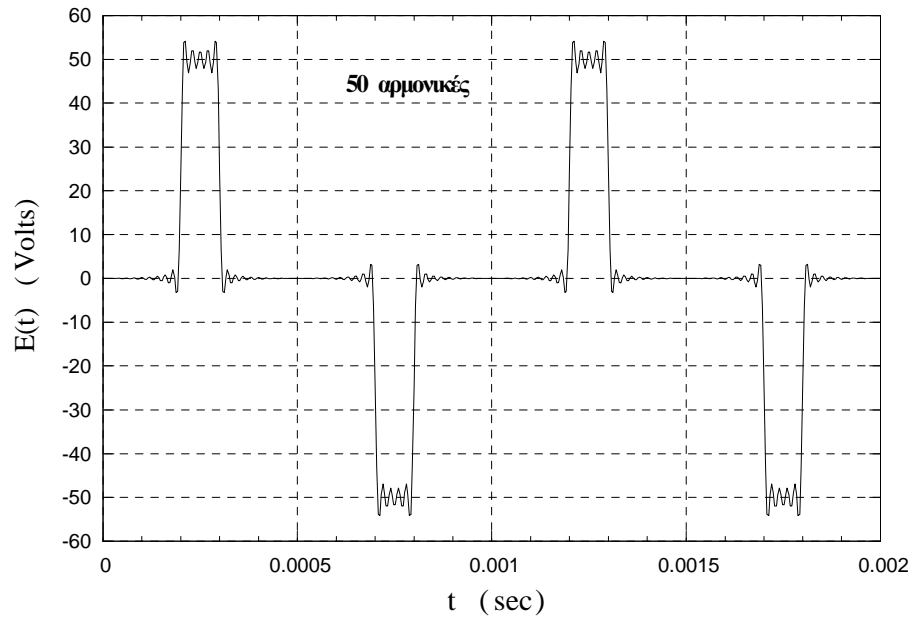
Στην περίπτωση μας θέτουμε $\varphi_n = 0$ όταν ο συντελεστής a_n του ημιτόνου στην τριγωνομετρική μορφή **A** είναι θετικός και $\varphi_n = \pi$ όταν ο συντελεστής a_n είναι αρνητικός, κάνοντας χρήση της σχέσης $-\sin(\omega t) = \sin(\omega t \pm \pi)$ και εκλέγοντας το $+\pi$.

Έτσι το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier σε τριγωνομετρική μορφή **B** θα είναι :

$$E(t) = 19.6726 \sin(\omega_1 t) + 17.1679 \sin(3\omega_1 t + \pi) + 12.7324 \sin(5\omega_1 t) + 7.3577 \sin(7\omega_1 t + \pi) + \\ + 2.1858 \sin(9\omega_1 t) + 1.7884 \sin(11\omega_1 t) + \dots$$

Στα επόμενα σχήματα δείχνουμε την αναπαραγωγή του σήματος $E(t)$ από τις αρμονικές του. Συγκεκριμένα φαίνεται διαδοχικά η αναπαραγωγή του σήματος από τις 10 πρώτες αρμονικές του (δηλ. ο δείκτης n παίρνει τιμές από 1 μέχρι 10), από τις 20, από τις 50 και τέλος από τις 100 πρώτες αρμονικές διαδοχικά. Είναι προφανής η βελτίωση στην ακρίβεια αναπαραγωγής που επιτυγχάνεται όσο αυξάνει ο αριθμός των αρμονικών που χρησιμοποιούνται (ή διαφορετικά όσο αυξάνει ο αριθμός των προσθετών όρων στη σειρά Fourier)





Η ενεργός τιμή του σήματος $E(t)$ μπορεί εύκολα να υπολογιστεί αναλυτικά :

$$E_{\text{Ev}\delta} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T E(t)^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{0.001} (50^2(0.0003 - 0.0002) + 50^2(0.0008 - 0.0007))} = 22.3607 \text{ [V]}$$

αν εφαρμόσουμε το θεώρημα Parseval για 10, 20, 50, 100 αρμονικές διαδοχικά θα έχουμε:

$$\text{- Για 10 αρμονικές: } E_{\text{Ev}\delta} = \sqrt{c_0^2 + \left(\frac{c_1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{c_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{c_{10}}{\sqrt{2}}\right)^2} = 21.2459 \text{ [V]}$$

$$\text{- Για 20 αρμονικές: } E_{\text{Ev}\delta} = \sqrt{c_0^2 + \left(\frac{c_1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{c_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{c_{20}}{\sqrt{2}}\right)^2} = 21.7937 \text{ [V]}$$

$$\text{- Για 50 αρμονικές : } E_{\text{Ev}\delta} = \sqrt{c_0^2 + \left(\frac{c_1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{c_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{c_{50}}{\sqrt{2}}\right)^2} = 22.1334 \text{ [V]}$$

$$\text{- Για 100 αρμονικές : } E_{\text{Ev}\delta} = \sqrt{c_0^2 + \left(\frac{c_1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{c_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{c_{100}}{\sqrt{2}}\right)^2} = 22.2472 \text{ [V]}$$

(όπου c_1, c_2, \dots , οι συντελεστές του αναπτύγματος σε τριγωνομετρική μορφή **B**)

Παρατηρούμε ότι το σχετικό σφάλμα που προκύπτει από τους υπολογισμούς αυτούς είναι :

$$\text{- Για 10 αρμονικές : } \sigma = \frac{22.3607 - 21.2459}{22.3607} \cdot 100 = 4.98 \%$$

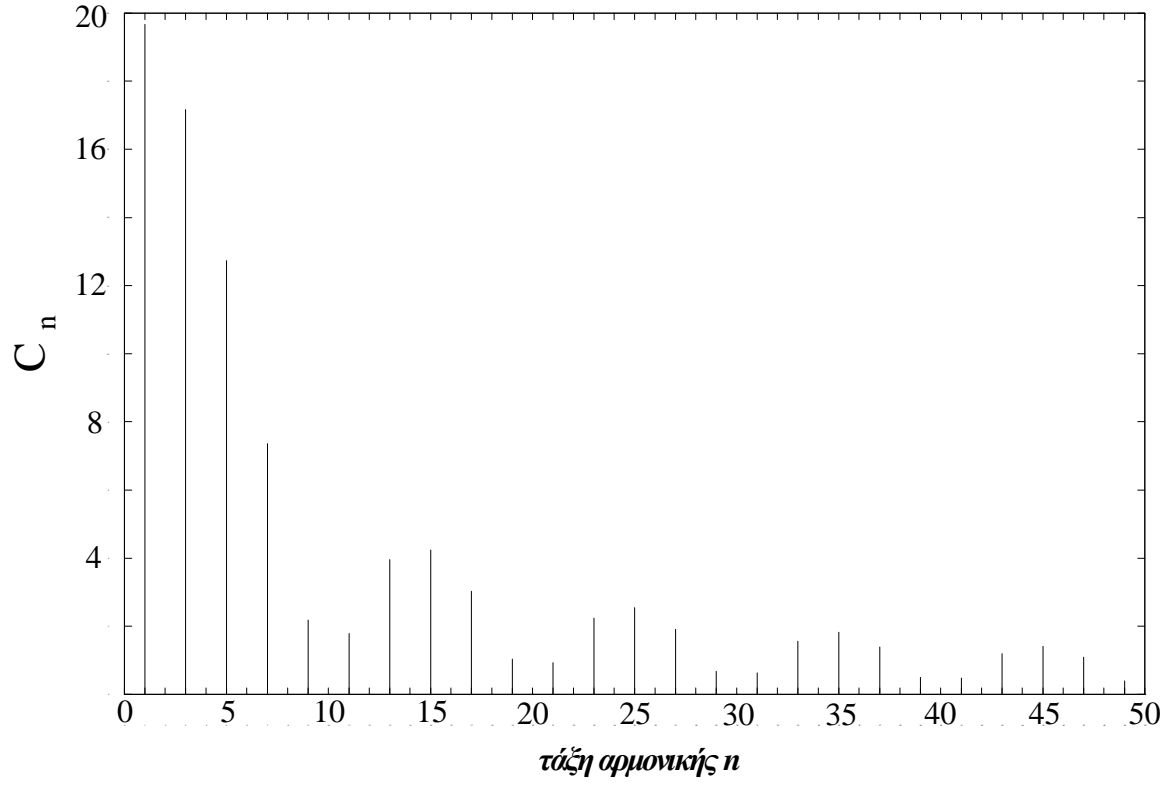
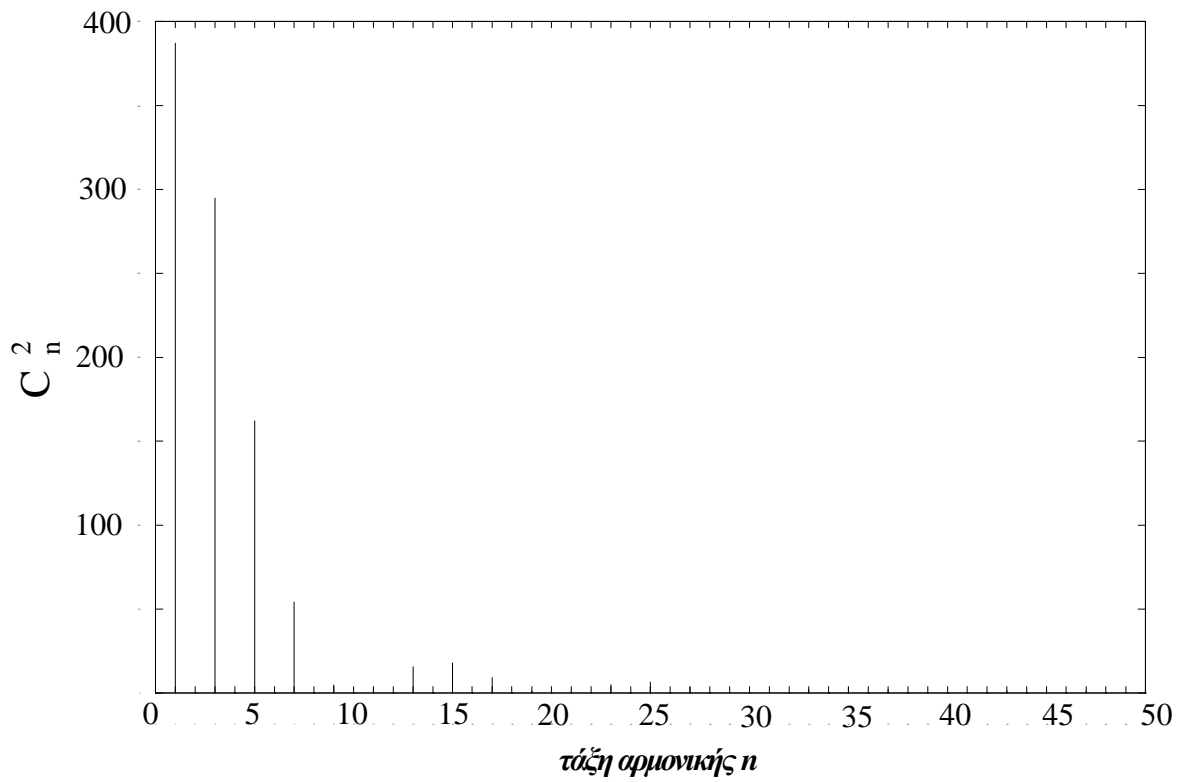
αντίστοιχα :

$$\text{- Για 20 αρμονικές : } \sigma = 2.53 \%$$

$$\text{- Για 50 αρμονικές : } \sigma = 1.02 \%$$

$$\text{- Για 100 αρμονικές : } \sigma = 0.51 \%$$

Στα επόμενα σχήματα φαίνεται το φάσμα πλάτους (συντελεστές c_n) και το φάσμα ισχύος (συντελεστές c_n^2) συναρτήσει του n (τάξη αρμονικής) για το σήμα $E(t)$

Φάσμα πλάτους της $E(t)$ Φάσμα ισχύος της $E(t)$

6.7.2) Επίλυση του κυκλώματος

Προχωρούμε τώρα στην επίλυση του κυκλώματος που αναφέραμε στην αρχή.

Το απλό αυτό κύκλωμα είναι ένα γραμμικό και χρονικά σταθερό σύστημα με είσοδο (διέγερση) την τάση της πηγής $E(t)$ και 4 εξόδους (αποκρίσεις) που είναι τα μεγέθη $i(t)$, $V_R(t)$, $V_L(t)$, $V_C(t)$.

Για κάθε ζεύγος εισόδου – εξόδου μπορούμε εύκολα να βρούμε την αντίστοιχη συνάρτηση μεταφοράς $H(j\omega)$, στο πεδίο της συχνότητας.

Έτσι θα έχουμε:

$$H_1(j\omega) = \frac{\bar{I}}{\bar{E}} = \frac{\bar{E} / \bar{Z}_{ολ}(\omega)}{\bar{E}} = \frac{1}{\bar{Z}_{ολ}(\omega)} = \frac{1}{R + j\omega L - j \frac{1}{\omega C}}$$

$$\text{άρα: } H_1(j\omega) = \frac{1}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = \frac{\omega C}{\omega C R + j(\omega^2 L C - 1)}$$

$$\text{και επίσης } H_2(j\omega) = \frac{\bar{V}_R}{\bar{E}} = \frac{\bar{E} \cdot \frac{R}{R + j\omega L - j/\omega C}}{\bar{E}} = \frac{R}{R + j\omega L - j \frac{1}{\omega C}}$$

$$\text{άρα: } H_2(j\omega) = \frac{\omega C R}{\omega C R + j(\omega^2 L C - 1)}$$

με όμοιο τρόπο θα βρούμε:

$$H_3(j\omega) = \frac{\bar{V}_L}{\bar{E}} = \frac{\bar{E} \cdot \frac{j\omega L}{R + j\omega L - j/\omega C}}{\bar{E}} = \frac{j\omega^2 L C}{\omega C R + j(\omega^2 L C - 1)}$$

$$H_4(j\omega) = \frac{\bar{V}_C}{\bar{E}} = \frac{\bar{E} \cdot \frac{-j/\omega C}{R + j\omega L - j/\omega C}}{\bar{E}} = \frac{-j}{\omega C R + j(\omega^2 L C - 1)}$$

Έχουμε το ανάπτυγμα Fourier του σήματος $E(t)$ σε μορφή **B**:

$$E(t) = 19.6726 \sin(\omega_1 t) + 17.1679 \sin(3\omega_1 t + \pi) + 12.7324 \sin(5\omega_1 t) + 7.3577 \sin(7\omega_1 t + \pi) + 2.1858 \sin(9\omega_1 t) + 1.7884 \sin(11\omega_1 t) + \dots$$

Όπως προαναφέραμε στο ανάπτυγμα αυτό υπάρχουν μόνον οι περιττές αρμονικές δηλ. η αρίθμηση είναι $n = 1, 3, 5, 7, \dots$

Για κάθε αρμονική γράφουμε τον αντίστοιχο παραστατικό μιγαδικό (phasor)

$$1^{\text{η}} \text{ αρμονική} \quad \omega = \omega_1 \quad \bar{E}(j\omega_1) = 19.6726 e^{j0}$$

$$3^{\text{η}} \text{ αρμονική} \quad \omega_3 = 3\omega_1 \quad \bar{E}(j\omega_3) = 17.1679 e^{j\pi} = 17.1679 e^{j180}$$

$$5^{\text{η}} \text{ αρμονική} \quad \omega_5 = 5\omega_1 \quad \bar{E}(j\omega_5) = 12.7324 e^{j0}$$

$$7^{\text{η}} \text{ αρμονική} \quad \omega_7 = 7\omega_1 \quad \bar{E}(j\omega_7) = 7.3577 e^{j\pi} = 7.3577 e^{j180}$$

$$9^{\text{η}} \text{ αρμονική} \quad \omega_9 = 9\omega_1 \quad \bar{E}(j\omega_9) = 2.1858 e^{j0}$$

$$11^{\text{η}} \text{ αρμονική} \quad \omega_{11} = 11\omega_1 \quad \bar{E}(j\omega_{11}) = 1.7884 e^{j0}$$

κ.λ.π.....

Τα ζητούμενα μεγέθη $i(t)$, $V_R(t)$, $V_L(t)$, $V_C(t)$, **στη μόνιμη κατάσταση**, θα βρεθούν και αυτά σε μορφή αναπτυγμάτων Fourier όπως το σήμα εισόδου $E(t)$. Σε κάθε ανάπτυγμα οι όροι (αρμονικές) προκύπτουν από τους αντίστοιχους παραστατικούς μιγαδικούς, οι οποίοι μπορούν να βρεθούν εύκολα μέσω των συναρτήσεων μεταφοράς με χρήση της γενικής σχέσεως:

$$\begin{array}{ccc} \frac{f(t)}{\bar{F}(j\omega)} & \longrightarrow & \boxed{H(j\omega)} \longrightarrow \frac{y(t)}{\bar{Y}(j\omega)} \end{array}$$

$$\bar{Y}(j\omega) = H(j\omega) \bar{F}(j\omega)$$

Σε κάθε περίπτωση είναι γνωστός ο παραστατικός μιγαδικός της εισόδου $\bar{F}(j\omega)$ και η συνάρτηση μεταφοράς $H(j\omega)$, άρα υπολογισμός του παραστατικού μιγαδικού της εξόδου γίνεται με ένα απλό πολλαπλασιασμό.

Έτσι για το ρεύμα $i(t)$ θα έχουμε:

$$\bar{I}(j\omega_1) = H_1(j\omega_1) \bar{E}(j\omega_1)$$

$$\bar{I}(j\omega_3) = H_1(j\omega_3) \bar{E}(j\omega_3) \quad \text{κ.λ.π.}$$

Γενικά: $\bar{I}(j\omega_n) = H_1(j\omega_n) \bar{E}(j\omega_n) \quad \text{για } n = 1, 3, 5, \dots$

Με όμοιο τρόπο

$$\bar{V}_R(j\omega_n) = H_2(j\omega_n) \bar{E}(j\omega_n) \quad \text{για } n = 1, 3, 5, \dots$$

$$\bar{V}_L(j\omega_n) = H_3(j\omega_n) \bar{E}(j\omega_n) \quad \text{για } n = 1, 3, 5, \dots$$

$$\bar{V}_C(j\omega_n) = H_4(j\omega_n) \bar{E}(j\omega_n) \quad \text{για } n = 1, 3, 5, \dots$$

Στους πίνακες που ακολουθούν, σημειώνονται, για τις συχνότητες των 11 πρώτων αρμονικών, οι τιμές των παραστατικών μιγαδικών $\bar{E}(j\omega_n)$, (δηλ. της διέγερσης), οι τιμές των συναρτήσεων μεταφοράς $H_1(j\omega_n)$, $H_2(j\omega_n)$, $H_3(j\omega_n)$, $H_4(j\omega_n)$ καθώς και οι τιμές των παραστατικών μιγαδικών των αποκρίσεων $\bar{I}(j\omega_n)$, $\bar{V}_R(j\omega_n)$, $\bar{V}_L(j\omega_n)$, και $\bar{V}_C(j\omega_n)$

Όλοι οι μιγαδικοί είναι γραμμένοι σε εκθετική μορφή και οι γωνίες είναι σε μοίρες

Πίνακας 1: υπολογισμός $\bar{I}(j\omega_n) = H_1(j\omega_n)\bar{E}(j\omega_n)$

n τάξη αρμονικής	κυκλική συχνότητα ω_n (rad / sec)	$\bar{E}(j\omega_n)$ (V)	$H_1(j\omega_n)$	$\bar{I}(j\omega_n)$ (A)
1	6283.2	$19.6726 e^{j0^\circ}$	$0.0989 e^{-j8.3^\circ}$	$1.9456 e^{-j8.3^\circ}$
2	12566.4	0	–	0
3	18849.6	$17.1679 e^{j180^\circ}$	$0.0364 e^{-j68.7^\circ}$	$0.6249 e^{j111.3^\circ}$
4	25132.7	0	–	0
5	31415.9	$12.7324 e^{j0^\circ}$	$0.0215 e^{-j77.6^\circ}$	$0.2737 e^{-j77.6^\circ}$
6	37699.1	0	–	0
7	43982.3	$7.3577 e^{j180^\circ}$	$0.0152 e^{-j81.2^\circ}$	$0.1118 e^{j98.8^\circ}$
8	50265.5	0	–	0
9	56548.7	$2.1858 e^{j0^\circ}$	$0.0118 e^{-j83.2^\circ}$	$0.0258 e^{-j83.2^\circ}$
10	62831.9	0	–	0
11	69915.0	$1.7884 e^{j0^\circ}$	$0.0097 e^{-j84.4^\circ}$	$0.0173 e^{-j84.4^\circ}$

Με βάση τα δεδομένα του πίνακα 1 το ρεύμα $i(t)$ γράφεται σε μορφή αναπτύγματος Fourier, (Τριγωνομετρικής μορφής **B**), και για τις πρώτες 11 αρμονικές, στην ακόλουθη μορφή:

$$i(t) = 1.9456 \sin(\omega_1 t - 8.3^\circ) + 0.6249 \sin(3\omega_1 t + 111.3^\circ) + 0.2737 \sin(5\omega_1 t - 77.6^\circ) + \\ + 0.1118 \sin(7\omega_1 t + 98.8^\circ) + 0.0258 \sin(9\omega_1 t - 83.2^\circ) + 0.0173 \sin(11\omega_1 t - 84.4^\circ) + \dots$$

(Amp)

Πίνακας 2: υπολογισμός $\bar{V}_R(j\omega_n) = H_2(j\omega_n)\bar{E}(j\omega_n)$

n τάξη αρμονικής	κυκλική συχνότητα ω_n (rad/sec)	$\bar{E}(j\omega_n)$ (V)	$H_2(j\omega_n)$	$\bar{V}_R(j\omega_n)$ (V)
1	6283.2	$19.6726 e^{j0^\circ}$	$0.9894 e^{-j8.3^\circ}$	$19.4640 e^{-j8.3^\circ}$
2	12566.4	0	–	0
3	18849.6	$17.1679 e^{j180^\circ}$	$0.3636 e^{-j68.7^\circ}$	$6.2422 e^{j111.3^\circ}$
4	25132.7	0	–	0
5	31415.9	$12.7324 e^{j0^\circ}$	$0.2145 e^{-j77.6^\circ}$	$2.7311 e^{-j77.6^\circ}$
6	37699.1	0	–	0
7	43982.3	$7.3577 e^{j180^\circ}$	$0.1524 e^{-j81.2^\circ}$	$1.1213 e^{j98.8^\circ}$
8	50265.5	0	–	0
9	56548.7	$2.1858 e^{j0^\circ}$	$0.1183 e^{-j83.2^\circ}$	$0.2586 e^{-j83.2^\circ}$
10	62831.9	0	–	0
11	69915.0	$1.7884 e^{j0^\circ}$	$0.0967 e^{-j84.4^\circ}$	$0.1729 e^{-j84.4^\circ}$

Με βάση τα δεδομένα του πίνακα 2 η τάση $V_R(t)$ γράφεται σε μορφή αναπτύγματος Fourier, (Τριγωνομετρικής μορφής **B**), και για τις πρώτες 11 αρμονικές, στην ακόλουθη μορφή:

$$V_R(t) = 19.4640 \sin(\omega_1 t - 8.3^\circ) + 6.2422 \sin(3\omega_1 t + 111.3^\circ) + 2.7311 \sin(5\omega_1 t - 77.6^\circ) \\ + 1.1213 \sin(7\omega_1 t + 98.8^\circ) + 0.2586 \sin(9\omega_1 t - 83.2^\circ) + 0.1729 \sin(11\omega_1 t - 84.4^\circ) + \dots \\ \text{(Volts)}$$

Πίνακας 3: υπολογισμός $\bar{V}_L(j\omega_n) = H_3(j\omega_n)\bar{E}(j\omega_n)$

n τάξη αρμονικής	κυκλική συχνότητα ω_n (rad/sec)	$\bar{E}(j\omega_n)$ (V)	$H_3(j\omega_n)$	$\bar{V}_L(j\omega_n)$ (V)
1	6283.2	$19.6726 e^{j0^\circ}$	$0.9325 e^{j81.6^\circ}$	$18.3447 e^{j81.6^\circ}$
2	12566.4	0	–	0
3	18849.6	$17.1679 e^{j180^\circ}$	$1.0280 e^{j21.3^\circ}$	$17.6486 e^{-j158.7^\circ}$
4	25132.7	0	–	0
5	31415.9	$12.7324 e^{j0^\circ}$	$1.0109 e^{j12.4^\circ}$	$12.8712 e^{j12.4^\circ}$
6	37699.1	0	–	0
7	43982.3	$7.3577 e^{j180^\circ}$	$1.0056 e^{j8.8^\circ}$	$7.3989 e^{-j171.2^\circ}$
8	50265.5	0	–	0
9	56548.7	$2.1858 e^{j0^\circ}$	$1.0034 e^{j6.8^\circ}$	$2.1932 e^{j6.8^\circ}$
10	62831.9	0	–	0
11	69915.0	$1.7884 e^{j0^\circ}$	$1.0023 e^{j5.6^\circ}$	$1.7925 e^{j5.6^\circ}$

Με βάση τα δεδομένα του πίνακα 3 η τάση $V_L(t)$ γράφεται σε μορφή αναπτύγματος Fourier, (Τριγωνομετρικής μορφής **B**) και για τις πρώτες 11 αρμονικές, στην ακόλουθη μορφή:

$$V_L(t) = 18.3447 \sin(\omega_1 t + 81.6^\circ) + 17.6486 \sin(3\omega_1 t - 158.7^\circ) + 12.8712 \sin(5\omega_1 t + 12.4^\circ) + 7.3989 \sin(7\omega_1 t - 171.2^\circ) + 2.1932 \sin(9\omega_1 t + 6.8^\circ) + 1.7225 \sin(11\omega_1 t + 5.6^\circ) + \dots \text{ (Volts)}$$

Πίνακας 4: υπολογισμός $\bar{V}_C(j\omega_n) = H_4(j\omega_n)\bar{E}(j\omega_n)$

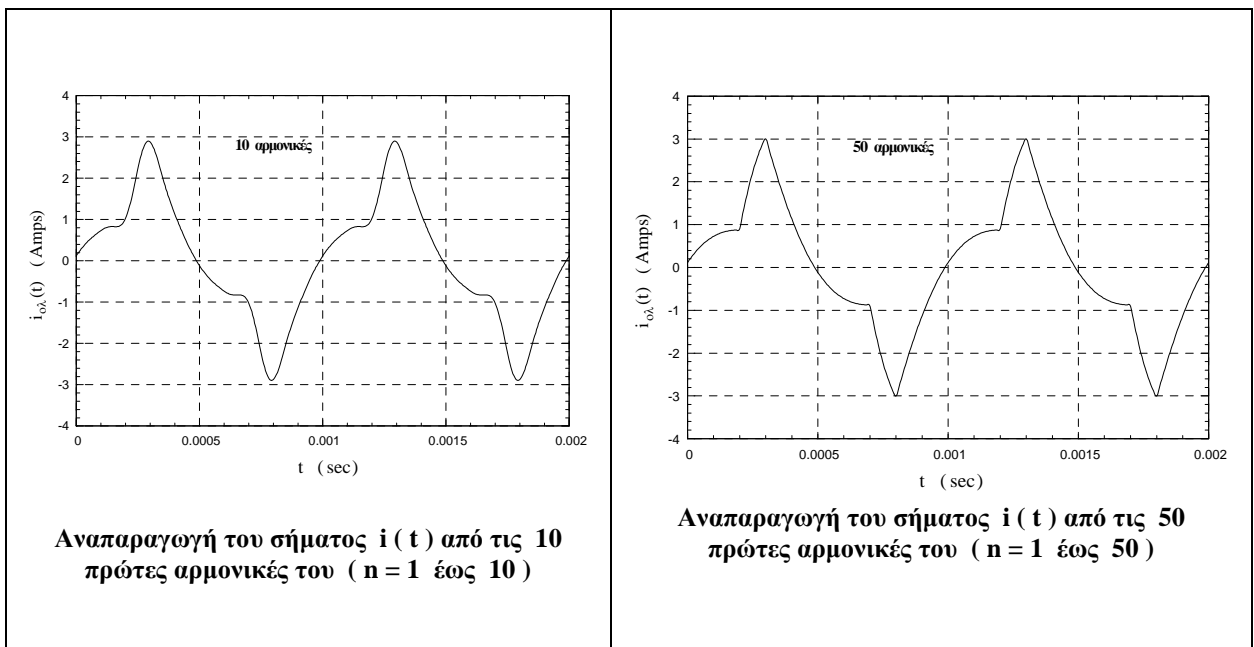
N τάξη αρμονικής	κυκλική συχνότητα ω_n (rad/sec)	$\bar{E}(j\omega_n)$ (V)	$H_4(j\omega_n)$	$\bar{V}_C(j\omega_n)$ (V)
1	6283.2	$19.6726 e^{j0^\circ}$	$0.7873 e^{-j98.3^\circ}$	$15.4882 e^{-j98.3^\circ}$
2	12566.4	0	–	0
3	18849.6	$17.1679 e^{j180^\circ}$	$0.0964 e^{-j158.7^\circ}$	$1.6550 e^{j21.3^\circ}$
4	25132.7	0	–	0
5	31415.9	$12.7324 e^{j0^\circ}$	$0.0341 e^{-j167.6^\circ}$	$0.4342 e^{-j167.6^\circ}$
6	37699.1	0	–	0
7	43982.3	$7.3577 e^{j180^\circ}$	$0.0173 e^{-j171.2^\circ}$	$0.1273 e^{j8.8^\circ}$
8	50265.5	0	–	0
9	56548.7	$2.1858 e^{j0^\circ}$	$0.0105 e^{-j173.2^\circ}$	$0.0229 e^{-j173.2^\circ}$
10	62831.9	0	–	0
11	69915.0	$1.7884 e^{j0^\circ}$	$0.0070 e^{-j174.4^\circ}$	$0.0125 e^{-j174.4^\circ}$

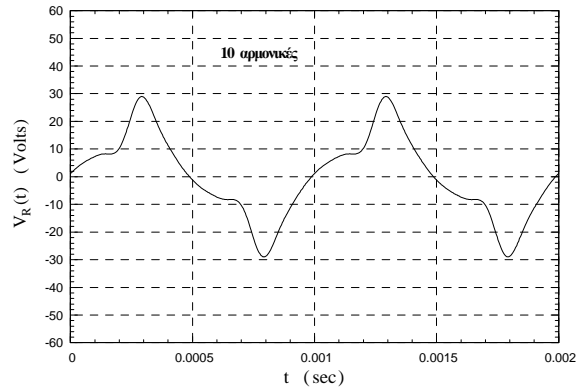
Με βάση τα δεδομένα του πίνακα 4 η τάση $V_C(t)$ γράφεται σε μορφή αναπτύγματος Fourier, (Τριγωνομετρικής μορφής **B**), και για τις πρώτες 11 αρμονικές, στην ακόλουθη μορφή:

$$V_C(t) = 15.4882 \sin(\omega_1 t - 98.3^\circ) + 1.6550 \sin(3\omega_1 t + 21.3^\circ) + 0.4342 \sin(5\omega_1 t - 167.6^\circ) + 0.1273 \sin(7\omega_1 t + 8.8^\circ) + 0.0229 \sin(9\omega_1 t - 173.2^\circ) + 0.0125 \sin(11\omega_1 t - 174.4^\circ) + \dots \text{ (Volts)}$$

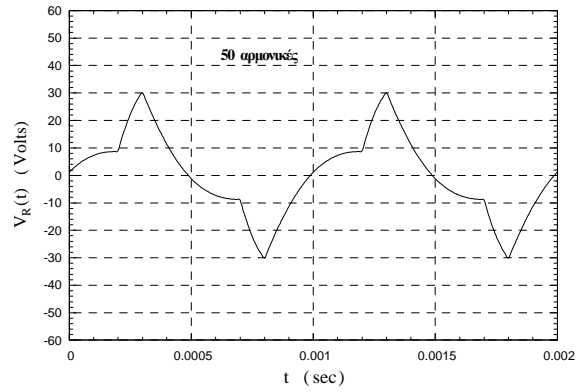
Στα επόμενα σχήματα φαίνονται γραφικές παραστάσεις των σημάτων $i(t)$, $V_R(t)$, $V_L(t)$, $V_C(t)$ όπως αναπαράγονται από τα αναπτύγματα Fourier. Αρχικά φαίνεται η αναπαραγωγή με χρήση έως και την $10^{\text{η}}$ αρμονική και στη συνέχεια η αναπαραγωγή με χρήση έως και την $50^{\text{η}}$ αρμονική. Σημειώνεται και πάλι ότι οι γραφικές παραστάσεις αυτές δείχνουν τα μεγέθη $i(t)$, $V_R(t)$, $V_L(t)$, $V_C(t)$, στη **μόνιμη κατάσταση** και επομένως η χρονική στιγμή $t = 0$ εδώ δεν έχει κάποια ιδιαίτερη σημασία.

Αν θέλουμε να διερευνήσουμε πλήρως το φαινόμενο, δηλαδή την εφαρμογή της διέγερσης $E(t)$ κάποια χρονική στιγμή (έστω $t = 0$) και τον υπολογισμό των αποκρίσεων $i(t)$, $V_R(t)$, $V_L(t)$, $V_C(t)$ σε **μεταβατική και μόνιμη κατάσταση**, τότε θα πρέπει να μελετήσουμε το πρόβλημα στο πεδίο του χρόνου επιλύοντας μία **διαφορική εξίσωση με κατάλληλες αρχικές συνθήκες**. Ένας άλλος τρόπος επίλυσης του προβλήματος, όπως θα δούμε, είναι η χρήση του **μετασχηματισμού Laplace**

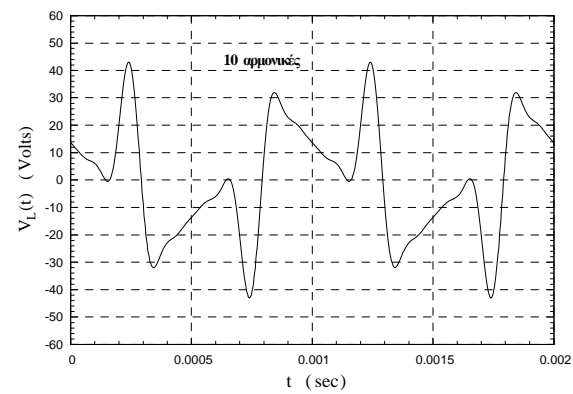




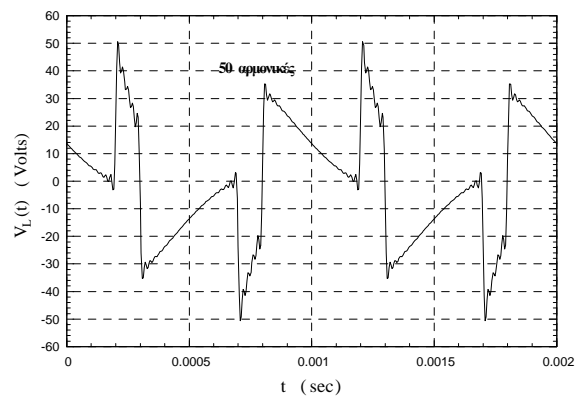
Αναπαραγωγή του σήματος $V_R(t)$ από τις 10 πρώτες αρμονικές του ($n = 1$ έως 10)



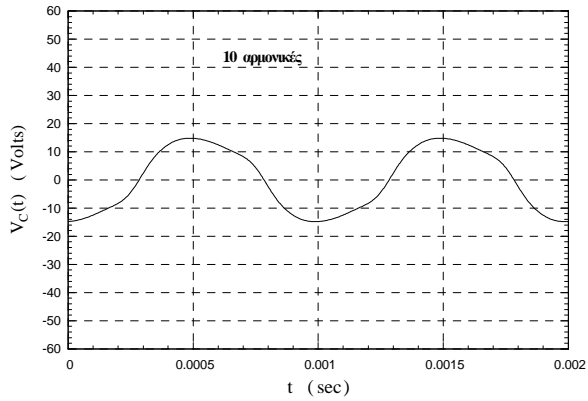
Αναπαραγωγή του σήματος $V_R(t)$ από τις 50 πρώτες αρμονικές του ($n = 1$ έως 50)



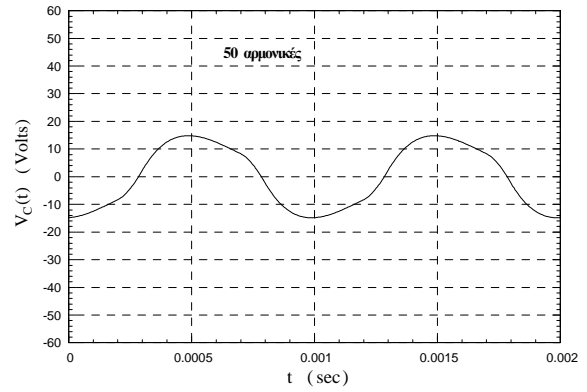
Αναπαραγωγή του σήματος $V_L(t)$ από τις 10 πρώτες αρμονικές του ($n = 1$ έως 10)



Αναπαραγωγή του σήματος $V_L(t)$ από τις 50 πρώτες αρμονικές του ($n = 1$ έως 50)



Αναπαραγωγή του σήματος $V_C(t)$ από τις 10 πρώτες αρμονικές του ($n = 1$ έως 10)



Αναπαραγωγή του σήματος $V_C(t)$ από τις 50 πρώτες αρμονικές του ($n = 1$ έως 50)
Εδώ παρατηρείται ελάχιστη διαφορά από την αναπαραγωγή με 10 αρμονικές γιατί το σήμα είναι αρκετά «ομαλό» και η σειρά Fourier συγκλίνει ταχύτατα

6.7.3) Υπολογισμός ισχύος στην αντίσταση R

Η πραγματική (ενεργός) ισχύς που καταναλίσκεται στην αντίσταση R μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση :

$$P_{R, \text{ev}} = I_{\text{ev}}^2 R$$

$$\text{όπου : } I_{\text{ev}}^2 = I_0^2 + \frac{I_1^2}{2} + \frac{I_2^2}{2} + \dots \quad (\text{τύπος Parseval})$$

και οι συντελεστές I_0, I_1, I_2, \dots προκύπτουν από το ανάπτυγμα του $i(t)$

$$I_0 = 0, \quad I_1 = 1.9456, \quad I_2 = 0, \quad I_3 = 0.6249 \quad \text{κ.λ.π.}$$

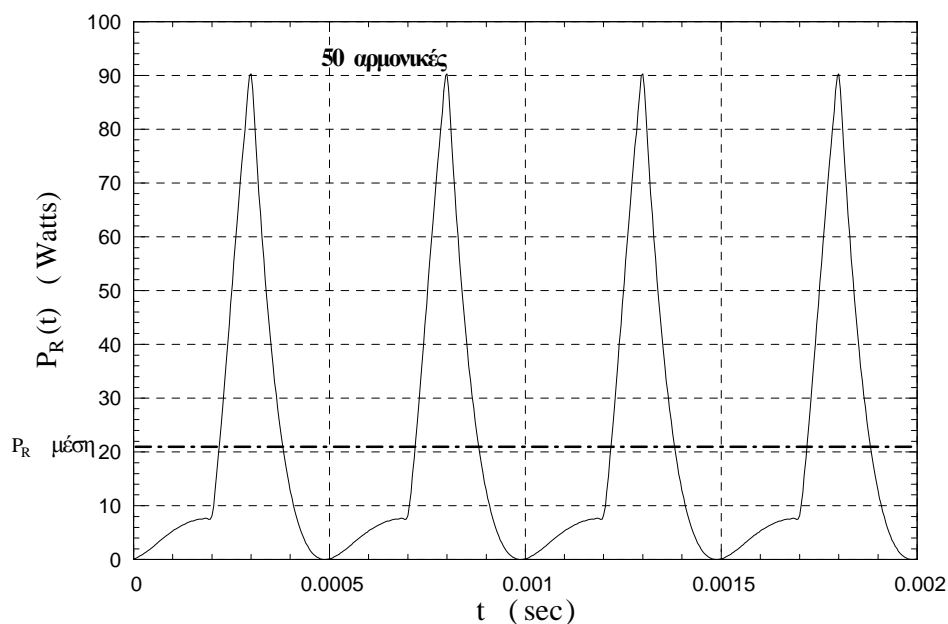
Χρησιμοποιώντας 10 αρμονικές προκύπτει : $I_{\text{ev}} = 1.460488$

και χρησιμοποιώντας 100 αρμονικές προκύπτει : $I_{\text{ev}} = 1.460539$

παρατηρούμε ότι η διαφορά είναι αμελητέα.

$$\text{Άρα : } P_{R, \text{ev}} = I_{\text{ev}}^2 R = 21.33 \quad \text{Watts}$$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το μέγεθος $P_R(t) = i^2(t) R$ (στιγμιαία ισχύς της R)



Προφανώς η μέση τιμή του $P_R(t)$ θα είναι η $P_{R, \text{ev}}$

6.8) Μετασχηματισμός Fourier

Στα προηγούμενα μελετήσαμε την ανάπτυξη μιας περιοδικής συναρτήσεως σε σειρά Fourier, και είδαμε ότι μια περιοδική συνάρτηση αναπτύσσεται σε μια σειρά απείρων, αλλά **αριθμησίμου πλήθους** όρων (ή αρμονικών) της μορφής $c_n \sin(n\omega_1 t + \varphi_n)$ όπου ο δείκτης n είναι φυσικός αριθμός.

Ένα ερώτημα που τίθεται είναι τι συμβαίνει στην περίπτωση που η συνάρτηση $f(t)$ δεν είναι περιοδική. Παρακάτω θα εξετάσουμε το θέμα αυτό.

Αρχικά γράφουμε τους τύπους του αναπτύγματος μιας **περιοδικής** συνάρτησης στην μιγαδική μορφή:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{F}_n e^{jn\omega_1 t}$$

όπου:
$$\bar{F}_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \bar{F}_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση $f(t)$ γίνεται μη περιοδική όταν η περίοδος της τείνει στο άπειρό. Θα έχουμε τότε:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1} \rightarrow \infty \quad \text{άρα} \quad \omega_1 \rightarrow d\omega \quad (\text{απειροστό})$$

και επίσης
$$\frac{1}{T} \rightarrow \frac{d\omega}{2\pi}$$

Εξετάζουμε την σχέση που μας δίνει τους συντελεστές \bar{F}_n

$$\bar{F}_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

Ο **αριθμητικά διακριτός όρος** $n\omega_1$ (όπου $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$) στον εκθέτη, μας δίνει ως γνωστόν τις διακριτές συχνότητες των αρμονικών.

Ο όρος αυτός πρέπει να αντικατασταθεί από τον **συνεχή όρο** ω δηλ. $n\omega_1 \rightarrow \omega$, διότι τώρα οι αρμονικές δεν είναι διακριτές και αριθμήσιμες, αλλά υπάρχει συνεχής κατανομή αρμονικών.

Παρατηρούμε επίσης ότι εφ' όσον $T \rightarrow \infty$ τότε προφανώς :

$$\bar{F}_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \rightarrow 0$$

αλλά η έκφραση:

$$\bar{F}_n T \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Ονομάζουμε μετασχηματισμό Fourier, ή ολοκλήρωμα Fourier, της συναρτήσεως $f(t)$ την μιγαδική συνάρτηση:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

όπου το σύμβολο $\mathcal{F}\{f(t)\}$ σημαίνει «μετασχηματισμός Fourier της $f(t)$ »

Η συνάρτηση $F(j\omega)$ είναι γενικά μια μιγαδική συνάρτηση και γράφεται:

$$F(j\omega) = |F(j\omega)| e^{j\phi(j\omega)}$$

Παρατηρούμε ότι στο ανάπτυγμα σε σειρά Fourier ο συντελεστής \bar{F}_n έχει την ίδια φυσική διάσταση με την $f(t)$. Αν π.χ. η $f(t)$ είναι μία τάση με μονάδα το Volt, τότε επίσης και ο \bar{F}_n έχει μονάδα το Volt.

Στο ολοκλήρωμα Fourier όμως, αν η $f(t)$ έχει μονάδα το Volt, η συνάρτηση $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(j\omega)$ θα έχει μονάδα το Volt · sec ή ισοδύναμα το Volt / Hz. Αυτό συμβαίνει λόγω της συνεχούς κατανομής των αρμονικών.

Εφ' όσον το $f(t)$ είναι ένα σήμα τάσεως ή ρεύματος που εφαρμόζεται σε μία αντίσταση 1Ω , το μέγεθος $|F(\omega)|^2$ αποτελεί την λεγόμενη «πυκνότητα φάσματος ενέργειας» και έχει διαστάσεις [ενέργεια / συχνότητα]. Αυτό εύκολα φαίνεται από τον ακόλουθο συλλογισμό:

Αν το $f(t)$ έχει διαστάσεις Volt τότε το $F(\omega)$ θα έχει διαστάσεις Volt · sec ή Volt / Hz και το $|F(\omega)|^2$ θα έχει διαστάσεις Volt² · sec² ή:

$$\frac{\text{Volt}^2 \cdot \text{sec}}{1/\text{sec}} = \frac{\text{ισχυς} \cdot \text{χρονος}}{\text{συχνοτητα}} = \frac{\text{ενεργεια}}{\text{συχνοτητα}}$$

(διότι το Volt² εκφράζει ισχύ σε αντίσταση 1Ω)

Αν γνωρίζουμε την $F(j\omega)$ και θέλουμε να βρούμε την $f(t)$ τότε εφαρμόζουμε κατάλληλα

$$\text{την αρχική σχέση } f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{F}_n e^{jn\omega_1 t}$$

Πολλαπλασιάζουμε επί T και διαιρούμε δια T τους όρους του αθροίσματος:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{F}_n T e^{jn\omega_1 t} \frac{1}{T}$$

και καθώς το $T \rightarrow \infty$, το $n\omega_1 \rightarrow \omega$, και $\bar{F}_n T \rightarrow F(j\omega)$ και επίσης το $\frac{1}{T} \rightarrow \frac{d\omega}{2\pi}$

Το άθροισμα τείνει σε ολοκλήρωμα και θα πάρουμε τελικά:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Ο **αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier** $\mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\}$ της $F(j\omega)$ δίδεται από τη σχέση

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Ο μετασχηματισμός Fourier, αποτελεί γενίκευση των αναπτυγμάτων σε σειρές Fourier, και είναι πάρα πολύ χρήσιμο μαθηματικό εργαλείο κυρίως για θεωρητικούς υπολογισμούς και αναλύσεις.

Γενικά ο μετασχηματισμός Fourier μεταφέρει ένα οποιοδήποτε σήμα (συνάρτηση του χρόνου) $f(t)$, από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας $F(j\omega)$

Παράδειγμα

Παρακάτω υπολογίζουμε το μετασχηματισμό Fourier ενός τετραγωνικού παλμού δηλ. μιας συνάρτησης $f(t)$ της μορφής:

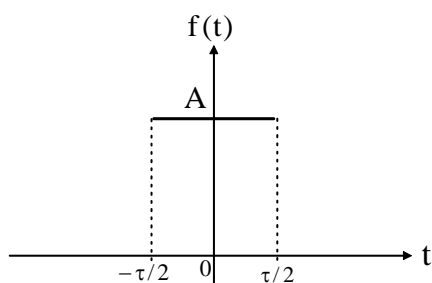
$$f(t) = \begin{cases} A & -\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{αλλου} \end{cases}$$

$$\text{θα έχουμε: } F(\omega) = A \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} e^{-j\omega t} dt = \frac{A}{-j\omega} (e^{-j\omega\tau/2} - e^{j\omega\tau/2}) = \frac{A \frac{\tau}{2}}{j\omega \frac{\tau}{2}} (-e^{-j\omega\tau/2} + e^{j\omega\tau/2})$$

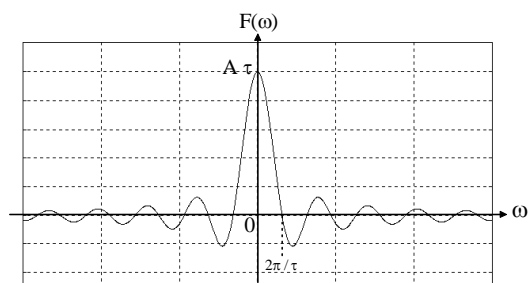
και τελικά

$$F(\omega) = A\tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}$$

δηλαδή εδώ ο μετασχηματισμός Fourier καθαρά πραγματική συνάρτηση.



τετραγωνικός παλμός



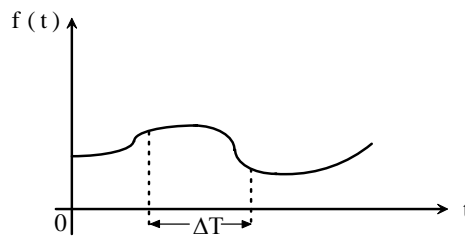
Μετασχηματισμός Fourier του τετραγωνικού παλμού

Η συνάρτηση $\sin(x)/x$, τη μορφή της οποίας έχει ο μετασχηματισμός Fourier του τετραγωνικού παλμού, λέγεται συνάρτηση δειγματοληψίας και παίζει σημαντικότατο ρόλο στην θεωρία σημάτων.

6.9) Διακριτά σήματα και Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

6.9.1) Γενικά για τα διακριτά σήματα

Η πιο γνωστή μορφή ενός σήματος είναι βέβαια αυτή του αναλογικού σήματος. Το σήμα περιγράφεται αναλυτικά με μια συνεχή συνάρτηση $f(t)$. Σε όλα τα φαινόμενα που συμβαίνουν στον φυσικό κόσμο οι μεταβολές των διαφόρων φυσικών μεγεθών είναι ακριβώς τέτοια αναλογικά σήματα. Επίσης ο ανθρώπινος οργανισμός αντιλαμβάνεται με τις διάφορες αισθήσεις του μόνον τέτοια σήματα.



Σε ένα αναλογικό σήμα, μέσα σε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα ΔT , υπάρχουν προφανώς **άπειρες** τιμές του σήματος.

Οι πρώτες συσκευές και διατάξεις που επεξεργάζονταν ηλεκτρικά σήματα (π.χ. τηλέγραφος, τηλέφωνο, τα πρώτα όργανα μετρήσεων κ.λ.π.) προφανώς λειτουργούσαν με «αναλογικό» τρόπο.

Τις τελευταίες δεκαετίες όμως, με την ταχύτερη ανάπτυξη των Η/Υ, εμφανίστηκε ένας νέος τρόπος καταγραφής και επεξεργασίας των σημάτων με χρήση της ψηφιακής τεχνολογίας. Η όλη μεθοδολογία αποκαλείται «Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος».

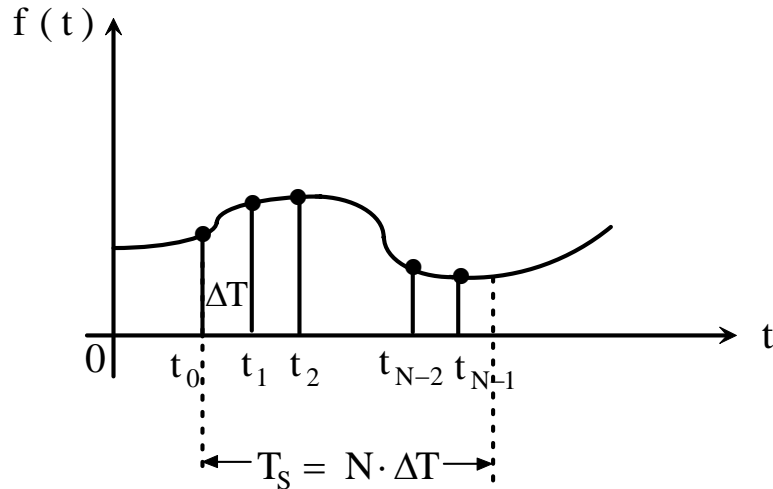
Παρακάτω θα αναφέρουμε ορισμένες βασικές αρχές της μεθοδολογίας αυτής. Η μελέτη του όλου θέματος προφανώς εκφεύγει από τα όρια του παρόντος συγγράμματος.

Αναφέρουμε αρχικά ότι στη σημερινή εποχή ένα πολύ μεγάλο πλήθος από φυσικά μεγέθη **μη ηλεκτρικά** π.χ. θερμοκρασία, πίεση, δύναμη, ροπή, ταχύτητα, επιτάχυνση, και πολλά άλλα, μπορούν να μετατραπούν σε ηλεκτρικά μεγέθη ή ακριβέστερα σε ηλεκτρικά σήματα (κυρίως τάσεως). Αυτό γίνεται με χρήση κατάλληλων αισθητήρων (sensors). Έτσι μπορούμε να πούμε ότι όλα σχεδόν τα φυσικά μεγέθη μπορούν να θεωρηθούν ως αναλογικά σήματα τάσεως.

Το πρώτο πράγμα που πρέπει να γίνει σε ένα συνεχές αναλογικό σήμα είναι η καταγραφή και η αποθήκευσή του με κάποιο τρόπο. Όπως είναι προφανές δεν είναι δυνατόν να καταγραφούν και να αποθηκευθούν οι άπειρες τιμές ενός αναλογικού σήματος που υπάρχουν και στο μικρότερο χρονικό διάστημα ΔT . Εμφανίζεται λοιπόν εδώ η λεγόμενη **διακριτοποίηση** του σήματος που γίνεται μετά από κατάλληλη **δειγματοληψία**.

Παρακάτω εξηγείται η διαδικασία αυτή.

6.9.2) Διακριτοποίηση σήματος



Έστω ότι το αναλογικό σήμα καταγράφεται για ένα χρονικό διάστημα T_S . Το διάστημα αυτό λέγεται και **συνολικός χρόνος καταγραφής σήματος**.

Μέσα στο χρονικό διάστημα T_S , λαμβάνονται συνολικά N τιμές ή δείγματα του σήματος για τις χρονικές στιγμές $t_0, t_1, t_2, \dots, t_{N-2}, t_{N-1}$

Οι N διακριτές αυτές χρονικές στιγμές προκύπτουν από την γενική σχέση:

$$t_k = t_0 + k \Delta T \quad \text{όπου } k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

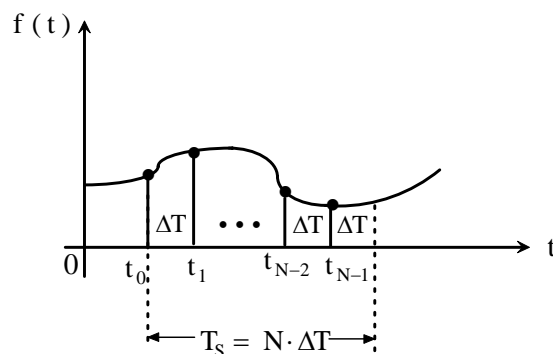
Παρατηρούμε ότι τα λαμβανόμενα δείγματα του σήματος απέχουν μεταξύ τους κατά χρονικό διάστημα ΔT , δηλαδή λαμβάνεται ένα δείγμα ανά χρονικό διάστημα ΔT .

Το χρονικό αυτό διάστημα ΔT (sec) λέγεται **διάστημα δειγματοληψίας**. Το αντίστροφο του μέγεθος $f_s = \frac{1}{\Delta T}$ (δείγματα / sec) λέγεται **συχνότητα δειγματοληψίας**.

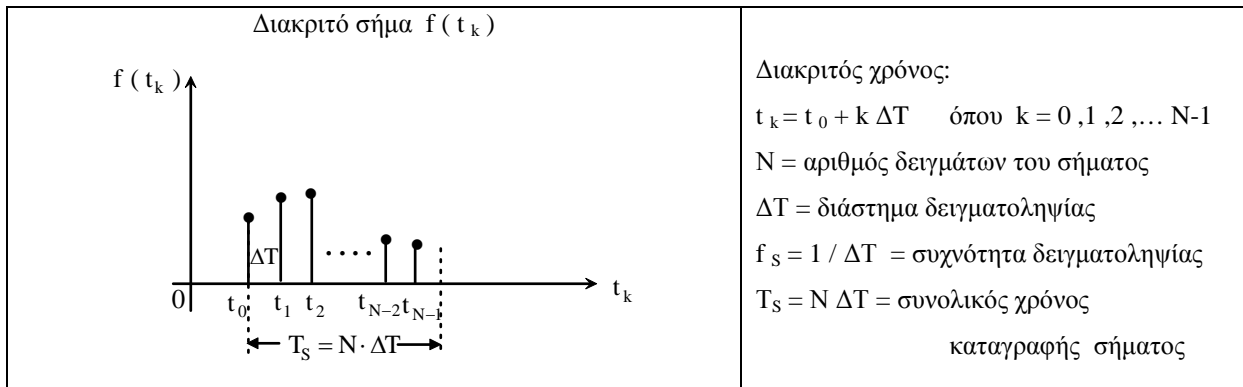
Αν θεωρήσουμε ότι κάθε δείγμα του σήματος λαμβάνεται **στην αρχή** του αντίστοιχου χρονικού διαστήματος ΔT , τότε ο συνολικός χρόνος καταγραφής του σήματος T_S θα είναι:

$$T_S = t_{\text{τελικό}} - t_{\text{αρχικό}} = (t_{N-1} + \Delta T) - t_0 = t_0 + (N-1)\Delta T + \Delta T - t_0 \quad \text{άρα} \quad T_S = N \Delta T$$

Το παρακάτω σχήμα εξηγεί πώς προκύπτει η σχέση αυτή.



Στον πίνακα που ακολουθεί, φαίνεται το σήμα μετά την διακριτοποίησή του (διακριτό σήμα) και συνοψίζονται όλα τα προηγούμενα



Μια εύλογη ερώτηση που προκύπτει κατά την δειγματοληψία ενός σήματος είναι ή ακόλουθη:

- Τι συμβαίνει με τις ενδιάμεσες τιμές του σήματος που υπάρχουν μεταξύ δύο διαδοχικών δειγμάτων;

Η απάντηση είναι ότι προφανώς οι τιμές αυτές δεν λαμβάνονται καθόλου υπόψη και χάνονται. Είναι όμως δυνατόν να ανακτηθεί πλήρως ένα συνεχές αναλογικό σήμα από τα (πεπερασμένου αριθμού) δείγματά του όπως προβλέπεται από το **θεώρημα της δειγματοληψίας** (ή θεώρημα του Shannon)

Παρακάτω διατυπώνεται το θεώρημα αυτό:

Θεώρημα δειγματοληψίας (Shannon)

« Έστω ένα αναλογικό σήμα $s(t)$ του οποίου η μέγιστη συχνότητα είναι η f_{\max} . Αν το σήμα αυτό υποστεί δειγματοληψία, με συχνότητα δειγματοληψίας $f_s \geq 2f_{\max}$, τότε είναι δυνατόν το σήμα να ανακτηθεί πλήρως από τα δείγματά του»

Βλέπουμε λοιπόν ότι αν η συχνότητα δειγματοληψίας είναι τουλάχιστον ίση με το διπλάσιο της μεγιστης συχνότητας του σήματος τότε δεν χάνεται καθόλου πληροφορία κατά την διακριτοποίηση του σήματος. Η συχνότητα $f_N = 2f_{\max}$ ονομάζεται συχνότητα Nyquist.

Ένα θέμα που τίθεται εδώ είναι το ακόλουθο:

Για όλα τα σήματα , περιοδικά και μη, τα αναπτύγματα Fourier, φθάνουν μέχρι το άπειρο, δηλαδή οποιοδήποτε σήμα και να θεωρήσουμε, η μέγιστη συχνότητά του είναι η άπειρη συχνότητα !

Αυτό μπορεί πρακτικά να ξεπεραστεί με τον ακόλουθο τρόπο:

- Το σήμα πριν υποστεί δειγματοληψία διέρχεται από ένα βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής ίση με την συχνότητα δειγματοληψίας Έτσι εξασφαλίζεται η ισχύς του θεωρήματος του Shannon

Ο μαθηματικός τύπος που μας δίνει το αρχικό συνεχές σήμα από τα N δείγματά του (τύπος αναπαραγωγής σήματος κατά Shannon) είναι ο ακόλουθος:

$$s(t) = \sum_{k=0}^{N-1} s(k \Delta t) \frac{\sin(2 \pi w (t - k \Delta t))}{2 \pi w (t - k \Delta t)}$$

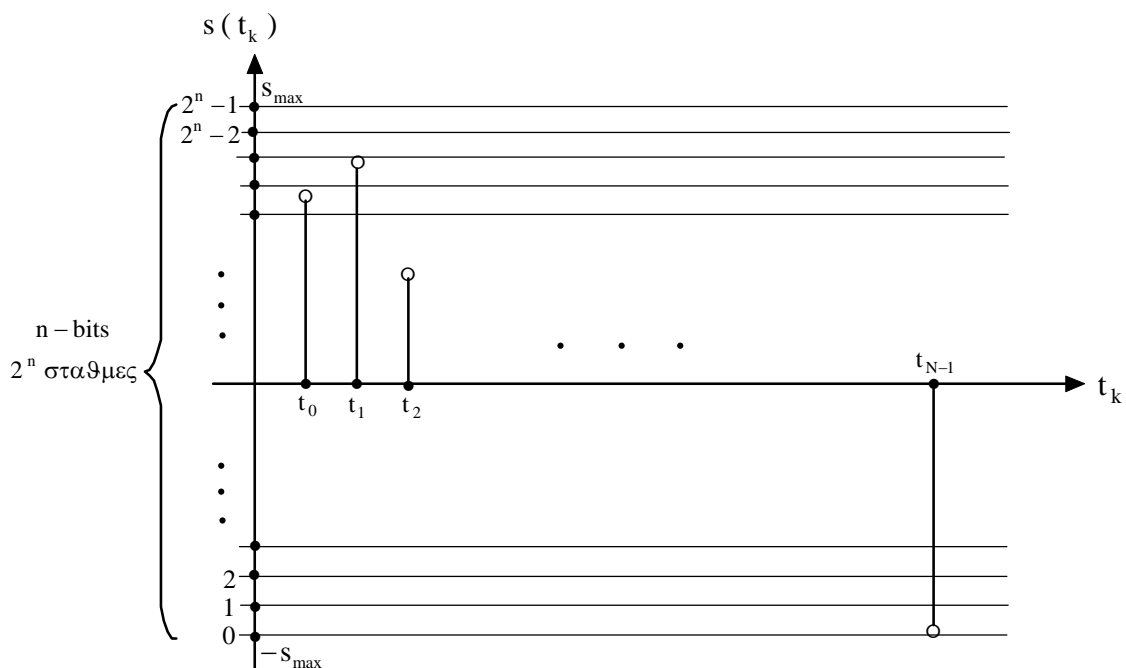
όπου w η συχνότητα αποκοπής του βαθυπερατού φίλτρου η οποία, όπως προαναφέρθηκε, είναι ίση με την συχνότητα δειγματοληψίας δηλ. $w = f_s$

6. 9. 3) Ψηφιοποίηση σήματος

Ένα συνεχές αναλογικό σήμα $s(t)$ αφού πρώτα υποστεί δειγματοληψία, σε ένα περιορισμένο αριθμό δειγμάτων N , θα πρέπει στη συνέχεια, για να γίνει αναγνωρίσιμο από έναν Η/Υ να ψηφιοποιηθεί. Με τον όρο «ψηφιοποίηση» εννοούμε την αντιστοίχιση σε κάθε τιμή $s(t_k)$ του σήματος μιας «ψηφιακής λέξης» δηλ. μιας ομάδας από καθορισμένο αριθμό δυαδικών ψηφίων (bits 0 ή 1). Με τον τρόπο αυτό η ροή των δειγμάτων του σήματος (ένα δείγμα ανα χρονικό διάστημα ΔT όπως προαναφέρθηκε) μετατρέπεται σε ροή ψηφιακών λέξεων οι οποίες πλέον μπορούν να αποθηκευτούν και να επεξεργαστούν από ένα Η/Υ.

Οι ηλεκτρονικές διατάξεις που πραγματοποιούν αυτή την διαδικασία ονομάζονται A / D Converters (Μετατροπείς Αναλογικού σε Ψηφιακό)

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται με απλό τρόπο πως γίνεται η μετατροπή διακριτού σήματος σε ψηφιακό



Αρχικά πρέπει να καθοριστεί ο αριθμός των δυαδικών ψηφίων (bits) από τον οποίο θα αποτελείται η κάθε ψηφιακή λέξη στην οποία θα μετατρέπονται οι διακριτές τιμές του σήματος. Αν χρησιμοποιηθούν n -bits τότε αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να έχουμε 2^n διαφορετικές ψηφιακές λέξεις.

Η κάθε ψηφιακή λέξη θα αντιστοιχεί σε μία διακριτή τιμή (ή στάθμη) s_q

όπου $q = 0, 1, \dots, 2^n - 1$

Οι 2^n αυτές στάθμες καταλαμβάνουν ένα συνολικό διάστημα από $-s_{\max}$ έως s_{\max} όπου τα όρια αυτά εκλέγονται έτσι ώστε να καλύπτουν όλο το εύρος μέσα στο οποίο κυμαίνονται οι τιμές του σήματος.

Προφανώς οι τιμές $s(t_k)$ του σήματος δεν είναι δυνατόν να «πέφτουν» ακριβώς στις στάθμες s_q και έτσι κάθε φορά γίνεται «πρόσδεση» της τιμής του σήματος στην πλησιέστερη στάθμη.

Για την αντιστοίχιση των ψηφιακών λέξεων με τις διάφορες στάθμες μπορεί π.χ. να εφαρμοστεί το δυαδικό σύστημα αρίθμησης οπότε για μια διάταξη με $n = 8$ bits, άρα $2^8 = 256$ στάθμες θα έχουμε:

στάθμη 0 → 00000000

στάθμη 1 → 00000001

στάθμη 2 → 00000010

.....

στάθμη 100 → 01100100

.....

στάθμη 255 → 11111111

Αναφέρουμε εδώ ότι το σύστημα ψηφιακής αναπαραγωγής μουσικής (CD) είχε κατά την αρχική του σχεδίαση μετατροπέα 16 – bits (άρα $2^{16} = 65536$ στάθμες) και συχνότητα δειγματοληψίας 44.1 KHz (η 44100 δείγματα / sec)

6.9.4) Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (D.F.T.)

Όπως προαναφέραμε τα διάφορα σήματα που μελετάμε στην πράξη, εμφανίζονται πάντοτε σε διακριτή μορφή και προκύπτουν από δειγματοληψίες αναλογικών (συνεχών) σημάτων.

Για την ανάλυση Fourier ενός διακριτού σήματος χρησιμοποιείται ο λεγόμενος διακριτός μετασχηματισμός Fourier (Discrete Fourier Transform DFT). Παρακάτω θα διατυπώσουμε τον ορισμό του.

Έστω το διακριτό σήμα $f(t_k)$ $t_k = k \Delta T$ $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$

Όπου κατά τα γνωστά: $N =$ αριθμός δειγμάτων του σήματος

$\Delta T =$ διάστημα δειγματοληψίας

$$f_s = \frac{1}{\Delta T} \text{ (δείγματα / sec) η συχνότητα δειγματοληψίας}$$

$T_s = N \cdot \Delta T$ συνολικός χρόνος καταγραφής του σήματος

Αναφέρουμε ότι κατά τη δειγματοληψία του σήματος πρέπει να ικανοποιείται το κριτήριο Nyquist δηλ. πρέπει $f_s \geq 2 f_{\max}$ ή $\Delta T \leq \frac{1}{2 f_{\max}}$, όπου f_{\max} η μεγαλύτερη συχνότητα που περιέχεται στο σήμα.

Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier $\bar{F}_D(\omega_n)$ του σήματος υπολογίζεται για N διακριτές τιμές συχνοτήτων. Από τις N αυτές διακριτές τιμές που λαμβάνονται, αρκεί η πληροφορία που περιέχεται στις $\frac{N}{2}$ πρώτες τιμές. Μετά οι τιμές επαναλαμβάνονται συμμετρικά δηλαδή έχουμε ένα δίπλευρο φάσμα.

Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier $\bar{F}_D(\omega_n)$ υπολογίζεται από την σχέση:

$$\bar{F}_D(\omega_n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k\Delta T) e^{-jn\Delta\omega k\Delta T} \quad \text{για } n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

όπου $\omega_n = n \Delta\omega$ (για $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$) και $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T_s} = \frac{2\pi}{N \Delta T}$ δηλαδή το $\Delta\omega$

είναι το «βήμα» στο φάσμα των συχνοτήτων. Υπενθυμίζεται ότι T_s είναι ο συνολικός χρόνος καταγραφής του σήματος ή το «παράθυρο» από το οποίο βλέπουμε το σήμα στο χρόνο.

Όπως προαναφέρθηκε το φάσμα είναι δίπλευρο άρα αρκεί η πληροφορία που δίνουν οι τιμές

του $\bar{F}_D(\omega_n)$ για $n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι αν καταγραφεί ένα διακριτό σήμα για χρονικό διάστημα T_S , τότε στο φάσμα του σήματος οι διακριτές συχνότητες θα απέχουν κατά $\Delta\omega = 2\pi / T_S$.

Η μέγιστη συχνότητα του φάσματος θα είναι $\omega_{\max} = (N - 1) \Delta\omega = (N - 1) 2\pi / T_S$

Αν στην σχέση ορισμού του διακριτού μετασχηματισμού Fourier αντικαταστήσουμε το $\Delta\omega$

με το ίσο του $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T_S} = \frac{2\pi}{N \Delta T}$ θα πάρουμε:

$$\bar{F}_D(\omega_n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k\Delta T) e^{-j n \frac{2\pi}{N \Delta T} k\Delta T} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k\Delta T) e^{-j \frac{2\pi}{N} k n}$$

όπου $\omega_n = n \Delta\omega$ και $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$

Η τελευταία σχέση χρησιμοποιείται επίσης για τον υπολογισμό του DFT

Αντίστροφα το διακριτό σήμα $f(t_k)$ προκύπτει από το διακριτό μετασχηματισμό Fourier αυτού ως εξής:

$$f(t_k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \bar{F}_D(n \Delta\omega) e^{j n \Delta\omega k \Delta T} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \bar{F}_D(n \Delta\omega) e^{j \frac{2\pi}{N} n k}$$

όπου $t_k = k \Delta T$ $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$

Από την δεκαετία του '60 έχει αναπτυχθεί ο αλγόριθμος FFT (Fast Fourier Transform) με τον οποίο γίνεται σημαντική οικονομία στις πράξεις υπολογισμού του DFT ενός διακριτού σήματος. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την μεγάλη εξοικονόμηση χρόνου για στον υπολογισμό του DFT ενός σήματος. Ο αλγόριθμος FFT απαιτεί ο αριθμός των δειγμάτων του σήματος να είναι δύναμη του 2 (π.χ. 32, 64, 128 κ.λ.π.) Σε όλα τα «πακέτα» μαθηματικών προγραμμάτων όπως π.χ. το MATLAB, αλλά και σε πολλά προγράμματα που συνοδεύουν ψηφιακά όργανα μετρήσεως για την επικοινωνία τους με H/Y, υπάρχει ενσωματωμένος ο αλγόριθμος FFT.

Σχετικά με τον διακριτό μετασχηματισμό Fourier έχουμε και τις δύο ακόλουθες παρατηρήσεις:

1) Αν αυξήσουμε τον αριθμό των δειγμάτων N , του σήματος, χωρίς να μεταβάλλουμε το διάστημα δειγματοληψίας ΔT , τότε θα συμβούν τα ακόλουθα:

i) Θα αυξηθεί ο συνολικός χρόνος καταγραφής του σήματος $T_S = N \Delta T$

ii) Θα μειωθεί το $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T_S} = \frac{2\pi}{N \Delta T}$, δηλ. το «βήμα» στο φάσμα συχνοτήτων και

επομένως θα έχουμε πιο «πυκνό» φάσμα. Η μέγιστη συχνότητα που φτάνουμε στο φάσμα $\omega_{\max} = (N-1) \Delta\omega = ((N-1)/N) (2\pi / \Delta T)$

θα παραμείνει πρακτικά η ίδια.

2) Αν αυξήσουμε τον αριθμό των δειγμάτων N , του σήματος, χωρίς να μεταβάλλουμε τον συνολικό χρόνο καταγραφής του σήματος T_S , τότε θα συμβούν τα ακόλουθα:

i) Θα μειωθεί το διάστημα δειγματοληψίας $\Delta T = T_S / N$

ii) Δεν θα μεταβληθεί το $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T_S} = \frac{2\pi}{N \Delta T}$, δηλ. το «βήμα» στο φάσμα συχνοτήτων

αλλά θα αυξηθεί η μέγιστη συχνότητα που φτάνουμε στο φάσμα $\omega_{\max} = (N-1) \Delta\omega$

Συνοψίζοντας τις δύο αυτές παρατηρήσεις μπορούμε να πούμε ότι:

- Έχουμε δύο «παράθυρα», ένα στο πεδίο του χρόνου και ένα στο πεδίο της συχνότητας (φάσμα). Στα δύο αυτά παράθυρα έχουμε διακριτές τιμές (δείγματα) $f(k \Delta T)$ και $f(n \Delta\omega)$ αντίστοιχα. Όταν το ένα παράθυρο μεγαλώνει σε εύρος, χωρίς να αλλάξει η απόσταση μεταξύ των δειγμάτων, τότε στο άλλο παράθυρο μειώνεται η απόσταση μεταξύ των δειγμάτων («πυκνώνουν» τα δείγματα) χωρίς να διαφοροποιείται το εύρος του.

6. 9. 5)Σχέση του διακριτού μετασχηματισμού Fourier με τις σειρές Fourier περιοδικών συναρτήσεων.

Το διακριτό σήμα $f(t_k)$ θεωρείται περιοδική συνάρτηση με περίοδο T δηλ το συνολικό χρόνο καταγραφής του.

Υπενθυμίζουμε τα αναπτύγματα Fourier μιας περιοδικής συναρτήσεως $f(t)$

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n \omega t + \vartheta_n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{F}_n e^{j n \omega t}$$

όπου ο συντελεστής \bar{F}_n γράφεται

$$\bar{F}_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-j n \omega t} dt$$

αντίστοιχα ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier γράφεται

$$\bar{F}_D(\omega_n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k\Delta T) e^{-j n \Delta \omega k \Delta T}$$

άρα προσεγγίζοντας το ολοκλήρωμα με το άθροισμα θά έχουμε

$$\bar{F}_n = \frac{1}{T} \bar{F}_D(\omega_n) \Delta T = \frac{\Delta T}{T} \bar{F}_D(\omega_n) = \frac{\Delta T}{N \cdot \Delta T} \bar{F}_D(\omega_n) = \frac{1}{N} \bar{F}_D(\omega_n)$$

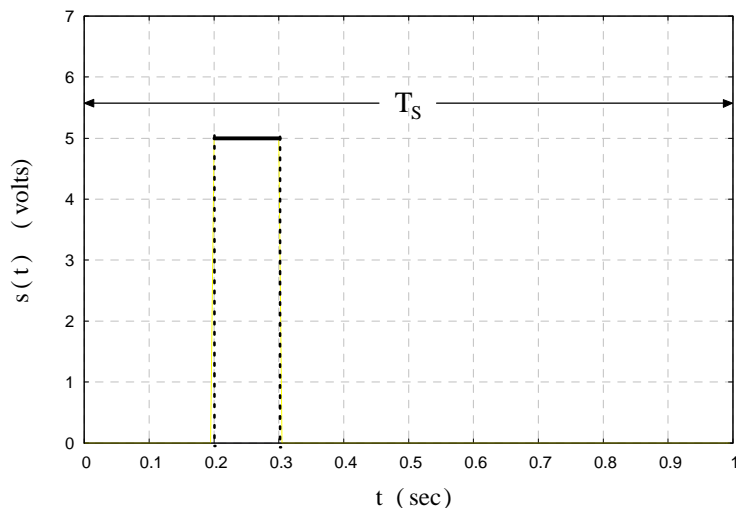
και επίσης

$$C_n = 2 |\bar{F}_n| = \frac{2}{N} |\bar{F}_D(\omega_n)| \quad \text{για } n = 1, 2, \dots$$

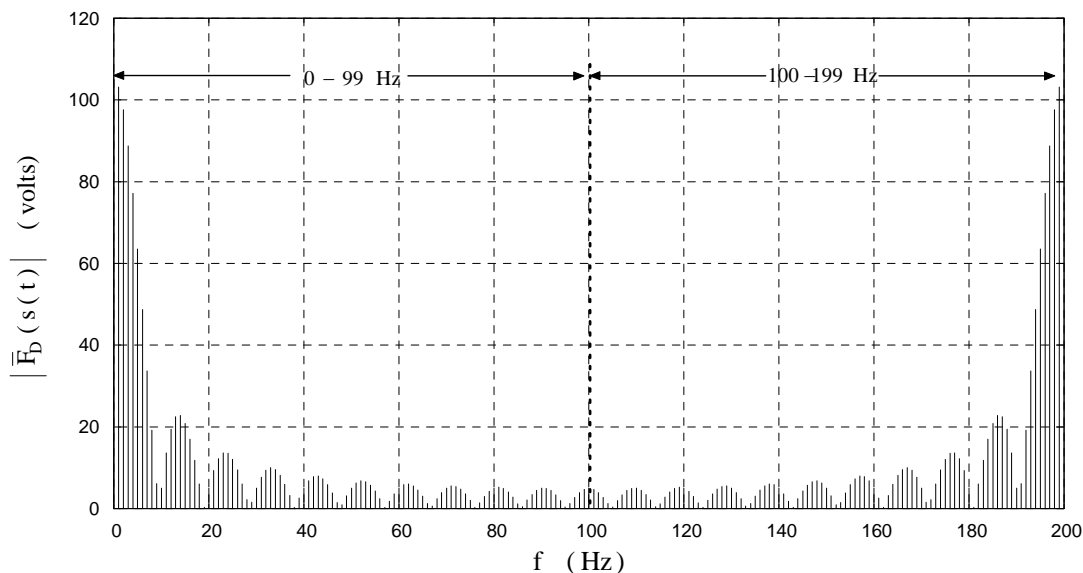
$$C_0 = \frac{1}{N} |\bar{F}_D(\omega_0)| \quad \text{για } n = 0$$

6.9.6) Παραδείγματα εφαρμογής του Διακριτού Μετασχηματισμού Fourier

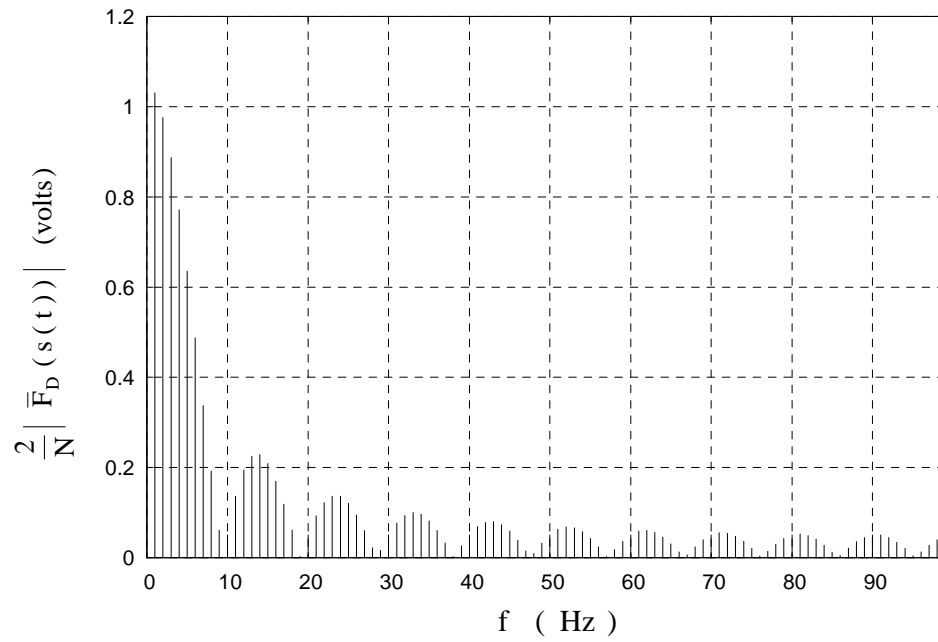
Παράδειγμα 1) (Σήμα μαθηματικά «κατασκευασμένο»)



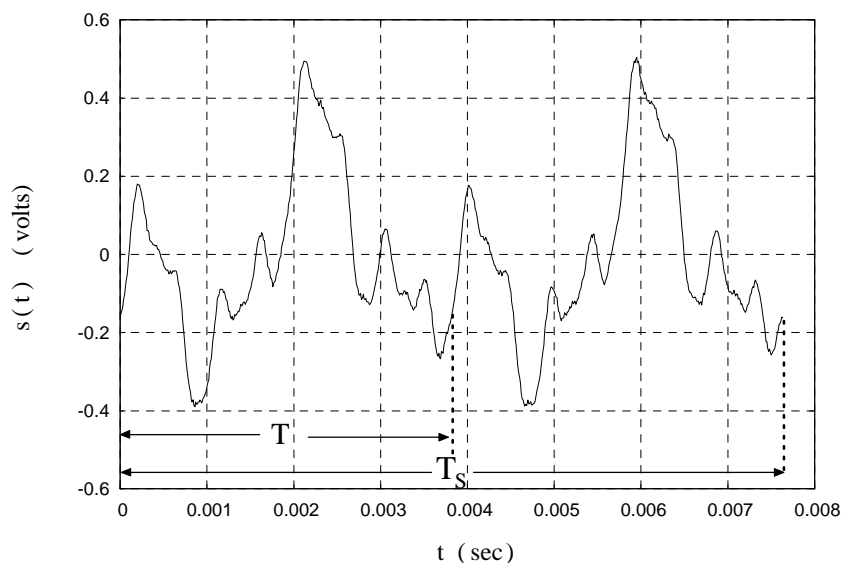
Έχουμε ένα σήμα $s(t)$ τετραγωνικού παλμού με ύψος 5 volts και διάρκεια 0.1 sec. Το σήμα καταγράφεται για χρονικό διάστημα $T_S = 1$ sec, και λαμβάνονται συνολικά $N = 200$ δείγματα, με $\Delta T = 0.005$ sec. Στο φάσμα συχνοτήτων θα έχουμε «βήμα» $\Delta\omega = 2\pi / T_S = 6.2832$ rad / sec ή σε συχνότητα $\Delta f = 1$ Hz. Η μέγιστη συχνότητα στην οποία φτάνουμε είναι $\omega_{\max} = (N - 1) \Delta\omega$ ή $f_{\max} = (N - 1) \Delta\omega / 2\pi = 199$ Hz, σε δίπλευρο φάσμα.



Στο ανωτέρω σχήμα φαίνεται το δίπλευρο φάσμα του σήματος $s(t)$. Παριστάνεται γραφικά το μέτρο του διακριτού μετασχηματισμού Fourier του σήματος (φάσμα πλάτους). Διακρίνεται η συμμετρία που υπάρχει στα δύο τμήματα του φάσματος $0 - 99$ Hz και $100 - 199$ Hz. Επαναλαμβάνουμε ότι αρκεί η πληροφορία που βρίσκεται στο πρώτο τμήμα ($0 - 99$ Hz).

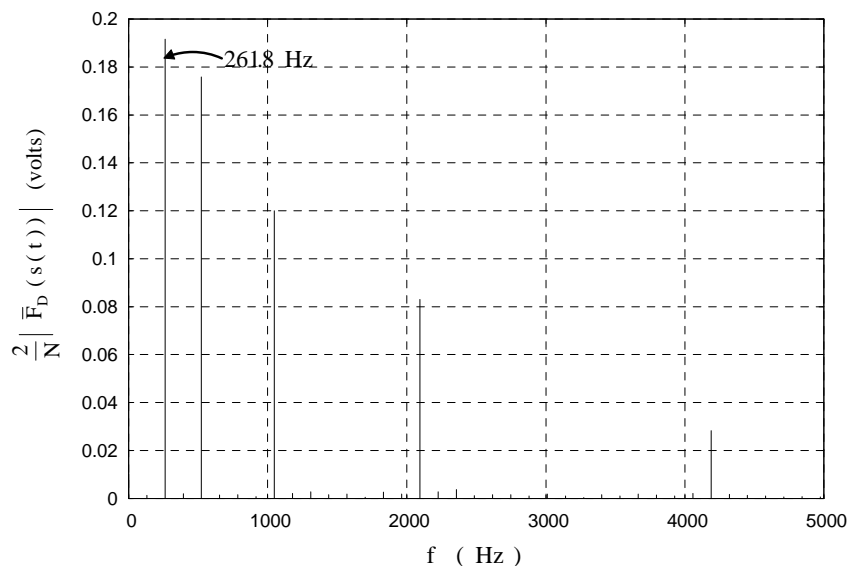


Στο σχήμα φαίνεται το μονόπλευρο φάσμα πλάτους. Οι τιμές έχουν πολλαπλασιασθεί επί τον παράγοντα $2/N$ ώστε να έχουμε άμεσα σύγκριση με το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier.

Παράδειγμα 2) (Σήμα που έχει ληφθεί από μέτρηση)

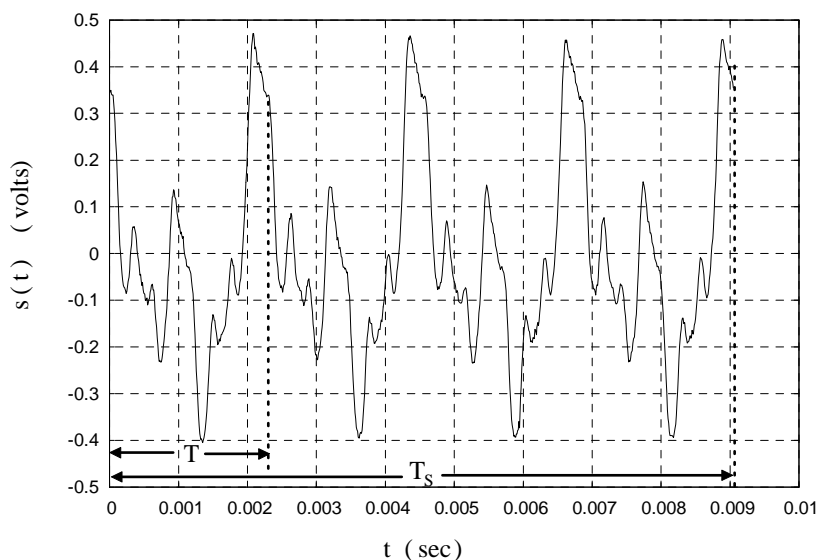
Έχουμε ένα ηχητικό σήμα $s(t)$. Είναι προφανές ότι ο σήμα αυτό είναι περιοδικό και μάλιστα στο διάγραμμα φαίνεται για δύο περιόδους. Το σήμα καταγράφεται για χρονικό διάστημα $T_S = 2T = 0.00764 \text{ sec}$, επομένως έχει περίοδο $T = 0.00382 \text{ sec}$.

Λαμβάνονται συνολικά $N = 764$ δείγματα του σήματος με $\Delta T = 10^{-5} \text{ sec}$. Στο φάσμα συχνοτήτων θα έχουμε «βήμα» $\Delta\omega = 2\pi / T_S = 822.40 \text{ rad/sec}$ ή σε συχνότητα $\Delta f = 130.89 \text{ Hz}$. Η μέγιστη συχνότητα στην οποία φτάνουμε είναι $\omega_{\max} = (N - 1) \Delta\omega$ ή $f_{\max} = (N - 1) \Delta\omega / 2\pi = 99.869 \text{ kHz}$, σε δίπλευρο φάσμα.



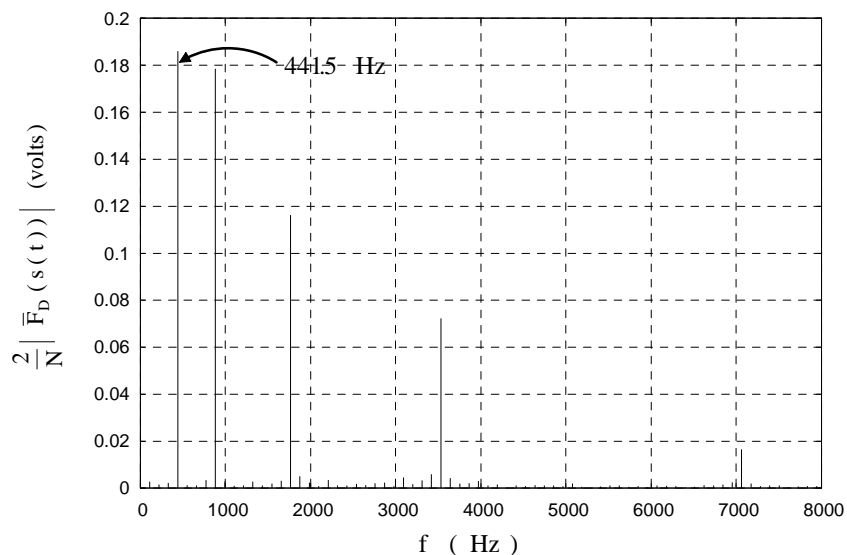
Στο διάγραμμα φαίνεται το μέτρο του DFT του σήματος (δηλ το φάσμα πλάτους). Οι τιμές πολλαπλασιάζονται επί τον παράγοντα $2 / N$ ώστε να έχουμε άμεσα σύγκριση με το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier. Το μονόπλευρο φάσμα φθάνει μέχρι την συχνότητα 49.869 kHz , αλλά οι ισχυρότερες αρμονικές του σήματος περιορίζονται μέχρι τα 5 kHz . Αυτό το τμήμα του φάσματος φαίνεται και στο ανωτέρω διάγραμμα. Παρατηρούμε ότι η $1^{\text{η}}$ αρμονική βρίσκεται στην συχνότητα $f_1 = 261.8 \text{ Hz}$. Ισχύει $f_1 = 1 / T$.

Παράδειγμα 3) (Σήμα που έχει ληφθεί από μέτρηση)

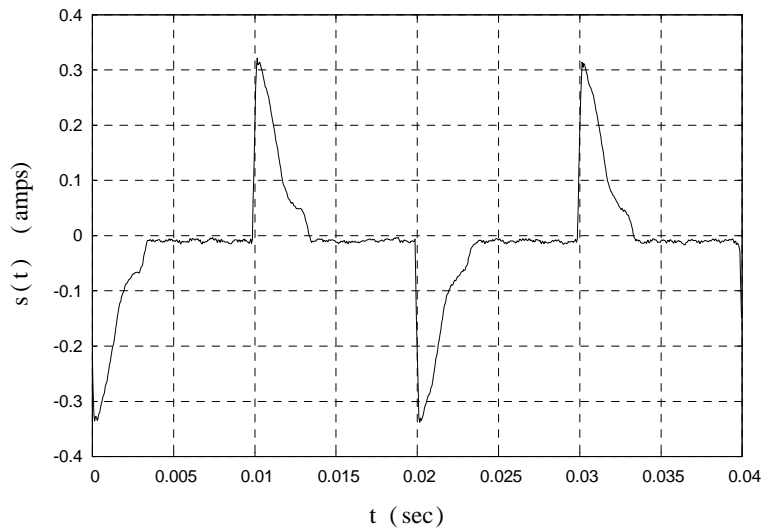


Έχουμε πάλι ένα ηχητικό σήμα $s(t)$. Το σήμα αυτό είναι περιοδικό και στο διάγραμμα φαίνεται για 4 περιόδους. Το σήμα καταγράφεται για χρονικό διάστημα $T_S = 0.00906$ sec και η περίοδος του σήματος είναι $T = 0.002265$ sec.

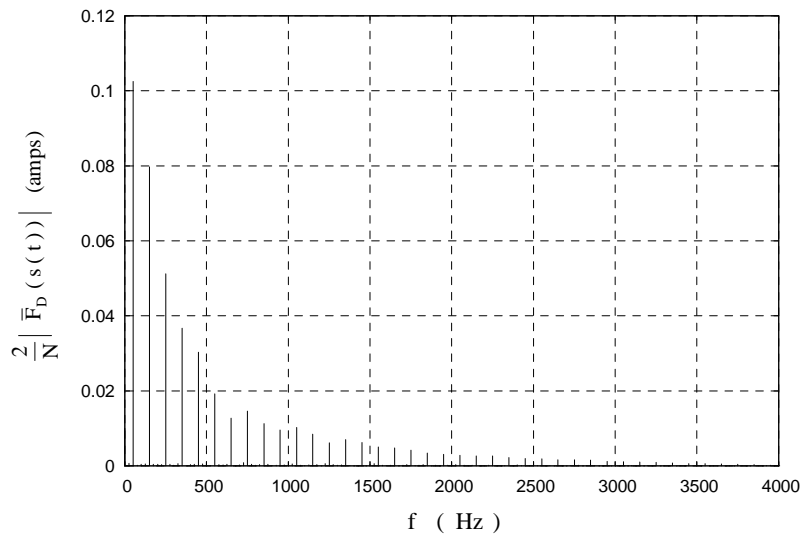
Λαμβάνονται συνολικά $N = 906$ δείγματα του σήματος με $\Delta T = 10^{-5}$ sec. Στο φάσμα συχνοτήτων θα έχουμε «βήμα» $\Delta\omega = 2\pi / T_S = 693.51$ rad / sec ή σε συχνότητα $\Delta f = 110.38$ Hz. Η μέγιστη συχνότητα στην οποία φτάνουμε είναι $\omega_{\max} = (N - 1) \Delta\omega$ ή $f_{\max} = (N - 1) \Delta\omega / 2\pi = 99.889$ kHz, σε δίπλευρο φάσμα.



Στο διάγραμμα φαίνεται το μέτρο του DFT του σήματος (δηλ το φάσμα πλάτους). Οι τιμές πολλαπλασιάζονται επί τον παράγοντα $2/N$ ώστε να έχουμε άμεσα σύγκριση με το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier. Το μονόπλευρο φάσμα φθάνει μέχρι την συχνότητα 49.889 kHz, αλλά οι ισχυρότερες αρμονικές του σήματος περιορίζονται μέχρι τα 8 kHz. Αυτό το τμήμα του φάσματος φαίνεται και στο ανωτέρω διάγραμμα. Παρατηρούμε ότι η 1^η αρμονική βρίσκεται στην συχνότητα $f_1 = 441.5$ Hz. Ισχύει $f_1 = 1/T$

Παράδειγμα 4) (Σήμα που έχει ληφθεί από μέτρηση)

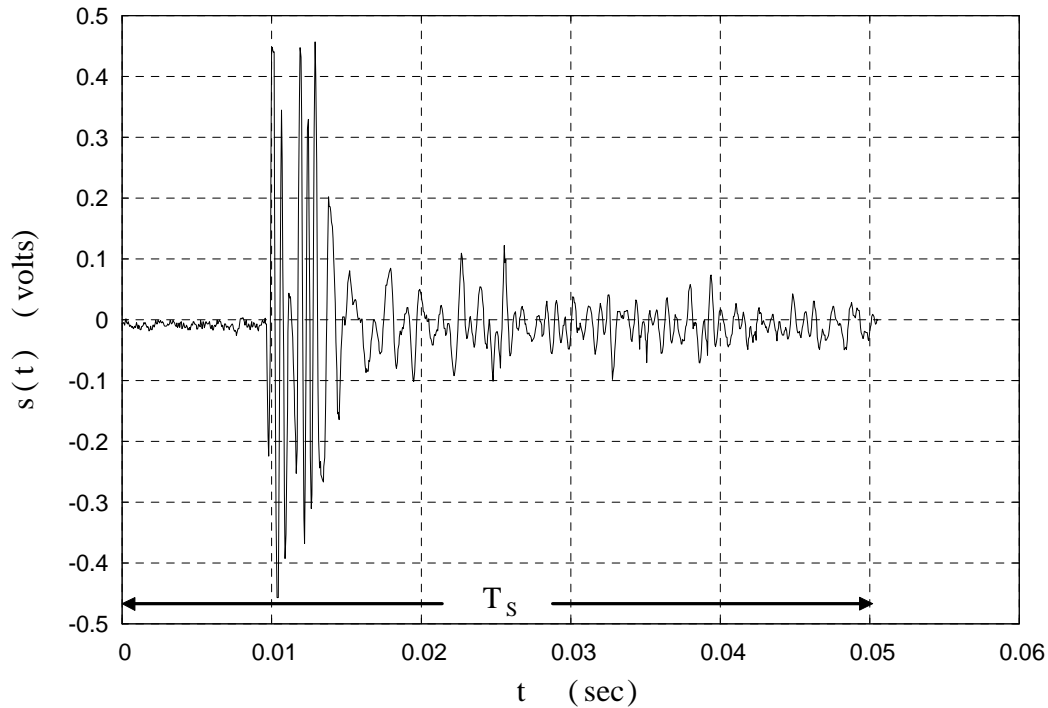
Στο διάγραμμα αυτό φαίνεται η κυματομορφή του ρεύματος ενός ηλεκτρονικού λαμπτήρα φωτισμού 220 V / 50 Hz και ισχύος 20 W. Η περίοδος του σήματος είναι προφανώς $T = 0.02$ sec και στο διάγραμμα φαίνεται για 2 περιόδους. Το σήμα καταγράφεται για χρονικό διάστημα $T_S = 0.04$ sec. Λαμβάνονται συνολικά $N = 800$ δείγματα του σήματος με $\Delta T = 5 \times 10^{-5}$ sec. Στο φάσμα συχνοτήτων θα έχουμε «βήμα» $\Delta\omega = 2\pi / T_S = 157.07$ rad / sec ή σε συχνότητα $\Delta f = 25$ Hz. Η μέγιστη συχνότητα στην οποία φτάνουμε είναι $\omega_{\max} = (N - 1) \Delta\omega$ ή $f_{\max} = (N - 1) \Delta\omega / 2\pi = 19.975$ kHz, σε δίπλευρο φάσμα.



Στο διάγραμμα φαίνεται το μέτρο του DFT του σήματος (δηλ το φάσμα πλάτους). Το μονόπλευρο φάσμα φθάνει μέχρι την συχνότητα 9.975 kHz, αλλά οι ισχυρότερες αρμονικές του σήματος περιορίζονται μέχρι τα 4 kHz. Αυτό το τμήμα του φάσματος φαίνεται και στο ανωτέρω διάγραμμα. Παρατηρούμε ότι η 1^η αρμονική βρίσκεται στην συχνότητα $f_1 = 50$ Hz. Επίσης φαίνεται ότι το ρεύμα είναι πλούσιο σε αρμονικές και αυτό αποτελεί ένα μειονέκτημα των ηλεκτρονικών λαμπτήρων, ως ηλεκτρικά φορτία, διότι επιβαρύνουν το ηλεκτρικό δίκτυο με αρμονικές, πράγμα ανεπιθύμητο.

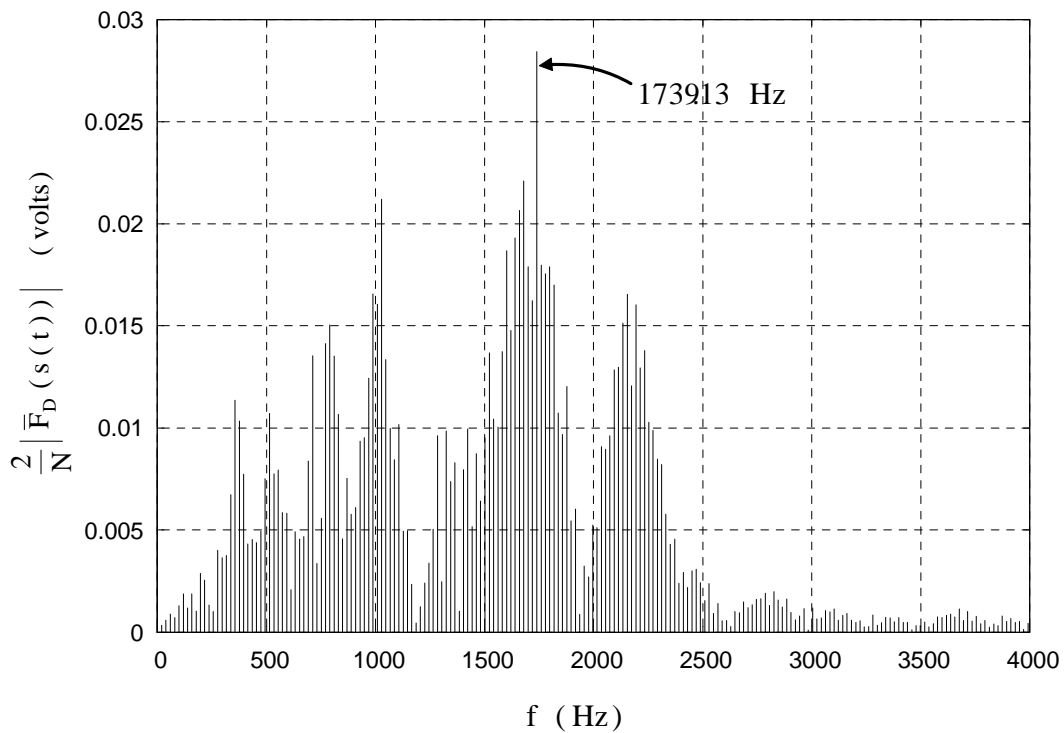
Παράδειγμα 5)

Τα παραδείγματα που αναφέραμε έως τώρα αφορούσαν όλα περιοδικά σήματα . Παρακάτω θα αναφέρουμε ένα παράδειγμα μη περιοδικού σήματος

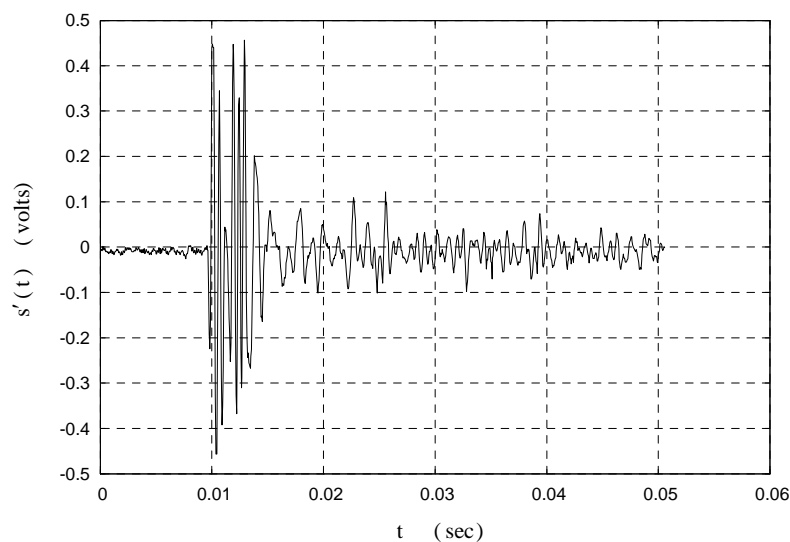


Στο διάγραμμα φαίνεται ένα μη περιοδικό (ή μεταβατικό) σήμα το οποίο παριστά την ηχητική αποτύπωση ενός «κρότου». Το σήμα καταγράφεται για χρονικό διάστημα $T_s = 0.0506 \text{ sec}$ και ο αριθμός των δειγμάτων είναι $N = 1012$. Επομένως το διάστημα δειγματοληψίας θα είναι $\Delta T = T_s / N = 5 \times 10^{-5} \text{ sec}$.

Στο φάσμα συχνοτήτων θα έχουμε «βήμα» $\Delta\omega = 2\pi / T_s = 124.17 \text{ rad / sec}$ ή σε συχνότητα $\Delta f = 19.76 \text{ Hz}$. Η μέγιστη συχνότητα στην οποία φτάνουμε είναι $\omega_{\max} = (N - 1) \Delta\omega$ ή $f_{\max} = (N - 1) \Delta\omega / 2\pi = 19.980 \text{ kHz}$, σε δίπλευρο φάσμα.



Στο ανωτέρω διάγραμμα φαίνεται ένα τμήμα του φάσματος του σήματος . Το μονόπλευρο φάσμα εκτείνεται μέχρι τα 9.978 kHz αλλά οι ισχυρότερες αρμονικές περιορίζονται μέχρι τα 4 kHz περίπου και αυτό το τμήμα του φάσματος φαίνεται και στο διάγραμμα . Η αρμονική με το μεγαλύτερο πλάτος βρίσκεται στη συχνότητα 1739.13 Hz



Στο ανωτέρω σχήμα φαίνεται η αναπαραγωγή του σήματος από τις αρμονικές του με χρήση του αντιστρόφου DFT. Παρατηρείται απόλυτη ακρίβεια στην αναπαραγωγή

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΜΕΛΕΤΗ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ ΣΤΗΝ ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ (Ε. Μ. Κ.)

7.1) Γενικά για την Εκθετική Μόνιμη Κατάσταση (Ε.Μ.Κ.)

Όπως αναφέρθηκε και στο κεφάλαιο 5 η μελέτη ενός δικτύου ή συστήματος στην Ημιτονική Μόνιμη Κατάσταση, (Η.Μ.Κ.) προϋποθέτει την αυστηρή παραδοχή της ημιτονοειδούς χρονικής εξάρτησης όλων των μεγεθών. Με βάση την παραδοχή αυτή έχει αναπτυχθεί η, γνωστή και ιδιαίτερα εύχρηστη, μεθοδολογία περιγραφής των μεγεθών με χρήση των παραστατικών μιγαδικών (phasors). Παρά την μεγάλη, θεωρητική και πρακτική, αξία της μεθόδου αυτής, παραμένει ο σχετικός περιορισμός της αυστηρά ημιτονοειδούς χρονικής εξάρτησης.

Για τον λόγο αυτό έχει αναπτυχθεί και μία πιο γενικευμένη μέθοδος περιγραφής δικτύων και συστημάτων με την οποία μπορούν να μελετηθούν συνθετότερες καταστάσεις. Η μέθοδος αυτή μπορούμε να πούμε ότι υπερκαλύπτει την μέθοδο περιγραφής μέσω της Η.Μ.Κ.

Στην νέα αυτή μέθοδο περιγραφής γίνεται η ακόλουθη παραδοχή:

Η χρονική εξάρτηση όλων των μεγεθών είναι, αποκλειστικά, της μορφής:

$$a(t) = A_m e^{\sigma t} \sin(\omega t + \varphi)$$

όταν ισχύει η ειδική αυτή παραδοχή, τότε θεωρείται ότι το δίκτυο βρίσκεται στην Εκθετική Μόνιμη Κατάσταση (Ε.Μ.Κ.)

Έχουμε τις ακόλουθες παρατηρήσεις

α) Σε σχέση με την Η.Μ.Κ. έχει προστεθεί ο όρος $e^{\sigma t}$, και μάλιστα αναφέρουμε εδώ ότι ο παράγοντας σ , για πραγματικά - φυσικά συστήματα σε ευσταθή κατάσταση λειτουργίας, είναι πάντοτε **αρνητικός** ή έχει **μηδενική τιμή** ($\sigma \leq 0$)

β) Η ημιτονοειδής και η εκθετική συνάρτηση, καθώς και συνδυασμοί αυτών, αποτελούν λύσεις των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων και επομένως γίνεται αντιληπτός ο πιο γενικός τρόπος περιγραφής δικτύων και συστημάτων σε σχέση με την Η.Μ.Κ.

Συγκεκριμένα στην έκφραση

$$\alpha(t) = A_m e^{\sigma t} \sin(\omega t + \varphi)$$

Αν $\sigma = 0$, τότε έχουμε $\alpha(t) = A_m \sin(\omega t + \varphi)$, την γνωστή περιγραφή στην Η.Μ.Κ.

Αν $\omega = 0$, τότε έχουμε $\alpha(t) = A_m e^{\sigma t} \sin \varphi = A'_m e^{\sigma t}$, δηλαδή περιγραφή με εκθετικές συναρτήσεις

Αν $\sigma = 0$ και $\omega = 0$, τότε έχουμε $\alpha(t) = A_m \sin \varphi$, δηλαδή περιγραφή με σταθερές συναρτήσεις

Βλέπουμε λοιπόν ότι στην Εκθετική Μόνιμη Κατάσταση έχουμε αρκετά μεγαλύτερη ευελιξία, σε σχέση με την Ημιτονική Μόνιμη Κατάσταση στην περιγραφή πιο σύνθετων περιπτώσεων

7.2) Χρήση παραστατικών μιγαδικών

Όπως είναι γνωστό στην Η.Μ.Κ. η γενική έκφραση όλων των μεγεθών, στο πεδίο του χρόνου, είναι:

$$\alpha(t) = A_m \sin(\omega t + \varphi)$$

Το μέγεθος $\alpha(t)$ να παρασταθεί από τον στρεφόμενο μιγαδικό αριθμό:

$$\bar{A}(t) = A_m e^{j(\omega t + \varphi)} = A_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}$$

όπου $\alpha(t) = \text{Im} \{ \bar{A}(t) \} = \text{Im} \{ A_m e^{j(\omega t + \varphi)} \}$

αντί του στρεφόμενου (χρονικά μεταβλητού) μιγαδικού $\bar{A}(t)$

χρησιμοποιείται ο σταθερός μιγαδικός $\bar{A} = \bar{A}(\omega) = A_m e^{j\varphi}$

όπου το ω θεωρείται γνωστό.

Στην περίπτωση που η γενική έκφραση των μεγεθών είναι:

$$\alpha(t) = A_m e^{\sigma t} \sin(\omega t + \varphi)$$

μπορούμε αντίστοιχα να γράψουμε:

$$\alpha(t) = \text{Im} \{ A_m e^{\sigma t} e^{j(\omega t + \varphi)} \} = \text{Im} \{ A_m e^{j\varphi} e^{(\sigma + j\omega)t} \}$$

ορίζοντας το μέγεθος: $s = \sigma + j\omega$ ως την **μιγαδική συχνότητα** s θα έχουμε:

$$\alpha(t) = \text{Im} \{ A_m e^{j\varphi} e^{st} \}$$

ο χρονικά μεταβαλλόμενος μιγαδικός αριθμός

$$\bar{A}(t) = A_m e^{j\varphi} e^{st}$$

του οποίου το φανταστικό μέρος είναι η συνάρτηση $a(t)$,

$$\text{Im} \{ \bar{A}(t) \} = a(t)$$

είναι ο παραστατικός μιγαδικός της συνάρτησης $a(t) = A_m e^{\sigma t} \sin(\omega t + \varphi)$

Και στην περίπτωση αυτή μπορούμε αντί του χρονικά μεταβλητού $\bar{A}(t) = A_m e^{j\varphi} e^{st}$ να χρησιμοποιήσουμε τον σταθερό μιγαδικό

$$\bar{A} = \bar{A}(s) = A_m e^{j\varphi}$$

όπου η μιγαδική συχνότητα s θεωρείται γνωστή

Συνηθίζεται, στην διεθνή βιβλιογραφία, στην Ε.Μ.Κ. οι παραστατικοί μιγαδικοί να μην γράφονται με την γνωστή παύλα από πάνω τους. Μερικές φορές χρησιμοποιούνται τονισμένα (bold) σύμβολα. Έτσι γράφουμε

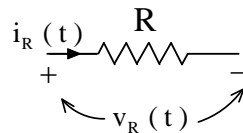
$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(s) = A_m e^{j\varphi}$$

7.3) Σχέσεις τάσεως ρεύματος των τριών βασικών ηλεκτρικών στοιχείων στην Ε.Μ.Κ.

Παρακάτω διατυπώνονται για τα τρία βασικά ηλεκτρικά στοιχεία οι σχέσεις τάσεως – ρεύματος στην Εκθετική Μόνιμη Κατάσταση. Οι σχέσεις αυτές, όπως είναι φυσικό, προκύπτουν απ' ευθείας από τις αντίστοιχες σχέσεις που ισχύουν στο πεδίο του χρόνου, θέτοντας την βασική παραδοχή ότι όλα τα μεγέθη (τάσεις – ρεύματα) έχουν την μορφή $a(t) = A_m e^{\sigma t} \sin(\omega t + \varphi)$

7.3.1) Ωμική αντίσταση R

Στο πεδίο του χρόνου ισχύει: $v_R(t) = R i_R(t)$



Θεωρούμε ότι $i_R(t) = I_{Rm} e^{\sigma t} \sin(\omega t + \varphi)$ άρα ο παραστατικός μιγαδικός του $i_R(t)$ θα είναι:

$$I_R(t) = I_{Rm} e^{j\varphi} e^{st}$$

και αντί αυτού, όπως προαναφέρθηκε, χρησιμοποιείται ο σταθερός

$$\mathbf{I}_R(s) = I_{Rm} e^{j\varphi}$$

ισχύει $v_R(t) = R i_R(t) = R I_{Rm} e^{\sigma t} \sin(\omega t + \varphi)$ άρα ο παραστατικός μιγαδικός του $v_R(t)$ θα είναι :

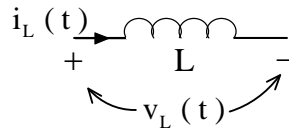
$$V_R(t) = R I_{Rm} e^{j\varphi} e^{\sigma t} = R I_R(t)$$

ή χρησιμοποιώντας σταθερούς μιγαδικούς:

$$V_R(s) = R I_{Rm} e^{j\varphi} = R I_R(s)$$

7.3.2) Αυτεπαγωγή L

Στο πεδίο του χρόνου: $v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$



Θεωρούμε ότι $i_L(t) = I_{Lm} e^{\sigma t} \sin(\omega t + \varphi)$ άρα ο παραστατικός μιγαδικός θα είναι

$$I_L(t) = I_{Lm} e^{j\varphi} e^{\sigma t}$$

και χρησιμοποιώντας τον σταθερό μιγαδικό:

$$I_L(s) = I_{Lm} e^{j\varphi}$$

ισχύει $v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = L I_{Lm} \sigma e^{\sigma t} \sin(\omega t + \varphi) + L I_{Lm} e^{\sigma t} \omega \cos(\omega t + \varphi) =$

$$= L I_{Lm} \sigma e^{\sigma t} \sin(\omega t + \varphi) + L I_{Lm} e^{\sigma t} \omega \sin(\omega t + \varphi + \pi/2)$$

άρα ο παραστατικός μιγαδικός του $v_L(t)$ θα προκύψει από το μιγαδικό άθροισμα

$$V_L(t) = L\sigma I_L(t) + L\omega I_L(t) e^{j\pi/2} = L\sigma I_L(t) + jL\omega I_L(t)$$

δηλαδή:

$$V_L(t) = (\sigma + j\omega) L I_L(t) = s L I_L(t)$$

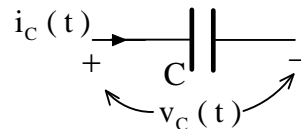
ή $V_L(t) = s L I_L(t) = s L I_{Lm} e^{j\varphi} e^{\sigma t}$

και χρησιμοποιώντας σταθερούς μιγαδικούς:

$$V_L(s) = s L I_L(s)$$

7.3.3) Χωρητικότητα C

Στο πεδίο του χρόνου: $i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$



Θεωρούμε ότι $v_C(t) = V_{Cm} e^{\sigma t} \sin(\omega t + \varphi)$ άρα ο παραστατικός μιγαδικός θα είναι

$$V_C(t) = V_{Cm} e^{j\varphi} e^{\sigma t}$$

και χρησιμοποιώντας τον σταθερό μιγαδικό:

$$\mathbf{V}_C(\mathbf{s}) = V_{Cm} e^{j\varphi}$$

$$\text{Ισχύει } i_C(t) = C \frac{d v_C(t)}{d t} = C V_{Cm} \sigma e^{\sigma t} \sin(\omega t + \varphi) + C V_{Cm} e^{\sigma t} \omega \cos(\omega t + \varphi) =$$

$$= C V_{Cm} \sigma e^{\sigma t} \sin(\omega t + \varphi) + C V_{Cm} e^{\sigma t} \omega \sin(\omega t + \varphi + \pi/2)$$

άρα ο παραστατικός μιγαδικός του $i_C(t)$ θα προκύψει από το μιγαδικό άθροισμα:

$$I_C(t) = C\sigma V_C(t) + C\omega V_C(t) e^{j\pi/2} = C\sigma V_C(t) + jC\omega V_C(t)$$

δηλαδή:

$$I_C(t) = (\sigma + j\omega) C V_C(t) = s C V_C(t)$$

ή

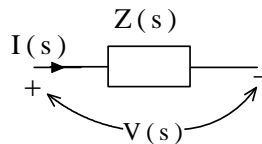
$$I_C(t) = s C V_C(t) = s C V_{Cm} e^{j\varphi} e^{\sigma t}$$

και χρησιμοποιώντας σταθερούς μιγαδικούς:

$$I_C(\mathbf{s}) = s C V_C(\mathbf{s})$$

7.4) Σύνθετη αντίσταση στην E.M.K.

Ακριβώς όπως και στο πεδίο του χρόνου μπορούμε και στην E.M.K. να σκεφτούμε έναν «γενικευμένο» νόμο του Ohm σύμφωνα με τον οποίο σε ένα ηλεκτρικό στοιχείο ορίζεται η γενικευμένη σύνθετη αντίσταση $Z(\mathbf{s})$

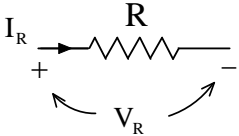
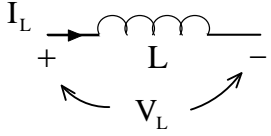
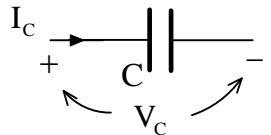


$$Z(\mathbf{s}) = \frac{V(\mathbf{s})}{I(\mathbf{s})} \quad (\text{Ohm})$$

και η γενικευμένη σύνθετη αγωγιμότητα $Y(\mathbf{s})$

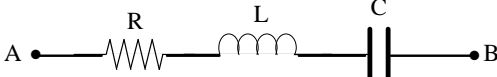
$$Y(\mathbf{s}) = \frac{1}{Z(\mathbf{s})} \quad (\text{Ohm}^{-1})$$

Για τα τρία βασικά παθητικά ηλεκτρικά στοιχεία θα έχουμε:

<p>Ωμική αντίσταση R</p> 	$Z_R (s) = \frac{V_R}{I_R} = R$	$Y_R (s) = \frac{I_R}{V_R} = \frac{1}{R}$
<p>Πηνίο L</p> 	$Z_L (s) = \frac{V_L}{I_L} = s L$	$Y_L (s) = \frac{I_L}{V_L} = \frac{1}{s L}$
<p>Ποικνωτής C</p> 	$Z_C (s) = \frac{V_C}{I_C} = \frac{1}{s C}$	$Y_C (s) = \frac{I_C}{V_C} = s C$

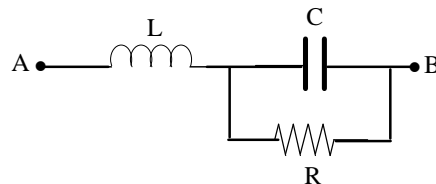
Αν θεωρήσουμε συνδεσμολογίες δύο ακροδεκτών **A-B**, αποτελούμενες από τα βασικά στοιχεία R, L, C μπορούμε να υπολογίσουμε την συνολική γενικευμένη σύνθετη αντίσταση $Z (s)$. Ισχύουν και εδώ όλοι οι κανόνες σύνθεσης αντιστάσεων που είναι γνωστοί από τη στοιχειώδη θεωρία κυκλωμάτων. Παρακάτω αναφέρουμε δύο παραδείγματα:

α) Να βρεθεί η $Z_{AB} (s)$



$$Z_{AB} (s) = R + s L + \frac{1}{s C}$$

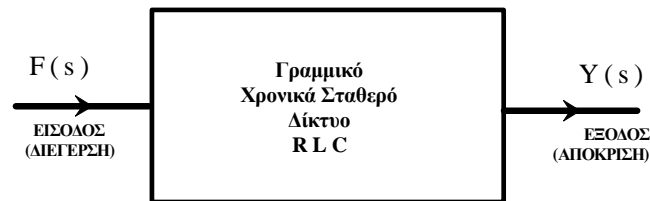
β) Να βρεθεί η $Z_{AB} (s)$



$$Z_{AB} (s) = s L + \frac{R \cdot \frac{1}{s C}}{R + \frac{1}{s C}} = s L + \frac{\frac{R}{s C}}{\frac{1 + s R C}{s C}} = s L + \frac{R}{1 + s R C}$$

7.5) Η συνάρτηση μεταφοράς στην Ε.Μ.Κ

Ο ορισμός της συνάρτησης μεταφοράς που είδαμε στο Κεφ.5 , για την Η.Μ.Κ. γενικεύεται και για την Ε.Μ.Κ. θέτοντας όπου $j \omega$ το s . Έτσι θα έχουμε:



$$H(s) = \frac{\bar{Y}(s)}{\bar{F}(s)} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

Παράδειγμα

Ένα δίκτυο έχει ακόλουθη Δ.Ε. που συνδέει διέγερση και απόκριση

$$(2D + 3)y(t) = (D + 1)f(t)$$

να βρεθεί η μόνιμη απόκριση του δικτύου στο σήμα εισόδου

$$f(t) = 10e^{-5t} \sin(20t + 30^\circ)$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του δικτύου θα είναι :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{s+1}{2s+3}$$

και η μιγαδική συχνότητα θα είναι: $s = -5 + j20$

όπου: $F(s) = 10e^{j30^\circ}$

$$\begin{aligned} \text{άρα} \quad Y(s) &= H(s)F(s) = \\ &= \frac{-5 + j20 + 1}{2(-5 + j20) + 3} 10e^{j30^\circ} = \frac{-4 + j20}{-7 + j40} 10e^{j30^\circ} = 5.0217 e^{j31.4^\circ} \end{aligned}$$

άρα η μόνιμη απόκριση θα είναι:

$$y(t) = 5.0217 e^{-5t} \sin(20t + 31.4^\circ)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ

8.1) Το πεδίο της μιγαδικής συχνότητας

Στο προηγούμενο κεφάλαιο αναφέρθηκε ο τρόπος περιγραφής ενός ηλεκτρικού δικτύου στην Εκθετική Μόνιμη Κατάσταση (Ε.Μ.Κ.). Διατυπώθηκαν οι σχέσεις τάσεως ρεύματος για τα 3 βασικά ηλεκτρικά στοιχεία R, L, C στην Ε.Μ.Κ. καθώς και η έννοια της γενικευμένης σύνθετης αντίστασης $Z(s)$ όπου η μεταβλητή $s = \sigma + j\omega$ ονομάστηκε **μιγαδική συχνότητα**. Μπορούμε εδώ να πούμε ότι, διατυπώνοντας τις σχέσεις αυτές, “μεταφέραμε” τα στοιχεία R, L, C από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της μιγαδικής συχνότητας.

Είναι προφανές ότι στην Ε.Μ.Κ. δεν μπορούν να μελετηθούν μεταβατικά φαινόμενα και αυτό μπορεί να γίνει άμεσα αντιληπτό από το ακόλουθο σκεπτικό:

- Για την εύρεση των σχέσεων τάσεως - ρεύματος για το πηνίο L και τον πυκνωτή C δεν λήφθηκαν υπ’ όψη οι αρχικές καταστάσεις $i_L(0^-)$ και $V_C(0^-)$ αντίστοιχα, και επομένως οι σχέσεις αυτές ισχύουν στην μόνιμη κατάσταση.

Είναι όμως δυνατόν να μελετηθούν **και μεταβατικά φαινόμενα** σε ένα ηλεκτρικό δίκτυο ή σύστημα όταν αυτό ευρίσκεται στο πεδίο της μιγαδικής συχνότητας s . Αυτό μπορεί να γίνει με την χρήση ενός μαθηματικού “εργαλείου” που ονομάζεται μετασχηματισμός Laplace

Ο μετασχηματισμός Laplace μεταφέρει μια συνάρτηση $f(t)$ από το πεδίο του χρόνου t , στο πεδίο της μιγαδικής συχνότητας s . Η μετασχηματισμένη συνάρτηση γράφεται συνήθως με κεφαλαία γράμματα $F(s)$.

Στα επόμενα θα εξηγηθεί πλήρως η όλη μεθοδολογία του μετασχηματισμού Laplace και ο τρόπος εφαρμογής του στην μελέτη ηλεκτρικών δικτύων. Θα προηγηθεί, όπως είναι φυσικό, ένα καθαρά μαθηματικό κομμάτι και θα ακολουθήσει ο τρόπος εφαρμογής.

8.2) Ορισμός του Μετασχηματισμού Laplace

Έστω $f(t)$ μια πραγματική συνάρτηση οι οποίοι πληροί κάποιες προϋποθέσεις τις οποίες δεν θα αναφέρουμε εδώ, θεωρώντας ότι ισχύουν για όλες τις συναρτήσεις με τις οποίες θα ασχοληθούμε.

Ορίζεται, στα Μαθηματικά, μία συνάρτηση $F(s)$ η οποία λέγεται μετασχηματισμός Laplace της $f(t)$ και μπορούμε να γράψουμε:

$$F(s) = \mathcal{L} \{ f(t) \}$$

Όπου το σύμβολο: $\mathcal{L} \{ \quad \}$ υποδηλώνει τον μετασχηματισμό Laplace, ο οποίος ορίζεται ως εξής:

$$F(s) = \mathcal{L} \{ f(t) \} = \int_0^{+\infty} e^{-s \cdot t} f(t) dt$$

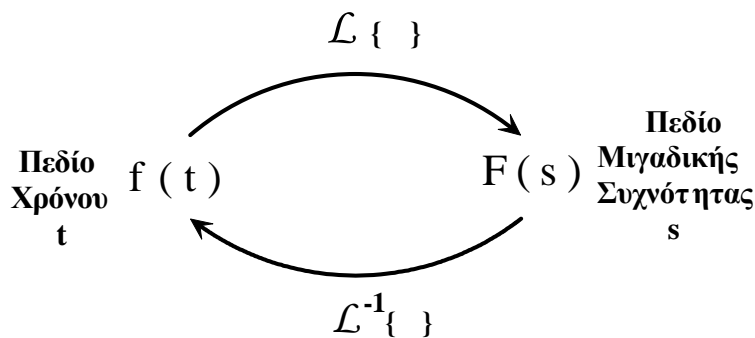
όπου $s = \sigma + j\omega$ μία μιγαδική μεταβλητή και τα σ και ω μπορούν να πάρουν κάθε πραγματική τιμή. Η μεταβλητή s αποκαλείται **μιγαδική συχνότητα**.

Ορίζεται επίσης και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace $\mathcal{L}^{-1} \{ \quad \}$ της $F(s)$ και προφανώς θα ισχύει:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ F(s) \}$$

Δεν θα αναφέρουμε εδώ τον μαθηματικό ορισμό του αντιστρόφου μετασχηματισμού Laplace.

Συνοψίζοντας τα προηγούμενα μπορούμε να γράψουμε:



Δηλαδή ο μετασχηματισμός Laplace μεταφέρει μια πραγματική συνάρτηση f του χρόνου t , στην αντίστοιχη της F στο πεδίο της λεγόμενης μιγαδικής συχνότητας s .

Στο ερώτημα ποια είναι η χρησιμότητα του μετασχηματισμού Laplace η απάντηση είναι ή ακόλουθη:

- Είναι συνήθως ευκολότερο να λυθεί ένα μαθηματικό πρόβλημα στο πεδίο της μιγαδικής συχνότητας s παρά στο πεδίο του χρόνου t . Συνεπώς μπορούμε, μέσω του μετασχηματισμού Laplace, να «μεταφέρουμε» το πρόβλημα στο πεδίο s , να το επιλύσουμε εκεί, και τέλος, μέσω του αντιστρόφου μετασχηματισμού Laplace να επανέλθουμε στο πεδίο του χρόνου και να έχουμε την επιθυμητή λύση. Με την έκφραση μαθηματικό πρόβλημα εννοείται εδώ η επίλυση μιας διαφορικής εξίσωσης.

8.3) Μετασχηματισμοί Laplace βασικών συναρτήσεων

Αρχικά αναφέρουμε ότι, για τις ανάγκες του μαθήματος, θα μας απασχολήσει μόνον ένας μικρός αριθμός συναρτήσεων (ή σημάτων) για τις οποίες θα υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Laplace. Οι συναρτήσεις αυτές είναι τα στοιχειώδη ανώμαλα σήματα $\delta(t)$, $u(t)$, $r(t)$, η εκθετική συνάρτηση, και η ημιτονοειδής συνάρτηση. Έτσι θα έχουμε:

$$\text{Κρουστική συνάρτηση } \delta(t): \quad \mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_0^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = e^{-0s} = 1$$

$$\text{Βηματική συνάρτηση } u(t): \quad \mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^{+\infty} u(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} 1 e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-st}\right] = \frac{1}{s}$$

Με όμοιο τρόπο, εφαρμόζοντας τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace, θα καταλήξουμε στα ακόλουθα:

$$\text{Αναρριχτική συνάρτηση } r(t): \quad \mathcal{L}\{r(t)\} = \frac{1}{s^2}$$

$$\text{Εκθετική συνάρτηση } e^{\pm\alpha t}: \quad \mathcal{L}\{e^{\pm\alpha t}\} = \frac{1}{s \mp \alpha}$$

$$\text{Ημιτονοειδής συνάρτηση } \sin(\omega t): \quad \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{\omega^2 + s^2}$$

Για περισσότερες περιπτώσεις σημάτων μπορούμε να συμβουλευθούμε σχετικούς πίνακες

8.4) Βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace

Από τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace θα αναφέρουμε (χωρίς απόδειξη) μόνον εκείνες που θα χρησιμοποιηθούν για τις ανάγκες του μαθήματος. Έτσι θα έχουμε

α) Γραμμικότητα

Ο μετασχηματισμός Laplace είναι γραμμικός, δηλ. ισχύει:

$$\mathcal{L} \{ \alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) \} = \alpha_1 \mathcal{L} \{ f_1(t) \} + \alpha_2 \mathcal{L} \{ f_2(t) \}$$

όπου α_1, α_2 πραγματικοί αριθμοί

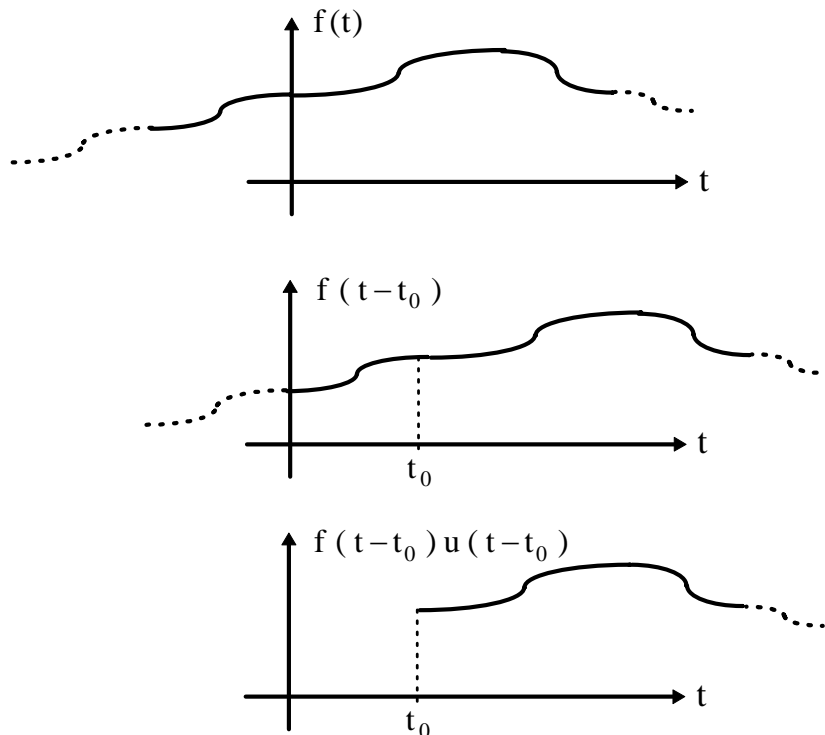
β) Μετάθεση στην περιοχή του χρόνου

$$\text{Αν } \mathcal{L} \{ f(t) \} = F(s)$$

$$\text{τότε } \mathcal{L} \{ f(t-t_0)u(t-t_0) \} = F(s)e^{-st_0}$$

$$\text{ή αντίστροφα } \mathcal{L}^{-1} \{ F(s)e^{-st_0} \} = f(t-t_0)u(t-t_0)$$

Με τα παρακάτω σχήματα φαίνεται η διαφορά μεταξύ των συναρτήσεων $f(t)$, $f(t-t_0)$ και $f(t-t_0)u(t-t_0)$



γ) Μετασχηματισμός Laplace τών παραγώγων

$$\text{Αν } \mathcal{L} \{ f(t) \} = F(s)$$

$$\text{τότε } \mathcal{L} \left\{ \frac{df(t)}{dt} \right\} = s F(s) - f(0^-)$$

$$\text{και } \mathcal{L} \left\{ \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \right\} = s^2 F(s) - s f(0^-) - \frac{df(0^-)}{dt}$$

όπου $f(0^-)$ και $\frac{df(0^-)}{dt}$ οι τιμές της συναρτήσεως $f(t)$ και της πρώτης παραγώγου της, για $t = 0^-$. Οι τιμές αυτές ονομάζονται και **αρχικές συνθήκες**

δ) Μετασχηματισμός Laplace του ολοκληρώματος

$$\text{Αν } \mathcal{L} \{ f(t) \} = F(s)$$

$$\text{τότε } \mathcal{L} \left\{ \int_0^t f(t') dt' \right\} = \frac{F(s)}{s}$$

Παρατηρούμε εδώ ότι, όταν οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές, η παραγωγήιση, στο πεδίο της μιγαδικής συχνότητας s ανάγεται σε πολλαπλασιασμό επί s , και η ολοκλήρωση ανάγεται σε διαίρεση δια s

ε) Συνέλιξη

Η έννοια της συνέλιξης δύο συναρτήσεων έχει πολύ σημαντική σημασία στη θεωρία σημάτων και συστημάτων. Η συνέλιξη δύο συναρτήσεων $f_1(t)$ και $f_2(t)$ ορίζεται ως εξής:

$$\text{συνέλιξη των } f_1(t), f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau$$

Παρατηρούμε ότι η συνέλιξη έχει την αντιμεταθετική ιδιότητα

Αποδεικνύεται ότι ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right\} = F_1(s) F_2(s)$$

και αντίστροφα

$$\mathcal{L}^{-1} \{ F_1(s) \cdot F_2(s) \} = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

Δηλαδή η συνέλιξη στο πεδίο του χρόνου μεταφέρεται σε γινόμενο στο πεδίο της μιγαδικής συχνότητας Η σχέση αυτή είναι σημαντικότερη όπως θα δούμε

Στον παρακάτω πίνακα συνοψίζουμε όλα τα προηγούμενα

Κρουστική συνάρτηση $\delta(t)$	$\mathcal{L} \{ \delta(t) \} = 1$	$\mathcal{L} \{ K \delta(t - t_0) \} = K e^{-s t_0}$
Βηματική συνάρτηση $u(t)$	$\mathcal{L} \{ u(t) \} = \frac{1}{s}$	$\mathcal{L} \{ K u(t - t_0) \} = K \frac{1}{s} e^{-s t_0}$
Αναρριχητική συνάρτηση $r(t)$	$\mathcal{L} \{ r(t) \} = \frac{1}{s^2}$	$\mathcal{L} \{ K r(t - t_0) \} = K \frac{1}{s^2} e^{-s t_0}$
Εκθετική συνάρτηση $e^{\pm \alpha t}$	$\mathcal{L} \{ e^{\pm \alpha t} \} = \frac{1}{s \mp \alpha}$	$\mathcal{L} \{ K e^{\pm \alpha(t - t_0)} u(t - t_0) \} =$ $= K \frac{1}{s \mp \alpha} e^{-s t_0}$

8.5) Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

Όπως προαναφέραμε, για την πλήρη εφαρμογή της μεθόδου Laplace στην επίλυση γραμμικών ηλεκτρικών δικτύων, και εν γένει συστημάτων είναι απαραίτητος ο υπολογισμός και του αντιστρόφου μετασχηματισμού Laplace.

Στην περίπτωση επίλυσης γραμμικών δικτύων και συστημάτων, το μαθηματικό μας πρόβλημα είναι η επίλυση μιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές.

Οι συναρτήσεις $F(s)$ που εμφανίζονται εδώ (και που πρέπει να αντιστραφούν) είναι **πάντοτε** της μορφής:

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$$

όπου τα $A(s)$ και $B(s)$ είναι πολυώνυμα του s δηλ.

$$A(s) = a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0 \quad \text{όπου } a_0, a_1, \dots, a_m \text{ πραγμ. αριθμοί}$$

και

$$B(s) = b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0 \quad \text{όπου } b_0, b_1, \dots, b_n \text{ πραγμ. αριθμοί}$$

και ισχύει πάντα $m \leq n$.

Αν έχουμε $m = n$ τότε εκτελούμε την διαίρεση των πολυωνύμων $A(s)$ δια $B(s)$

Για να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της $F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$ την αναλύουμε σε απλά κλάσματα σύμφωνα με τη μέθοδο Heaviside.

Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται ως εξής:

- Εξετάζουμε τις ρίζες, s_1, s_2, \dots, s_n , του παρονομαστή $B(s)$ (εδώ θα περιοριστούμε στην περίπτωση απλών ριζών, πραγματικών ή μιγαδικών)

α) Περίπτωση απλών πραγματικών ριζών:

Τότε η $F(s)$ μπορεί να γραφεί ως εξής

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{A(s_1)}{B'(s_1)} \cdot \frac{1}{s-s_1} + \frac{A(s_2)}{B'(s_2)} \cdot \frac{1}{s-s_2} + \dots + \frac{A(s_n)}{B'(s_n)} \cdot \frac{1}{s-s_n}$$

άρα

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{A(s_1)}{B'(s_1)} \cdot e^{s_1 t} + \frac{A(s_2)}{B'(s_2)} \cdot e^{s_2 t} + \dots + \frac{A(s_n)}{B'(s_n)} \cdot e^{s_n t}$$

Με το σύμβολο $B'(s)$ προφανώς εννοείται η παράγωγος του $B(s)$ και οι ποσότητες

$$\frac{A(s_1)}{B'(s_1)}, \frac{A(s_2)}{B'(s_2)} \dots \text{ κλπ, είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.}$$

Παρατηρούμε ότι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace είναι ένα άθροισμα εκθετικών συναρτήσεων με διαφορετικούς εκθέτες

β) Περίπτωση απλών μιγαδικών ριζών σε συζυγή ζεύγη :

και πάλι η $F(s)$ γράφεται με τον ίδιο τρόπο

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{A(s_1)}{B'(s_1)} \cdot \frac{1}{s-s_1} + \frac{A(s_2)}{B'(s_2)} \cdot \frac{1}{s-s_2} + \dots + \frac{A(s_n)}{B'(s_n)} \cdot \frac{1}{s-s_n}$$

κάθε συζυγές ζεύγος π.χ. το $s_1 = \sigma + j\omega$, $s_2 = \sigma - j\omega$ θα δίνει αντίστροφη συνάρτηση την

$$q(t) = 2Me^{\sigma t} \cos(\omega t + \varphi)$$

όπου $\frac{A(s_1)}{B'(s_1)} = Me^{j\varphi}$ με s_1 την ρίζα με το θετικό φανταστικό μέρος

Δηλαδή μπορούμε να γράψουμε:

$$\mathcal{L}^{-1} \{ F(s) \} = f(t) = 2Me^{\sigma t} \cos(\omega t + \varphi) + \mathcal{L}^{-1} \{ F_1(s) \}$$

Όπου $F_1(s)$ οι λοιποί όροι της αναπτύξεως που αντιστοιχούν σε πραγματικές ρίζες.

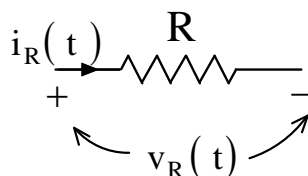
8. 6) Μετασχηματισμένα κατά Laplace στοιχεία κυκλωμάτων

Στο προηγούμενο κεφάλαιο εξετάσαμε πως διατυπώνονται οι σχέσεις τάσεως – ρεύματος των τριών βασικών ηλεκτρικών στοιχείων στην Εκθετική Μόνιμη Κατάσταση. Είναι προφανές ότι μέσω της E.M.K. “μεταφερόμαστε” στο πεδίο της μιγαδικής συχνότητας αλλά δεν λαμβάνουμε υπ’ όψη τις αρχικές καταστάσεις και συνεπώς δεν μπορούμε να μελετήσουμε μεταβατικά φαινόμενα.

Ο μετασχηματισμός Laplace μας επιτρέπει να ξεπεράσουμε αυτό το πρόβλημα.

Θα εξετάσουμε παρακάτω τα 3 βασικά ηλεκτρικά στοιχεία και θα δούμε πως μεταφέρονται οι σχέσεις τάσεως – ρεύματος των στοιχείων αυτών στο πεδίο της μιγαδικής συχνότητας, λαμβάνοντας υπ’ όψη και τις αρχικές καταστάσεις

8. 6. 1) Ωμική αντίσταση R



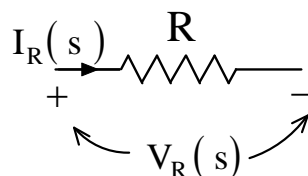
Οι σχέσεις τάσεως- ρεύματος στο πεδίο του χρόνου είναι:

$$v_R(t) = R i_R(t) \quad \text{και} \quad i_R(t) = \frac{1}{R} v_R(t)$$

Λαμβάνοντας το μετασχηματισμό Laplace αυτών των σχέσεων έχουμε

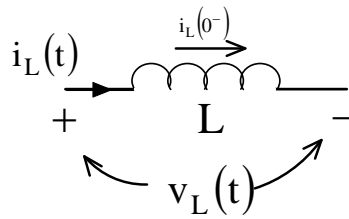
$$V_R(s) = R I_R(s) \quad \text{και} \quad I_R(s) = \frac{1}{R} V_R(s)$$

Άρα λοιπόν στο πεδίο της μιγαδικής συχνότητας s το στοιχείο της ωμικής αντίστασης R μετασχηματίζεται ως εξής:



Παρατηρούμε ότι λόγω της απλής αναλογίας μεταξύ τάσεως και ρεύματος, στην ωμική αντίσταση, δεν υπάρχει διαφορά στις σχέσεις τάσεως – ρεύματος μεταξύ της E.M.K και του μετασχηματισμού Laplace

8. 6. 2) Πηνίο με αυτεπαγωγή L



Οι σχέσεις τάσεως- ρεύματος στο πεδίο του χρόνου είναι:

$$v_L(t) = L \frac{d i_L(t)}{d t} \qquad i_L(t) = i_L(0^-) + \frac{1}{L} \int_0^t v_L(t') dt'$$

όπου $i_L(0^-)$ η αρχική κατάσταση για το ρεύμα του πηνίου

Λαμβάνοντας το μετασχηματισμό Laplace αυτών των σχέσεων έχουμε:

η πρώτη σχέση δίνει:

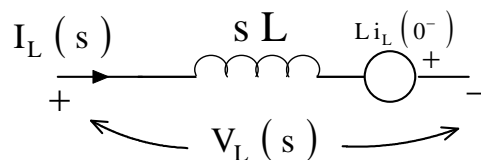
$$\mathcal{L} \{ v_L(t) \} = V_L(s) = \mathcal{L} \left\{ L \frac{d i_L(t)}{d t} \right\} = L (s I_L(s) - i_L(0^-))$$

παρατηρούμε ότι η τάση $V_L(s)$ μπορεί να γραφεί σαν διαφορά δύο τάσεων

$$V_L(s) = L s I_L(s) - L i_L(0^-)$$

Ο όρος $L s I_L(s)$ είναι γινόμενο ρεύματος επί την ποσότητα $s L$ η οποία μπορεί να θεωρηθεί ως σύνθετη αντίσταση (διότι πολλαπλασιαζόμενη με ρεύμα μας δίνει τάση)

Επίσης ο όρος $- L i_L(0^-)$ (σταθερή ποσότητα) μπορεί να θεωρηθεί ως μια σταθερή πηγή τάσεως. Με βάση το ανωτέρω σκεπτικό μπορούμε να έχουμε το ακόλουθο ισοδύναμο του πηνίου (μαζί με την αρχική κατάσταση για το ρεύμα) στο πεδίο της μιγαδικής συχνότητας.



Δηλαδή πρόκειται για ένα στοιχείο αυτεπαγωγής που έχει σύνθετη αντίσταση $s L$ με συνδεδεμένη εν σειρά μία πηγή τάσεως με τιμή $L i_L(0^-)$ και πολικότητα όπως φαίνεται στο σχήμα

Αν πάρουμε τον μετασχηματισμό Laplace της δεύτερης σχέσης τάσεως - ρεύματος

$$\mathcal{L} \{ i_L (t) \} = \mathcal{L} \{ i_L (0^-) \} + \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{L} \int_0^t v_L (t') dt' \right\}$$

ή
$$I_L (s) = \frac{i_L (0^-)}{s} + \frac{V_L (s)}{s L}$$

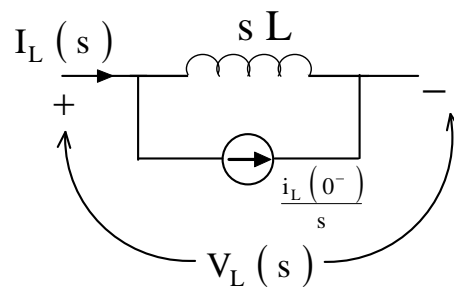
Παρατηρούμε ότι το ρεύμα $I_L (s)$ μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα δύο ρευμάτων. Ο

πρώτος όρος $\frac{i_L (0^-)}{s}$ μπορεί να θεωρηθεί ως πηγή ρεύματος ενώ ο δεύτερος όρος

$\frac{V_L (s)}{s L}$ είναι πηλίκο τάσεως δια την ποσότητα $s L$ η οποία μπορεί να θεωρηθεί, όπως

προαναφέραμε, ως σύνθετη αντίσταση.

Άρα μπορούμε να έχουμε το ακόλουθο δεύτερο ισοδύναμο του πηνίου στο πεδίο της μιγαδικής συχνότητας



Παρατηρώντας τα δύο μετασχηματισμένα κυκλώματα του πηνίου, στο πεδίο s , εύκολα συμπεραίνουμε ότι είναι μεταξύ τους ισοδύναμα, πράγμα που προφανώς είναι αναμενόμενο.

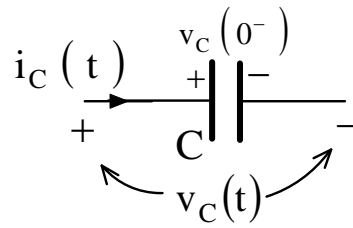
Επίσης φαίνεται αμέσως ότι σε περίπτωση μηδενικής αρχικής καταστάσεως ,

$i_L (0^-) = 0$ το μετασχηματισμένο κατά Laplace του πηνίου συμπίπτει ακριβώς με αυτό της E.M.K.

Στο ερώτημα πιο από τα δύο ισοδύναμα πρέπει να χρησιμοποιείται η απάντηση είναι:

-Εκείνο που καθιστά ευκολότερη τη λύση του προβλήματος που μας απασχολεί.

8. 6.3) Πυκνωτής με χωρητικότητα C

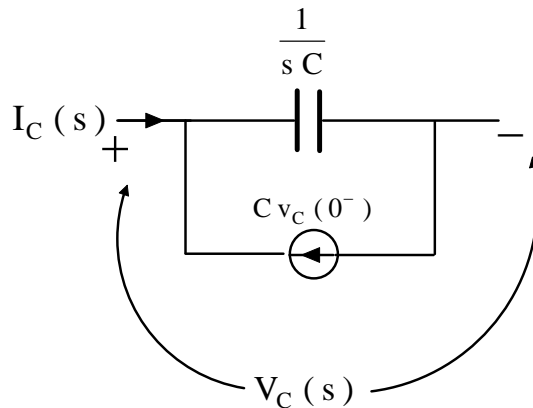


Οι σχέσεις τάσεως- ρεύματος στο πεδίο του χρόνου είναι:

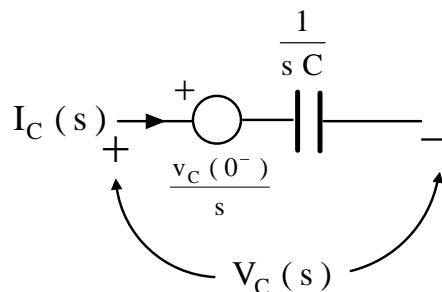
$$i_C(t) = C \frac{d v_C(t)}{d t} \qquad v_C(t) = v_C(0^-) + \frac{1}{C} \int_0^t i_C(t') dt'$$

όπου $v_C(0^-)$ η αρχική κατάσταση για την τάση του πυκνωτή

Εφαρμόζοντας ακριβώς την ίδια διαδικασία όπως στο πηνίο, εύκολα θα καταλήξουμε και εδώ σε δύο διαφορετικά (και φυσικά ισοδύναμα μεταξύ τους) μετασχηματισμένα κυκλώματα στο πεδίο του s , για τον πυκνωτή.



$$I_C(s) = -C v_C(0^-) + s C V_C(s)$$



$$V_C(s) = \frac{v_C(0^-)}{s} + I_C(s) \frac{1}{s C}$$

8. 7) Πορεία επίλυσης ενός ηλεκτρικού δικτύου με τη μέθοδο Laplace

Έστω ότι μας δίδεται ένα δίκτυο αποτελούμενο από στοιχεία R , L , C , με δεδομένες τις αρχικές καταστάσεις για κάθε L και C , και επίσης δίδονται οι πηγές (διεγέρσεις) του δικτύου.

Ζητείται (ή ζητούνται) η τάση (ή οι τάσεις) ή το ρεύμα (ή τα ρεύματα) σε κάποιο (ή κάποιους) κλάδο (κλάδους). Όπως είναι γνωστό, το πρόβλημα αυτό λέγεται ανάλυση δικτύου.

Τα διαδοχικά βήματα που ακολουθούμε για την επίλυση είναι:

α) Μετασχηματίζουμε, κατά Laplace, όλα τα στοιχεία του δικτύου, λαμβάνοντας υπ' όψη και τις αρχικές καταστάσεις για τα πηνία και τους πυκνωτές (εφ' όσον υπάρχουν)

β) Μετασχηματίζουμε, κατά Laplace, τις συναρτήσεις (σήματα) των πηγών του δικτύου

γ) Το δίκτυο που προέκυψε λέγεται μετασχηματισμένο κατά Laplace και η επίλυση του είναι πλέον ένα απλό αλγεβρικό πρόβλημα

δ) Αντιστρέφουμε, κατά Laplace, την λύση που έχουμε βρει στο πεδίο της μιγαδικής συχνότητας και παίρνουμε την επιθυμητή λύση στο πεδίο του χρόνου.

Η λύση (απόκριση) που βρίσκουμε είναι η **πλήρης απόκριση**, δηλαδή περιλαμβάνει την **μόνιμη** και την **μεταβατική** απόκριση, διότι έχουν ληφθεί υπ' όψη οι αρχικές καταστάσεις (δηλ. οι τιμές των ρευμάτων των πηνίων και των τάσεων των πυκνωτών του δικτύου, κατά την στιγμή της εφαρμογής των διεγέρσεων $t = 0$)

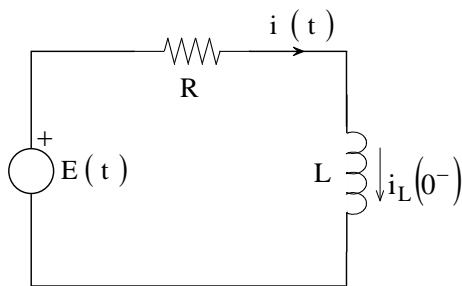
Επίσης αναφέρουμε και το εξής:

Σε ένα μετασχηματισμένο, κατά Laplace, ηλεκτρικό δίκτυο, ισχύουν όλοι οι νόμοι, θεωρήματα, μέθοδοι, κανόνες, κ.λ.π. που μας είναι γνωστοί από τη θεωρία κυκλωμάτων συνεχούς ρεύματος. Η βασική διαφορά, όπως προαναφέραμε, είναι ότι οι ολοκληρωδιαφορικές σχέσεις που συναντάμε κατά τη μελέτη ενός δικτύου στην περιοχή του χρόνου, μετατρέπονται σε απλές αλγεβρικές στο πεδίο της μιγαδικής συχνότητας.

8. 8) Παραδείγματα επιλύσεως ηλεκτρικών δικτύων

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1)

Δίδεται το ακόλουθο δίκτυο:



Δίδονται οι τιμές των R, L

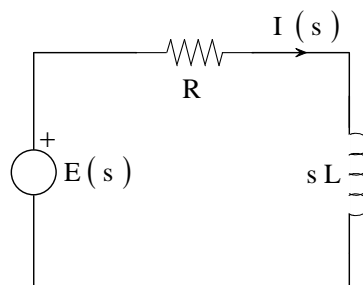
και επίσης $i_L(0^-) = 0 \text{ A}$

Η τάση της πηγής είναι η κρουστική συνάρτηση $E(t) = \delta(t)$

Ζητείται να υπολογιστεί το ρεύμα $i(t)$ για $0 \leq t < \infty$

Στο δίκτυο αυτό η διέγερση (είσοδος) είναι η τάση της πηγής $E(t)$ και η απόκριση (έξοδος) είναι το ρεύμα $i(t)$. Επειδή η διέγερσή μας εδώ είναι η κρουστική συνάρτηση, η απόκριση που θα πάρουμε λέγεται, όπως είναι γνωστό, **κρουστική απόκριση**.

Μετασχηματίζουμε το δίκτυο στην περιοχή της μιγαδικής συχνότητας.



Επειδή η αρχική κατάσταση για το ρεύμα του πηνίου είναι $i_L(0^-) = 0 \text{ A}$ το μετασχηματισμένο κύκλωμα, κατά Laplace, δεν θα περιλαμβάνει πηγή στο ισοδύναμο του πηνίου.

Η επίλυση του μετασχηματισμένου δικτύου δίνει αμέσως:

$$I(s) = \frac{E(s)}{R + sL}$$

όπου: $E(s) = \mathcal{L}\{E(t)\} = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$

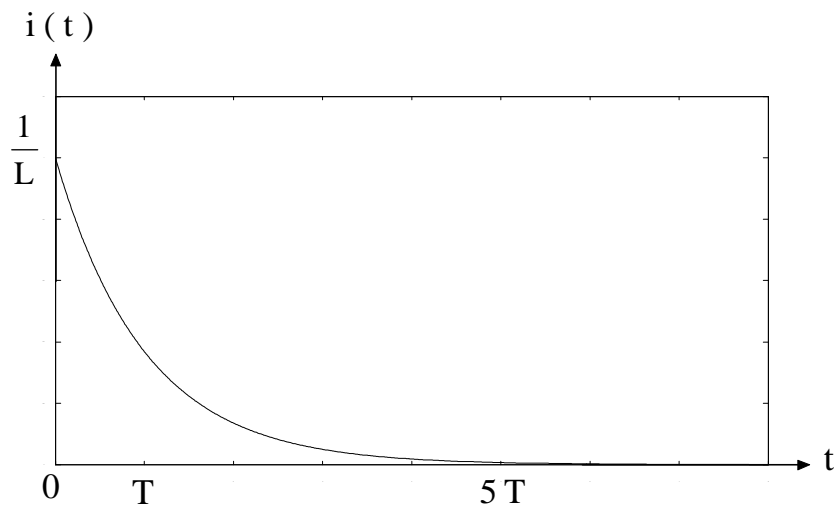
άρα:

$$I(s) = \frac{1}{R + sL} = \frac{\frac{1}{L}}{s + \frac{R}{L}}$$

και

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ I(s) \} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\frac{1}{L}}{s + \frac{R}{L}} \right\} = \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L} t}$$

Η γραφική παράσταση για το ρεύμα $i(t)$ είναι:



Παρατηρούμε ότι η κρουστική διέγερση $E(t) = \delta(t)$ δίνει μια ομαλότατη απόκριση που έχει τη μορφή αποσβενύμενης εκθετικής συνάρτησης με σταθερά χρόνου $T = L/R$

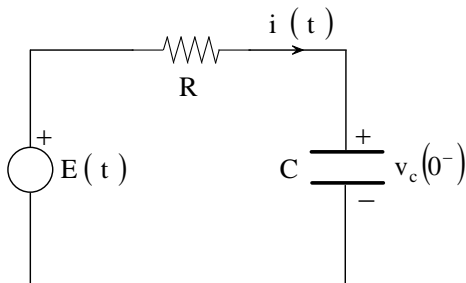
Επίσης ένα άλλο ενδιαφέρον σημείο είναι εξής:

Το ρεύμα $i(t) = i_L(t)$ παρουσιάζει ασυνέχεια για $t = 0$, διότι $i(0^-) = 0$, ενώ $i(0^+) = \frac{1}{L}$,

αυτό οφείλεται στην κρουστική διέγερση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2)

Δίδεται το ακόλουθο δίκτυο:



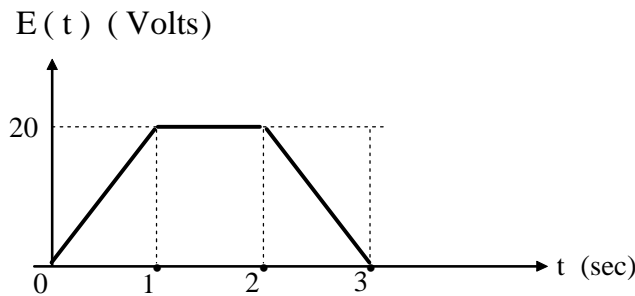
Δίδονται οι τιμές: $R = 100 \text{ k}\Omega$, $C = 10 \text{ }\mu\text{F}$

και επίσης $v_C(0^-) = 0 \text{ Volts}$

Η τάση της πηγής $E(t)$ δίδεται από την παρακάτω γραφική παράσταση.

Ζητείται να υπολογιστεί το ρεύμα $i(t)$ για $0 \leq t < \infty$

Η τάση $E(t)$ της πηγής είναι το ακόλουθο σήμα:



Αρχικά πρέπει να εκφράσουμε το σήμα $E(t)$ συναρτήσει στοιχειωδών ανωμαλών σημάτων και στη συνέχεια να υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace $E(s)$.

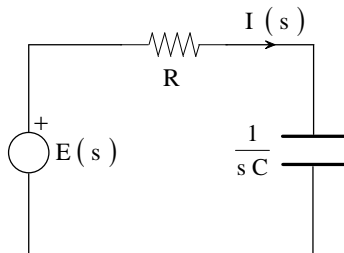
Παρατηρώντας το σήμα εύκολα βρίσκουμε:

$$E(t) = 20 r(t) - 20 r(t-1) - 20 r(t-2) + 20 r(t-3)$$

Άρα:

$$E(s) = \mathcal{L}\{E(t)\} = 20 \left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} e^{-s} - \frac{1}{s^2} e^{-2s} + \frac{1}{s^2} e^{-3s} \right]$$

Το μετασχηματισμένο κύκλωμα θα είναι:



Η επίλυση δίνει:

$$I(s) = \frac{E(s)}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{sCE(s)}{sRC + 1}$$

αντικαθιστώντας τις τιμές, $R = 100 \text{ k}\Omega = 10^5 \Omega$ και $C = 10 \mu\text{F} = 10^{-5} \text{ F}$ θα πάρουμε:

$$I(s) = \frac{10^{-5} s E(s)}{s + 1} = 10^{-5} \frac{s}{s + 1} E(s)$$

και αντικαθιστώντας το $E(s) = 20 \left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} e^{-s} - \frac{1}{s^2} e^{-2s} + \frac{1}{s^2} e^{-3s} \right]$ θα πάρουμε:

$$I(s) = 2 \times 10^{-4} \cdot \left[\frac{s}{s + 1} \right] \cdot \left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} e^{-s} - \frac{1}{s^2} e^{-2s} + \frac{1}{s^2} e^{-3s} \right]$$

ή μετά την απλοποίηση: $I(s) = 2 \times 10^{-4} \cdot \left[\frac{1}{s^2 + s} \right] \cdot \left[1 - e^{-s} - e^{-2s} + e^{-3s} \right]$

Εξετάζουμε το κλάσμα $G(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{1}{s^2 + s}$ του οποίου θα βρούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace.

Αριθμητής: $A(s) = 1$

Παρονομαστής: $B(s) = s^2 + s$ ρίζες $s_1 = 0$, $s_2 = -1$

και $B'(s) = 2s + 1$

άρα:

$$G(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{1}{s^2 + s} = \frac{A(s_1)}{B'(s_1)} \cdot \frac{1}{s - s_1} + \frac{A(s_2)}{B'(s_2)} \cdot \frac{1}{s - s_2}$$

αντικαθιστώντας τις τιμές θα πάρουμε τελικά:

$$\frac{1}{s^2 + s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1}$$

άρα το $I(s)$ γράφεται:

$$I(s) = 2 \times 10^{-4} \cdot \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right] \cdot [1 - e^{-s} - e^{-2s} + e^{-3s}]$$

$$\text{ή: } I(s) = 2 \times 10^{-4} \cdot \left[\frac{1}{s} \cdot [1 - e^{-s} - e^{-2s} + e^{-3s}] - \frac{1}{s+1} \cdot [1 - e^{-s} - e^{-2s} + e^{-3s}] \right]$$

άρα τελικά:

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = 2 \times 10^{-4} \left\{ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}e^{-s}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}e^{-2s}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}e^{-3s}\right) \right\} -$$

$$- 2 \times 10^{-4} \left\{ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}e^{-s}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}e^{-2s}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}e^{-3s}\right) \right\}$$

και αντιστρέφοντας αυτούς τους 8 όρους θα πάρουμε:

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = 2 \times 10^{-4} [u(t) - u(t-1) - u(t-2) + u(t-3)] -$$

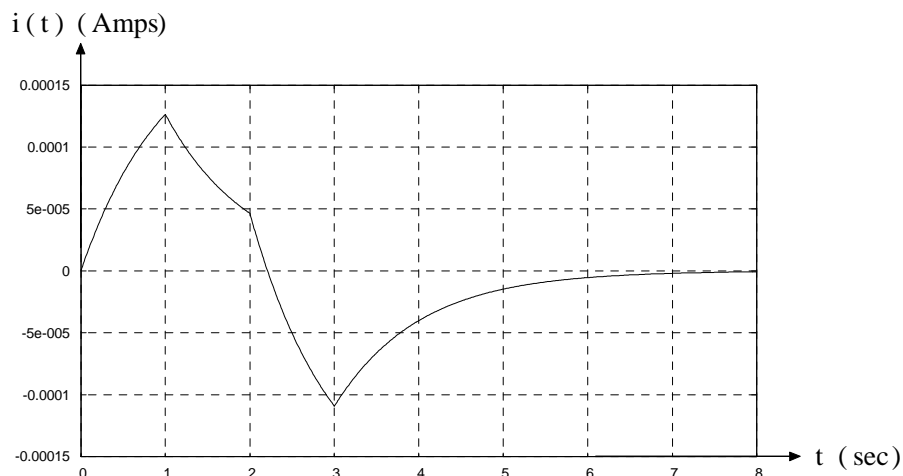
$$- 2 \times 10^{-4} [e^{-t} - e^{-(t-1)}u(t-1) - e^{-(t-2)}u(t-2) + e^{-(t-3)}u(t-3)]$$

ή κάνοντας μια απλή ανακατάταξη:

$$i(t) = 2 \times 10^{-4} \{ [u(t) - e^{-t}] - [u(t-1) - e^{-(t-1)}u(t-1)] - [u(t-2) -$$

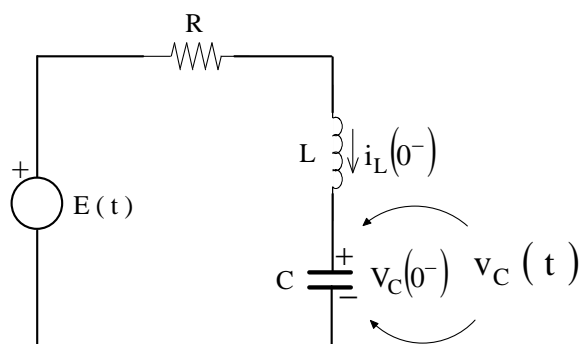
$$- e^{-(t-2)}u(t-2)] + [u(t-3) - e^{-(t-3)}u(t-3)] \}$$

Η γραφική παράσταση για το ρεύμα $i(t)$ φαίνεται παρακάτω:



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3)

Δίδεται το ακόλουθο δίκτυο:



Δίδονται οι τιμές: $R = 1 \Omega$, $C = 1 \text{ F}$, $L = 1 \text{ H}$

Οι αρχικές καταστάσεις είναι:

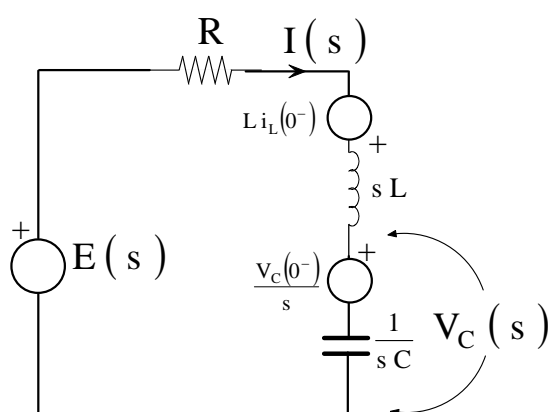
$$i_L(0^-) = 2 \text{ Amp}$$

$$v_C(0^-) = 4 \text{ Volts}$$

Η τάση της πηγής $E(t)$ είναι η βηματική συνάρτηση $E(t) = u(t)$

Ζητείται να υπολογιστεί η τάση του πυκνωτή $v_C(t)$ για $0 \leq t < \infty$

Το μετασχηματισμένο, κατά Laplace, κύκλωμα θα είναι:



Εδώ οι αρχικές καταστάσεις δεν είναι μηδενικές και χρησιμοποιούμε μετασχηματισμένα κυκλώματα των L και C με πηγή τάσεως εν σειρά, γιατί αυτό διευκολύνει την επίλυση (το όλο κύκλωμα έχει ένα μόνο βρόχο). Επίσης έχουμε $E(s) = \mathcal{L}\{E(t)\} = \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}$

Γράφουμε το νόμο τάσεων του Kirchhoff για τον μοναδικό βρόχο του κυκλώματος:

$$-E(s) + I(s)R - Li_L(0^-) + I(s)sL + \frac{v_C(0^-)}{s} + I(s)\frac{1}{sC} = 0$$

λύνουμε ως προς $I(s)$ και παίρνουμε:

$$I(s) = \frac{E(s) + L i_L(0^-) - \frac{v_C(0^-)}{s}}{R + sL + \frac{1}{sC}}$$

Η ζητούμενη τάση $V_C(s)$ θα δίνεται από τη σχέση:

$$V_C(s) = \frac{v_C(0^-)}{s} + I(s) \frac{1}{sC}$$

Αντικαθιστούμε τις τιμές των στοιχείων στις δύο τελευταίες σχέσεις και έχουμε:

$$I(s) = \frac{\frac{1}{s} + 2 - \frac{4}{s}}{1 + s + \frac{1}{s}} \quad \text{και} \quad V_C(s) = \frac{4}{s} + I(s) \frac{1}{s}$$

αντικαθιστώντας το $I(s)$ στην έκφραση για το $V_C(s)$ και μετά από κάποιες απλές αλγεβρικές πράξεις θα πάρουμε τελικά:

$$V_C(s) = \frac{4s^2 + 6s + 1}{s^3 + s^2 + s}$$

Αυτή είναι η λύση για το $V_C(s)$ στο πεδίο της μιγαδικής συχνότητας και πρέπει να αντιστραφεί, κατά Laplace, για να πάρουμε την επιθυμητή λύση $v_C(t)$ στο πεδίο του χρόνου.

Έτσι θα έχουμε για το $V_C(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$

αριθμητής: $A(s) = 4s^2 + 6s + 1$

παρονομαστής: $B(s) = s^3 + s^2 + s$ ρίζες: $s_1 = 0, \quad s_2 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad s_3 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$

και $B'(s) = 3s^2 + 2s + 1$

θα έχουμε την γνωστή ανάπτυξη σε απλά κλάσματα (μέθοδος Heaviside)

$$V_C (s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{A(s_1)}{B'(s_1)} \cdot \frac{1}{s-s_1} + \frac{A(s_2)}{B'(s_2)} \cdot \frac{1}{s-s_2} + \frac{A(s_3)}{B'(s_3)} \cdot \frac{1}{s-s_3}$$

αντικαθιστώ τιμές στον πρώτο όρο: (θέτω $s_1 = 0$)

$$V_C (s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{s} + \frac{A(s_2)}{B'(s_2)} \cdot \frac{1}{s-s_2} + \frac{A(s_3)}{B'(s_3)} \cdot \frac{1}{s-s_3}$$

άρα: $v_C (t) = \mathcal{L}^{-1} \{ V_C (s) \} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{A(s_2)}{B'(s_2)} \cdot \frac{1}{s-s_2} + \frac{A(s_3)}{B'(s_3)} \cdot \frac{1}{s-s_3} \right)$

όπου: $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} = u(t)$

και επειδή οι ρίζες s_2 και s_3 είναι συζυγείς μιγαδικές ο όρος

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{A(s_2)}{B'(s_2)} \cdot \frac{1}{s-s_2} + \frac{A(s_3)}{B'(s_3)} \cdot \frac{1}{s-s_3} \right) \text{ δίνει αντίστροφο:}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{A(s_2)}{B'(s_2)} \cdot \frac{1}{s-s_2} + \frac{A(s_3)}{B'(s_3)} \cdot \frac{1}{s-s_3} \right) = 2 M e^{\sigma t} \cos(\omega t + \varphi)$$

όπου, ως γνωστόν, η ρίζα με το θετικό φανταστικό μέρος: $s_2 = \sigma + j\omega = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$

άρα $\sigma = -\frac{1}{2}$ και $\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$

και επίσης $\frac{A(s_2)}{B'(s_2)} = M e^{j\varphi}$

και μετά από τις σχετικές μιγαδικές πράξεις θα βρούμε:

$$M = 2.5166 \quad \text{και} \quad \varphi = -0.932 \text{ rad} \quad \text{ή} \quad \varphi = -53.4^\circ$$

Άρα τελικά η απόκριση $v_C(t)$ γράφεται:

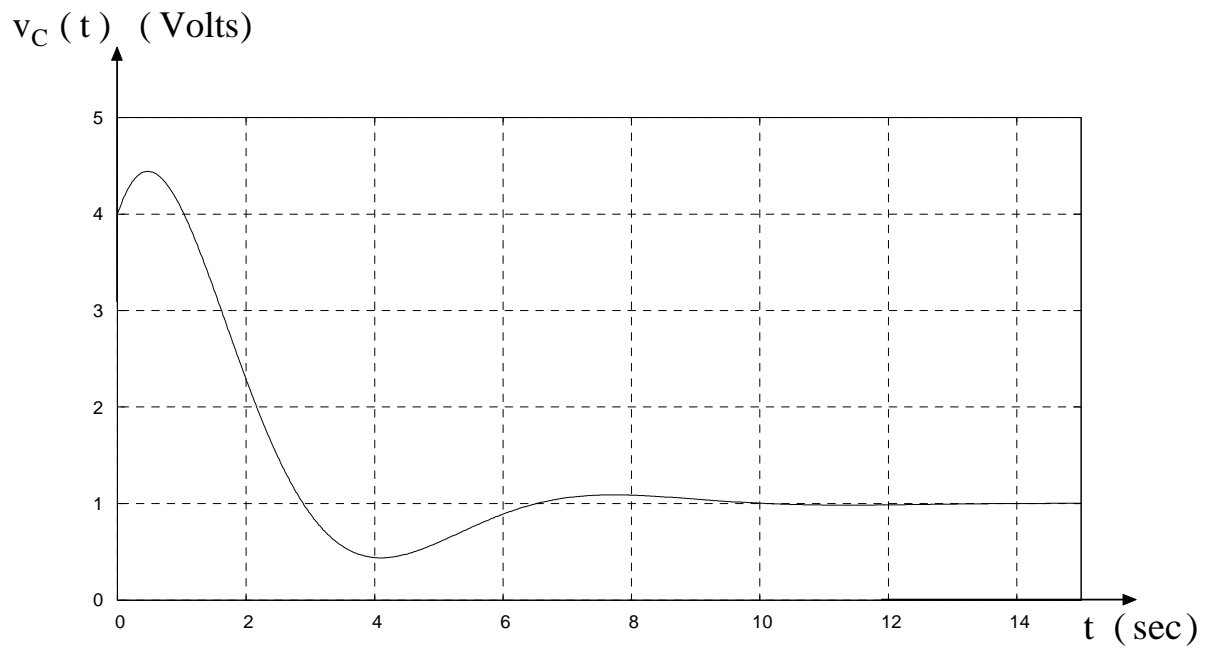
$$v_C(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V_C(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{A(s_2)}{B'(s_2)} \cdot \frac{1}{s-s_2} + \frac{A(s_3)}{B'(s_3)} \cdot \frac{1}{s-s_3}\right)$$

ή

$$v_C(t) = u(t) + 5.033 e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - 53.4^\circ\right)$$

Η μόνιμη απόκριση είναι η βηματική συνάρτηση $u(t)$ και η μεταβατική απόκριση είναι η εκθετικά αποσβενύμενη ταλάντωση

Η γραφική παράσταση της τάσης $v_C(t)$ φαίνεται παρακάτω:



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

9. 1. Η έννοια του Συστήματος Αυτομάτου Ελέγχου

Η αρχική έννοια του συστήματος θεωρείται γνωστή και στο σημείο αυτό την επαναλαμβάνουμε:

- Καλούμε **σύστημα** ένα σύνολο στοιχείων και διατάξεων οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους και έχουν σκοπό να επιτελέσουν κάποια διαδικασία (ή έργο).

Τα συστήματα περιγράφονται από μαθηματικές σχέσεις, που συνδέουν κάποιο «**αίτιο**» με κάποιο «**αποτελεσμα**», με χρήση διαφόρων «**δυναμικών**» **μεταβλητών** (δηλ. μεταβλητών που είναι συναρτήσεις του χρόνου). Οι μεταβλητές αυτές είναι φυσικά μεγέθη, η φυσική διάσταση των οποίων εξαρτάται από το ίδιο το σύστημα.

Κάποιες από τις μεταβλητές αυτές θεωρούνται ως **διεγέρσεις** (ή **είσοδοι, ή αίτια**) και κάποιες άλλες ως **αποκρίσεις** (ή **έξοδοι, ή αποτελέσματα**). Ένα σύστημα μπορεί να έχει μία ή περισσότερες εισόδους και εξόδους. Επίσης αναφέρουμε ότι οι είσοδοι και οι έξοδοι ονομάζονται και **σήματα**.

Στις πρακτικές εφαρμογές επιδιώκεται πάντοτε τα σήματα εξόδου (ή οι αποκρίσεις) του συστήματος να ακολουθούν κάποιες συγκεκριμένες μορφές ώστε να επιτυγχάνεται η σωστή και επιθυμητή «**λειτουργία**» του συστήματος, και έτσι να πραγματοποιείται , και μάλιστα με τον βέλτιστο τρόπο, ο συγκεκριμένος σκοπός τον οποίο το σύστημα πρέπει να επιτελέσει. Η διαδικασία με βάση την οποία επιτυγχάνεται αυτός ο σκοπός, ονομάζεται **έλεγχος** του συστήματος. Ο όρος «σύστημα υπό έλεγχο» αναφέρεται στην Αγγλική ορολογία με τον όρο “plant”.

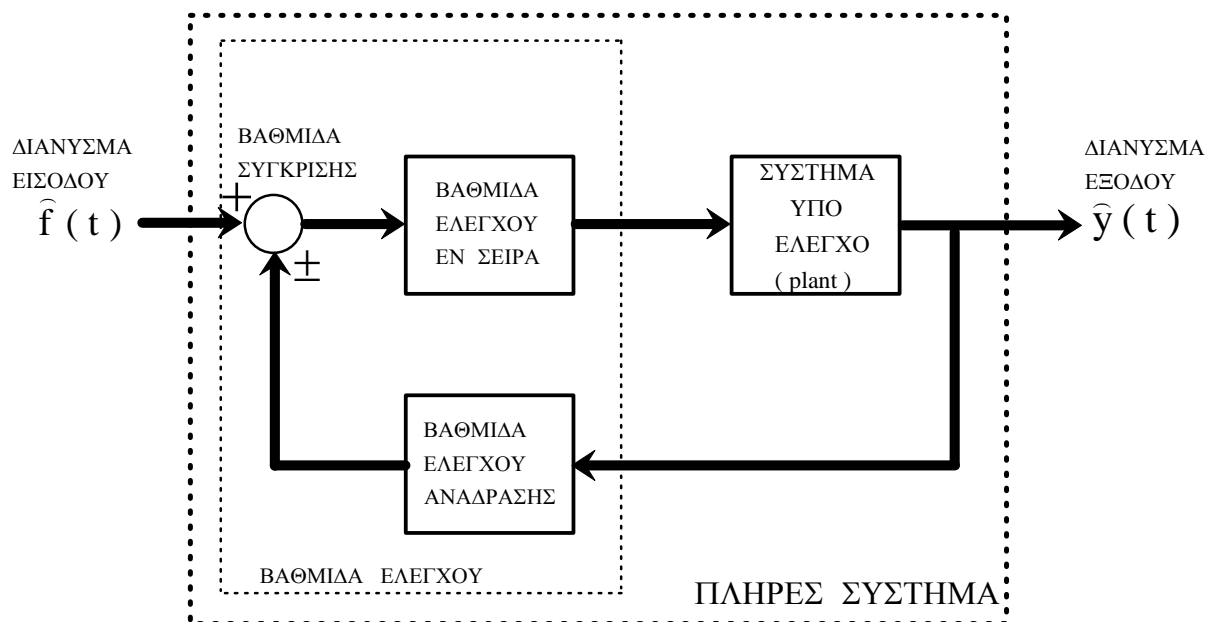
- Όταν η διαδικασία του ελέγχου ενός συστήματος γίνεται χωρίς την μεσολάβηση ανθρώπινου παράγοντα, τότε το σύστημα αποκαλείται **Σύστημα Αυτομάτου Ελέγχου** (ή **Σ.Α.Ε.**)

Ο όρος «διαδικασία ελέγχου» του συστήματος σημαίνει την παρακολούθηση των τιμών των μεταβλητών (ή σημάτων) εξόδου του συστήματος και την προσπάθεια διατήρησης των τιμών αυτών εντός συγκεκριμένων περιοχών. Κατά την λειτουργία ενός συστήματος εμφανίζονται οι λεγόμενες «**διαταραχές**», οι οποίες είναι σήματα που επηρεάζουν τις εξόδους του συστήματος απομακρύνοντας τις από τις επιθυμητές τιμές. Οι διαταραχές μπορούν να

οφείλονται είτε σε εξωτερικά αίτια (που δεν έχουν σχέση με το σύστημα) είτε σε εσωτερικά αίτια του ίδιου του συστήματος.

Μια βασικότατη έννοια της θεωρίας των συστημάτων αυτομάτου ελέγχου είναι η έννοια της **ανάδρασης** ή ανατροφοδότησης , (Αγγλικός όρος: **feedback**). Με τον όρο ανάδραση εννοούμε την «επικοινωνία» της εισόδου ενός συστήματος με την, υπό έλεγχο, έξοδο του. Με την διαδικασία αυτή επιτυγχάνεται παρακολούθηση του σήματος εξόδου, σύγκριση με την επιθυμητή τιμή που πρέπει να έχει, και στην περίπτωση διαφοράς τιμών, «επίδραση» στο σήμα εισόδου με σκοπό την εξάλειψη της διαφοράς αυτής.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γενική μορφή ενός συστήματος αυτομάτου ελέγχου.

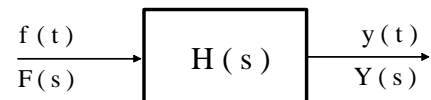


Παρατηρούμε ότι το πλήρες σύστημα αποτελείται από ένα αριθμό υποσυστημάτων (που αναφέρονται και σαν «βαθμίδες»). Τα βέλη δείχνουν την πορεία των διαφόρων σημάτων με την ανάλογη κατεύθυνση. Στη λεγόμενη βαθμίδα σύγκρισης γίνεται πρόσθεση ή αφαίρεση δύο σημάτων δηλ. το σήμα εξόδου της βαθμίδας αυτής είναι το άθροισμα ή η διαφορά των σημάτων αυτών.

9.2) Η συνάρτηση μεταφοράς (Transfer function)

Μια από τις βασικότερες έννοιες των Σ.Α.Ε. είναι η έννοια της συνάρτησης μεταφοράς. Για την συνάρτηση μεταφοράς έχει ήδη γίνει λόγος στο Κεφάλαιο 5 (εδαφ. 7) όπου εκεί δόθηκε ο ορισμός της για την περίπτωση ηλεκτρικών δικτύων που βρίσκονται στην Ημιτονική Μόνιμη Κατάσταση. Παρακάτω θα γενικεύσουμε αυτό τον ορισμό για το πεδίο της μιγαδικής συχνότητας. Επαναλαμβάνουμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς ορίζεται **μόνον** για γραμμικά συστήματα και ο γενικός ορισμός της είναι ο ακόλουθος:

Ας θεωρήσουμε αρχικά, για απλότητα, ένα σύστημα με μία είσοδο $f(t)$ και μία έξοδο $y(t)$



Οι μετασχηματισμοί Laplace των μεγεθών εισόδου και εξόδου θα είναι:

$$F(s) = \mathcal{L} \{ f(t) \} \quad \text{και} \quad Y(s) = \mathcal{L} \{ y(t) \}$$

θεωρούμε την προϋπόθεση ότι οι αρχικές συνθήκες δηλ. οι τιμές των μεγεθών $f(t)$, $y(t)$ και των παραγώγων τους, οποιασδήποτε τάξης, για $t = 0^+$, έχουν μηδενική τιμή

Τότε η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ του συστήματος ορίζεται ως εξής:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)}$$

Επομένως η συνάρτηση μεταφοράς ενός γραμμικού συστήματος ισούται με το πηλίκο του μετασχηματισμού Laplace του σήματος εξόδου προς το μετασχηματισμό Laplace του σήματος εισόδου με την προϋπόθεση μηδενικών αρχικών συνθηκών.

Η συνάρτηση μεταφοράς ενός συστήματος δεν εξαρτάται από τα μεγέθη εισόδου και εξόδου αλλά μόνον από την εσωτερική δομή του συστήματος.

Παρατηρούμε ότι αν γνωρίζουμε την συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ ενός συστήματος τότε η εύρεση της εξόδου, για μια δεδομένη είσοδο, στο πεδίο της μιγαδικής συχνότητας, υπολογίζεται από την απλούστατη σχέση:

$$Y(s) = H(s) F(s)$$

Στο σημείο αυτό αναφερόμαστε σε μία βασική ιδιότητα του μετασχηματισμού Laplace και συγκεκριμένα στην ιδιότητα της συνέλιξης (convolution). Επαναλαμβάνουμε εδώ αυτή την ιδιότητα:

Η συνέλιξη δύο συναρτήσεων $f_1(t)$ και $f_2(t)$ ορίζεται ως εξής:

$$\text{συνέλιξη των } [f_1(t), f_2(t)] = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau$$

Παρατηρούμε ότι η συνέλιξη έχει την αντιμεταθετική ιδιότητα

Αποδεικνύεται ότι ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right\} = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

και

$$\mathcal{L}^{-1} \{ F_1(s) \cdot F_2(s) \} = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

Με βάση την ιδιότητα αυτή θα έχουμε το ακόλουθο σκεπτικό:

εφ' όσον ισχύει

$$Y(s) = H(s) F(s)$$

τότε

$$\mathcal{L}^{-1} \{ Y(s) \} = y(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ H(s) F(s) \} = \int_0^t f(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

όπου βέβαια $h(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ H(s) \}$ και $f(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ F(s) \}$

Δηλαδή η απόκριση του συστήματος στο πεδίο του χρόνου ισούται με την συνέλιξη του σήματος εισόδου $f(t)$ και της συνάρτησης $h(t)$ που είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης μεταφοράς.

Θα δούμε στα επόμενα τη ακριβή σημασία της συνάρτησης $h(t)$

Στην περίπτωση που έχουμε σύστημα με πολλές εισόδους $f_i(t)$ $i=1, 2 \dots k$ και πολλές εξόδους $y_j(t)$ $j=1, 2 \dots m$ τότε ορίζονται οι «επί μέρους» συναρτήσεις μεταφοράς $H_{ij}(s)$ ως εξής:

$$H_{ij}(s) = \frac{Y_j(s)}{F_i(s)}, \quad \text{όπου } F_q(s) = 0 \text{ για } q \neq i, \text{ (δηλ. επιδρά μόνον η είσοδος } F_i(s))$$

Μπορούμε να γράψουμε την ακόλουθη εξίσωση πινάκων

$$\hat{Y}(s) = \hat{H}(s) \cdot \hat{F}(s)$$

$$\text{ή} \quad \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_m(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) & \dots & H_{1k}(s) \\ H_{21}(s) & \cdot & \cdot & H_{2k}(s) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ H_{m1}(s) & \cdot & \cdot & H_{mk}(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_1(s) \\ F_2(s) \\ \cdot \\ F_k(s) \end{bmatrix}$$

όπου ο πίνακας $\hat{H}(s)$ με διαστάσεις $(m \times k)$ έχει ως στοιχεία τις επί μέρους συναρτήσεις μεταφοράς. Ο πίνακας αυτός λέγεται και «μήτρα μεταφοράς».

9.3) Σχέση συνάρτησης μεταφοράς και Δ.Ε. συστήματος

Αναφέραμε στα προηγούμενα ότι η συνάρτηση μεταφοράς ορίζεται μόνον για την περίπτωση γραμμικού συστήματος. Είναι όμως γνωστό ότι στα γραμμικά συστήματα η είσοδος και η έξοδος συνδέονται με μία γραμμική διαφορική εξίσωση n - τάξεως της μορφής:

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) &= \\ &= b_m \frac{d^m f(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} f(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{df(t)}{dt} + b_0 f(t) \end{aligned}$$

όπου ισχύει $n \geq m$

Λαμβάνοντας τον μετασχηματισμό Laplace των δύο μελών της διαφορικής εξίσωσης και έχοντας υπ' όψη την προϋπόθεση μηδενικών αρχικών συνθηκών, πράγμα που σημαίνει ότι η παράγωγος n - τάξεως μιας συναρτήσεως ισοδυναμεί, στο πεδίο της μιγαδικής συχνότητας, με πολλαπλασιασμό επί s^n θα πάρουμε:

$$\begin{aligned} a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) &= \\ = b_m s^m F(s) + b_{m-1} s^{m-1} F(s) + \dots + b_1 s F(s) + b_0 F(s) \end{aligned}$$

άρα η συνάρτηση μεταφοράς θα είναι:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

δηλαδή θα έχει πάντοτε τη μορφή ρητής συναρτήσεως (πηλίκο πολυωνύμων)

Παρατηρούμε λοιπόν ότι όταν γνωρίζουμε τη διαφορική εξίσωση ενός γραμμικού συστήματος τότε μπορούμε να βρούμε αμέσως τη συνάρτηση μεταφοράς και αντίστροφα.

Η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$H(s) = \frac{b_m (s - z_1) \cdot (s - z_2) \cdots (s - z_m)}{a_n (s - p_1) \cdot (s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$

όπου z_1, z_2, \dots, z_m οι ρίζες του αριθμητή οι οποίες αποκαλούνται και μηδενικά (zeros) της $H(s)$ και αντίστοιχα p_1, p_2, \dots, p_n οι ρίζες του παρονομαστή οι οποίες αποκαλούνται και πόλοι (poles) της $H(s)$

9.4) Γραφική παράσταση της συνάρτησης μεταφοράς

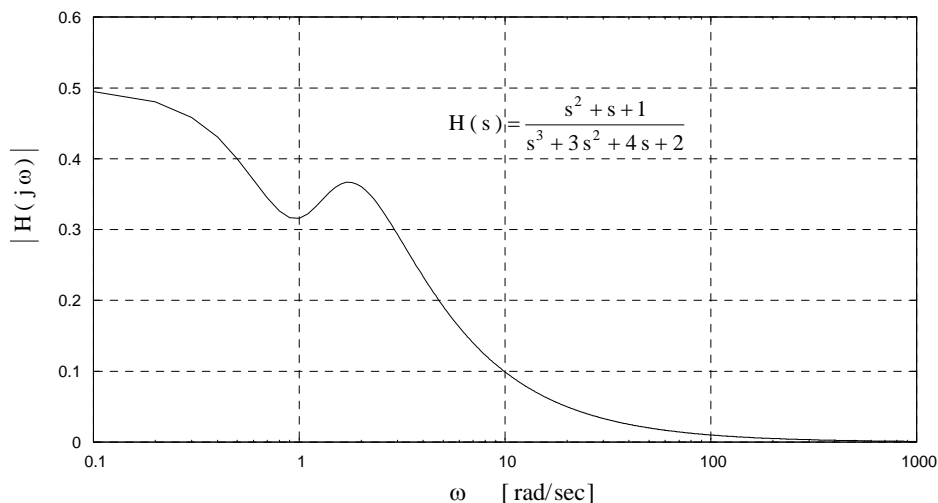
Η συνάρτηση μεταφοράς είναι γενικά μια μιγαδική συνάρτηση και γράφεται:

$$H(s) = |H(s)| e^{j\varphi(s)}$$

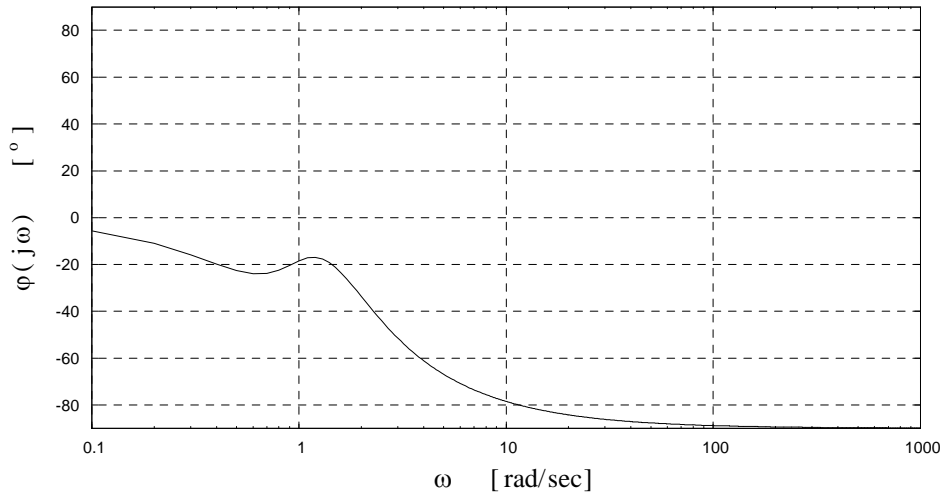
όπου $s = \sigma + j\omega$ η μιγαδική συχνότητα

Στην πράξη ενδιαφέρει πολύ η περίπτωση όπου έχουμε $s = j\omega$ (δηλαδή ημιτονοειδή σήματα) και με βάση την προϋπόθεση αυτή προκύπτει η γραφική παράσταση της συνάρτησης μεταφοράς γνωστή ως **διάγραμμα Bode (Bode plot)**. Το διάγραμμα Bode αποτελείται ουσιαστικά από δύο διαφορετικά διαγράμματα, ένα για το μέτρο $|H(s)|$ και ένα για το όρισμα $\varphi(s)$ της συνάρτησης μεταφοράς, συναρτήσει της συχνότητας ω . Συνήθως στον άξονα της συχνότητας χρησιμοποιείται λογαριθμική κλίμακα.

Παρακάτω φαίνονται τα διαγράμματα Bode για ένα παράδειγμα συναρτήσεως μεταφοράς



Διάγραμμα του μέτρου $H(j\omega)$



Διάγραμμα του ορίσματος $\varphi(j\omega)$

9.5) Αποκρίσεις συστημάτων στα στοιχειώδη σήματα

Στο σημείο αυτό θα εξετάσουμε τις αποκρίσεις γραμμικών συστημάτων όταν ως διεγέρσεις χρησιμοποιούνται γνωστά μας στοιχειώδη σήματα.

9.5.1) Απόκριση σε είσοδο κρουστική συνάρτηση $\delta(t)$

Αρχικά θα θεωρήσουμε ως σήμα εισόδου την μοναδιαία κρουστική συνάρτηση $\delta(t)$.

Είναι γνωστό ότι:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$$

Άρα η σχέση:

$$Y(s) = H(s)F(s)$$

όταν είναι:

$$f(t) = \delta(t) \quad \text{άρα} \quad F(s) = 1$$

θα δώσει: $Y(s) = H(s)$ άρα και $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = h(t)$

όπου $y(t) = h(t)$ η απόκριση σε κρουστική διέγερση ή διαφορετικά «κρουστική απόκριση». Δηλαδή προκύπτει η ακόλουθη σημαντικότερη πρόταση:

- Σε ένα γραμμικό σύστημα η κρουστική απόκριση είναι ίση με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης μεταφοράς ή διαφορετικά η συνάρτηση μεταφοράς είναι ίση με τον μετασχηματισμό Laplace της κρουστικής απόκρισης του συστήματος.

$$\{ \text{Συνάρτηση μεταφοράς} \} = \mathcal{L} \{ \text{Κρουστικής απόκρισης} \}$$

$$\{ \text{Κρουστική απόκριση} \} = \mathcal{L}^{-1} \{ \text{Συνάρτησης μεταφοράς} \}$$

Η σχέση αυτή συνδέει το πεδίο του χρόνου με το πεδίο της συχνότητας

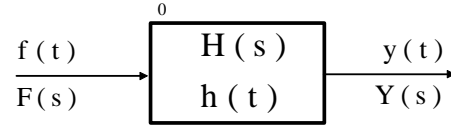
9. 5. 2) Απόκριση σε τυχαία είσοδο με χρήση του συνελικτικού ολοκληρώματος

Όταν γνωρίζουμε την κρουστική απόκριση ενός συστήματος, μπορούμε να βρούμε την απόκρισή του σε οποιοδήποτε σήμα εισόδου κάνοντας χρήση της ιδιότητας της συνέλιξης. Παρακάτω εξηγείται η διαδικασία αυτή.

- Έστω ένα γραμμικό σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t)$ και συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \mathcal{L} \{ h(t) \}$$

$$y(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau$$



$$Y(s) = H(s) \cdot F(s)$$

Η απόκριση του συστήματος σε τυχούσα είσοδο $y(t)$ υπολογίζεται από τις σχέσεις:

- Στο πεδίο της μιγαδικής συχνότητας: $Y(s) = H(s) F(s)$

- Στο πεδίο του χρόνου: $y(t) = \int_0^t f(\tau) h(t-\tau) d\tau$ (δηλαδή είναι η συνέλιξη μεταξύ

της κρουστικής απόκρισης και της εισόδου $y(t)$)

Παρατηρούμε ότι όταν γνωρίζουμε την κρουστική απόκριση ενός συστήματος μπορούμε να βρούμε μέσω της συνέλιξης την απόκρισή του, στο πεδίο του χρόνου, σε οποιοδήποτε σήμα εισόδου $f(t)$.

Η πρόταση αυτή δείχνει το πόσο σημαντική είναι για ένα σύστημα η κρουστική απόκριση.

Στο πεδίο της μιγαδικής συχνότητας το αντίστοιχο πρόβλημα, δηλ η εύρεση της απόκρισης σε τυχούσα είσοδο $Y(s)$, όταν είναι γνωστή η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$, λύνεται με ένα απλό πολλαπλασιασμό $Y(s) = H(s) F(s)$ πράγμα που δείχνει και πάλι την απλότητα του μαθηματικού φόρτου στο πεδίο αυτό.

9. 5. 3) Απόκριση σε είσοδο βηματική συνάρτηση $u(t)$

Όταν η είσοδος $f(t) = u(t)$, άρα και $F(s) = \frac{1}{s}$ τότε η απόκριση θα είναι:

- Στο πεδίο της μιγαδικής συχνότητας $Y(s) = H(s) \cdot \frac{1}{s}$

- Στο πεδίο του χρόνου: $y(t) = \int_0^t f(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_0^t f(t-\tau) h(\tau) d\tau =$
 $= \int_0^t u(t-\tau) h(\tau) d\tau = \int_0^t h(\tau) d\tau$ (διότι $u(t-\tau) = 1$, εφ' όσον η μεταβλητή τ
 κυμαίνεται από 0 έως t).

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η απόκριση, στο πεδίο του χρόνου, σε είσοδο βηματική συνάρτηση, που ονομάζεται και βηματική απόκριση είναι ίση με το ολοκλήρωμα της κρουστικής απόκρισης $h(t)$

9.5.4) Απόκριση σε είσοδο ημιτονοειδή συνάρτηση $f(t) = \sin \omega t$

Στην περίπτωση αυτή, αν περιοριστούμε στην **απόκριση μόνιμης κατάστασης**, τότε προκύπτει, όπως είδαμε και στο Κεφ. 5, ότι η απόκριση $y(t)$ θα είναι επίσης ημιτονοειδής με την ίδια κυκλική συχνότητα ω αλλά με διαφορετικό πλάτος και διαφορετική αρχική φάση.

Έτσι αν η συνάρτηση μεταφοράς είναι $H(s) = |H(s)| e^{j\varphi(s)}$

Θέτοντας $s = j\omega$ και εφ' όσον ο παραστατικός μιγαδικός του σήματος εισόδου θα είναι:

$$\bar{F}(j\omega) = 1$$

ο παραστατικός μιγαδικός του σήματος εξόδου θα είναι αντίστοιχα :

$$\bar{Y}(j\omega) = \bar{F}(j\omega) H(j\omega) = 1 |H(j\omega)| e^{j\varphi(j\omega)}$$

άρα: $y(t) = |H(j\omega)| \cdot \sin(\omega t + \varphi(j\omega))$

η απόκριση στην περίπτωση αυτή λέγεται και **αρμονική απόκριση**

9.6) Διαγράμματα βαθμίδων

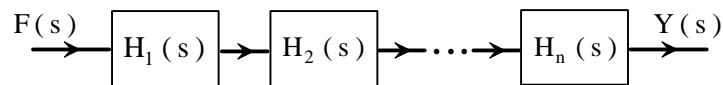
Ένα σύστημα αυτομάτου ελέγχου αποτελείται, πάντοτε, από πολλά υποσυστήματα τα οποία συνδέονται μεταξύ τους και συνεργάζονται με σκοπό την επίτευξη του τελικού σκοπού που πρέπει να επιτελέσει το σύστημα. Τα υποσυστήματα αυτά ονομάζονται και «βαθμίδες» και στην παρούσα ανάλυση θα θεωρήσουμε ότι όλες αυτές οι βαθμίδες, όπως και ολόκληρο το υπό μελέτη σύστημα, ακολουθούν τον κανόνα της **γραμμικότητας**, επομένως για κάθε βαθμίδα θα ορίζεται η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$.

Ένα πρόβλημα που τίθεται εδώ είναι το ακόλουθο:

- Για ένα δεδομένο διάγραμμα συνδεσμολογίας γραμμικών βαθμίδων, με δεδομένες συναρτήσεις μεταφοράς, να γίνει απλοποίηση του διαγράμματος και να βρεθεί η ολική συνάρτηση μεταφοράς.

Παρακάτω παρατίθενται οι βασικότερες περιπτώσεις συνδέσεων βαθμίδων και δίδεται για κάθε περίπτωση η ολική συνάρτηση μεταφοράς.

9.6.1) Σύνδεση βαθμίδων εν σειρά

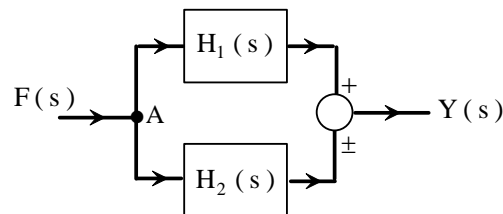


Εδώ η έξοδος της πρώτης βαθμίδας χρησιμοποιείται ως είσοδος στη δεύτερη βαθμίδα κ.λ.π.

Εύκολα προκύπτει ότι η ολική συνάρτηση μεταφοράς θα είναι:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = H_1(s) \cdot H_2(s) \cdots H_n(s)$$

9.6.2) Σύνδεση βαθμίδων παράλληλα



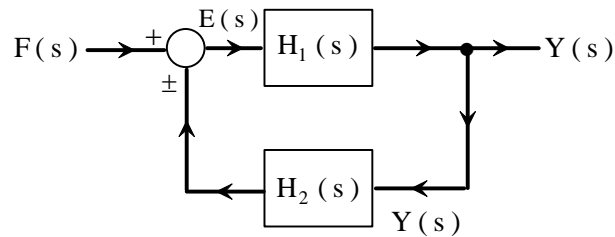
Το σημείο A είναι «λήψη» δηλαδή από το σημείο αυτό φεύγουν δύο ίδια σήματα $F(s)$ και τροφοδοτούν τις εισόδους των δύο βαθμίδων $H_1(s)$ και $H_2(s)$. Οι έξοδοι των δύο αυτών βαθμίδων αθροίζονται και μπορούμε να γράψουμε:

$$Y(s) = F(s) H_1(s) \pm F(s) H_2(s)$$

άρα η ολική συνάρτηση μεταφοράς θα είναι:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = H_1(s) \pm H_2(s)$$

9.6.3) Ανάδραση (θετική ή αρνητική)



Για να υπολογίσουμε την ολική συνάρτηση μεταφοράς σκεπτόμαστε ως εξής:

Το σήμα $E(s)$, το οποίο ονομάζεται ενεργό σφάλμα, θα είναι ίσο με:

$$E(s) = F(s) \pm Y(s) \cdot H_2(s)$$

και επίσης θα ισχύει:

$$Y(s) = E(s) \cdot H_1(s)$$

Συνδυάζοντας αυτές τις δύο σχέσεις θα πάρουμε:

$$Y(s) = (F(s) \pm Y(s) \cdot H_2(s)) \cdot H_1(s)$$

άρα τελικά:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{H_1(s)}{1 \mp H_1(s) \cdot H_2(s)}$$

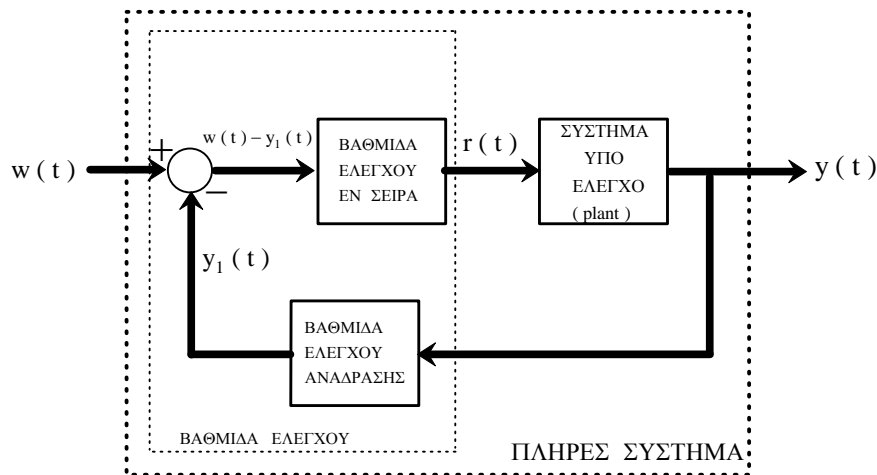
σχεδόν πάντοτε στο σημείο άθροισης χρησιμοποιείται το $(-)$, οπότε έχουμε την λεγόμενη αρνητική ανάδραση. Στην περίπτωση αυτή η ολική συνάρτηση μεταφοράς γράφεται:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s) \cdot H_2(s)}$$

9.7) Ελεγκτές

9.7.1) Γενικά για τους ελεγκτές

Αρχικά θα επαναλάβουμε εδώ την γενική μορφή ενός συστήματος αυτομάτου ελέγχου για την περίπτωση συστήματος μιας εισόδου – μιας εξόδου:



Η βαθμίδα ελέγχου (ή «ελεγκτής» Αγγλ. controller) δέχεται σαν είσοδο ένα σήμα που είναι η διαφορά μεταξύ δύο σημάτων. Το ένα σήμα είναι το $y_1(t)$, που είναι ουσιαστικά μια τροποποιημένη μορφή του «πραγματικού» σήματος εξόδου $y(t)$, του υπό έλεγχο συστήματος (plant), αφού αυτό διέλθει από την βαθμίδα ανάδρασης, . Το άλλο σήμα, είναι ένα σήμα «αναφοράς» $w(t)$, που εκφράζει την «επιθυμητή» τιμή που θα πρέπει να έχει το σήμα $y_1(t)$ (άρα και το $y(t)$). Ο ελεγκτής δημιουργεί στην έξοδό του ένα σήμα ελέγχου $r(t)$, το οποίο τροφοδοτεί την είσοδο του υπό έλεγχο συστήματος και έχει σαν σκοπό την ελαχιστοποίηση ή και τον μηδενισμό της διαφοράς μεταξύ της πραγματικής τιμής $y(t)$ και της επιθυμητής τιμής $w(t)$.

9.7.2) Τύποι ελεγκτών

α) Συνεχείς ελεγκτές

Στην περίπτωση αυτή υπάρχει μια συνεχής σχέση μεταξύ του σήματος εισόδου $f(t) = w(t) - y_1(t)$ και του σήματος εξόδου $r(t)$, του ελεγκτή. Θεωρώντας πάντοτε ότι οι ελεγκτές που μελετάμε εδώ είναι γραμμικά συστήματα διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

α1) Ελεγκτής τύπου P (Αναλογικός - Proportional)

Η σχέση μεταξύ εισόδου και εξόδου έχει τη μορφή: $r(t) = K_p f(t)$

όπου K_p = σταθερά. Δηλαδή η έξοδος είναι ανάλογη με την είσοδο.

Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος θα είναι: $\frac{R(s)}{F(s)} = K_p$

α2) Ελεγκτής τύπου I (Ολοκληρωτικός - Integral)

Η σχέση μεταξύ εισόδου και εξόδου έχει τη μορφή: $r(t) = K_i \int_0^t f(t') dt'$

όπου $K_i =$ σταθερά. Δηλαδή η έξοδος είναι ανάλογη με το ολοκλήρωμα της εισόδου.

Συνάρτηση μεταφοράς: $\frac{R(s)}{F(s)} = K_i \frac{1}{s}$

α3) Ελεγκτής τύπου D (Διαφορικός - Differential)

Η σχέση μεταξύ εισόδου και εξόδου έχει τη μορφή: $r(t) = K_d \frac{df(t)}{dt}$

όπου $K_d =$ σταθερά. Δηλαδή η έξοδος είναι ανάλογη με την παράγωγο της εισόδου.

Συνάρτηση μεταφοράς: $\frac{R(s)}{F(s)} = K_d s$

Υπάρχουν όμως και συνδυασμοί των ανωτέρω περιπτώσεων:

α4) Ελεγκτής τύπου PI (Αναλογικός – Ολοκληρωτικός)

Η σχέση μεταξύ εισόδου και εξόδου έχει τη μορφή: $r(t) = K_p f(t) + K_i \int_0^t f(t') dt'$

α5) Ελεγκτής τύπου PD (Αναλογικός – Διαφορικός)

Η σχέση μεταξύ εισόδου και εξόδου έχει τη μορφή: $r(t) = K_p f(t) + K_d \frac{df(t)}{dt}$

α6) Ελεγκτής τύπου PID (Αναλογικός – Διαφορικός - Ολοκληρωτικός)

Η σχέση μεταξύ εισόδου και εξόδου έχει τη μορφή:

$$r(t) = K_p f(t) + K_i \int_0^t f(t') dt' + K_d \frac{df(t)}{dt}$$

Οι ανωτέρω τύποι ελεγκτών αποτελούν εξιδανικευμένες καταστάσεις διότι δεν λαμβάνεται υπ' όψη η **καθυστερήση** που παρατηρείται πάντοτε στην μετάδοση των σημάτων δια μέσου των διαφόρων συστημάτων.

Έτσι αν π.χ. εξετάσουμε τον ελεγκτή τύπου **P** και θεωρήσουμε ότι έχει καθυστέρηση 1^{ns} τάξεως η σχέση μεταξύ εισόδου και εξόδου θα πάρει την μορφή:

Ιδανικός ελεγκτής τύπου P: $r(t) = K_p f(t)$

Ελεγκτής τύπου P με καθυστέρηση 1^{ης} τάξεως: $T_1 \frac{dr(t)}{dt} + r(t) = K_p f(t)$

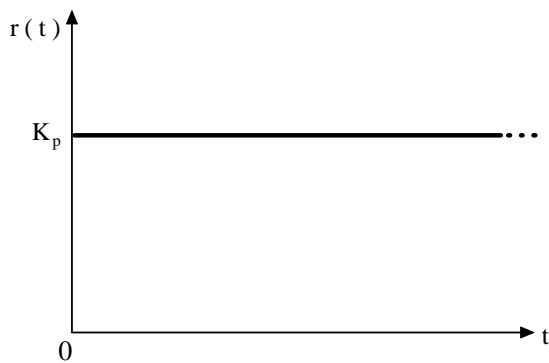
όπου T_1 η σταθερά χρόνου του συστήματος.

Η αντίστοιχη συνάρτηση μεταφοράς θα είναι: $\frac{R(s)}{F(s)} = \frac{K_p}{T_1 s + 1}$

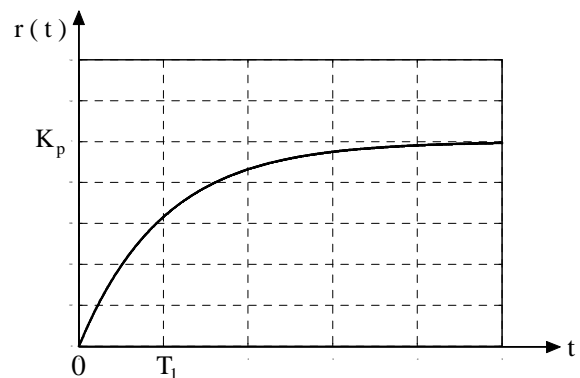
Αν εξετάσουμε την βηματική απόκριση (δηλ. την απόκριση σε είσοδο $f(t) = u(t)$) ενός ιδανικού ελεγκτή τύπου **P**, και ενός τύπου **P** με καθυστέρηση 1^{ης} τάξεως , εύκολα προκύπτουν τα ακόλουθα:

Βηματική απόκριση ιδανικού ελεγκτή τύπου **P:** $r(t) = K_p u(t)$

Βηματική απόκριση ελεγκτή τύπου **P** με καθυστέρηση 1^{ης} τάξεως: $r(t) = K_p (1 - e^{-\frac{t}{T_1}})$



Βηματική απόκριση ιδανικού ελεγκτή τύπου P



Βηματική απόκριση ελεγκτή τύπου P με καθυστέρηση 1^{ης} τάξεως

Αντίστοιχα για ελεγκτή τύπου **I** με καθυστέρηση 1^{ης} τάξεως μπορούμε να γράψουμε:

$$T_1 \frac{dr(t)}{dt} + r(t) = K_i \int_0^t f(t') dt'$$

με συνάρτηση μεταφοράς: $\frac{R(s)}{F(s)} = \frac{K_i \frac{1}{s}}{T_1 s + 1} = \frac{K_i}{T_1 s^2 + s}$

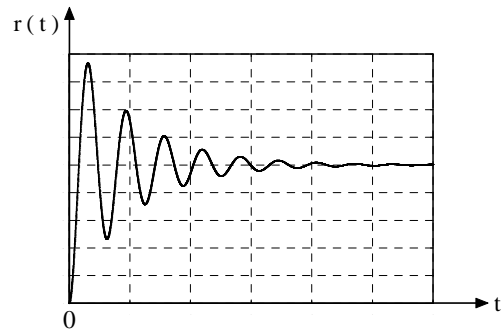
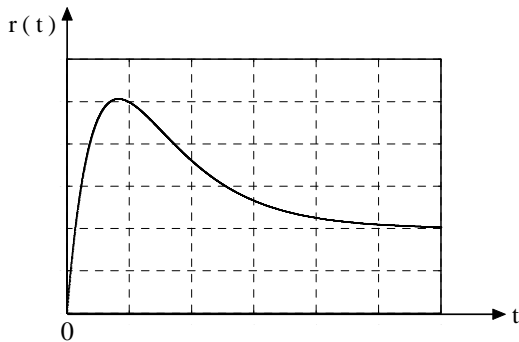
Ανάλογες σχέσεις ισχύουν και για τις υπόλοιπες περιπτώσεις ελεγκτών.

Μπορούμε να θεωρήσουμε και ελεγκτές με καθυστέρηση $2^{αs}$, ή και ανωτέρας τάξεως. Για παράδειγμα ένας ελεγκτής τύπου **P** με καθυστέρηση $2^{αs}$ τάξεως θα περιγράφεται από μια διαφορική εξίσωση της μορφής:

$$a_2 \frac{d^2 r(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dr(t)}{dt} + a_0 r(t) = K_p f(t)$$

και θα έχει δύο σταθερές χρόνου T_1 και T_2 .

Στα παρακάτω σχήματα φαίνονται δύο περιπτώσεις βηματικών αποκρίσεων ελεγκτών τύπου **P** με καθυστέρηση $2^{αs}$ τάξεως.



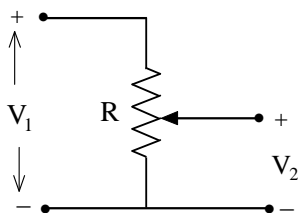
Ποιά είναι η βασική διαφορά των ελεγκτών τύπου **P** με την καθυστέρηση $1^{ηs}$ τάξεως από αυτούς που έχουν καθυστέρηση $2^{αs}$ τάξεως ;

Κατασκευή συνεχών ελεγκτών

Οι απλοί αυτοί ελεγκτές τύπου **P**, **I**, και **D** μπορούν εύκολα να κατασκευαστούν από τα στοιχειώδη ηλεκτρικά στοιχεία **R**, **L**, **C**. Παρακάτω δίνουμε παραδείγματα:

Ελεγκτής τύπου **P**

Μπορεί να πραγματοποιηθεί με ένα απλό ποτενσιόμετρο:

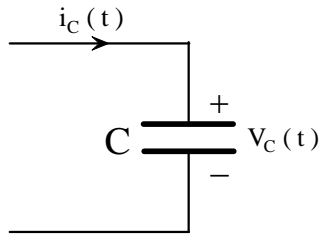


Η τάση V_1 είναι η είσοδος και η τάση V_2 η έξοδος.

Ισχύει $V_2 = k V_1$ όπου εδώ $0 < k < 1$

Ελεγκτής τύπου I

Μπορεί να πραγματοποιηθεί με ένα πυκνωτή:

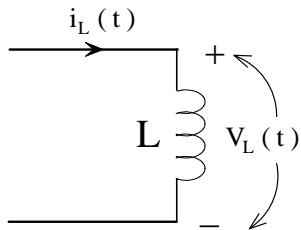


Το ρεύμα $i_C(t)$ είναι η είσοδος και η τάση $V_C(t)$ η έξοδος. Θεωρείται $V_C(0^-) = 0$

$$\text{Ισχύει } V_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_C(t') dt'$$

Ελεγκτής τύπου D

Μπορεί να πραγματοποιηθεί με ένα πηνίο:

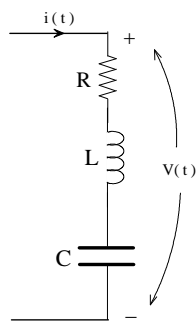


Το ρεύμα $i_L(t)$ είναι η είσοδος και η τάση $V_L(t)$ η έξοδος. Θεωρείται $i_L(0^-) = 0$

$$\text{Ισχύει } V_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

Ελεγκτής τύπου PID

Μπορεί να πραγματοποιηθεί με ένα κύκλωμα R-L-C

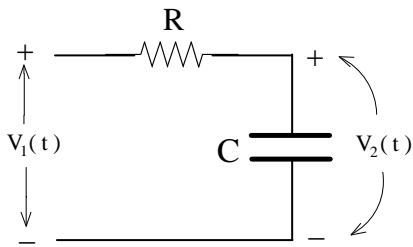


Το ρεύμα $i(t)$ είναι η είσοδος και η τάση $V(t)$ η έξοδος. Θεωρείται $i_L(0^-) = 0$ και $V_C(0^-) = 0$.

$$\text{Ισχύει } V_L(t) = R i_L(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i_C(t') dt'$$

Ελεγκτής τύπου P με καθυστέρηση 1^{ης} τάξεως

Μπορεί να πραγματοποιηθεί με ένα κύκλωμα R-C



Η τάση V_1 (είσοδος) και η τάση V_2 (έξοδος)
συνδέονται με τη σχέση:

$$R C \frac{d V_2 (t)}{d t} + V_2 (t) = V_1 (t)$$

Η σταθερά χρόνου είναι $T = RC$

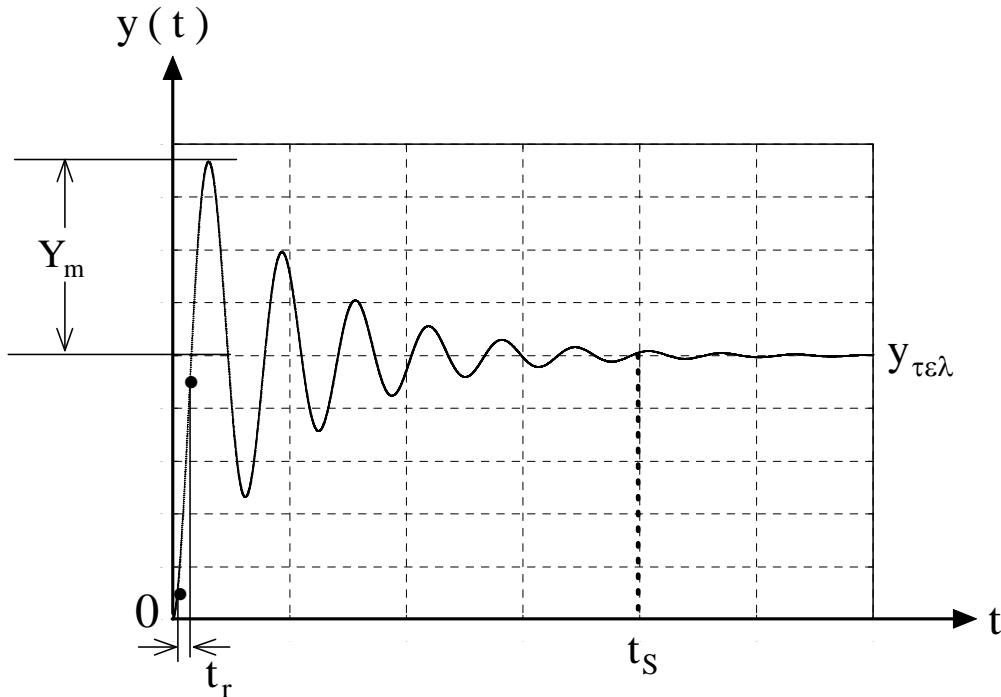
β) Ασυνεχείς ελεγκτές

Οι ελεγκτές αυτοί δεν ακολουθούν τη γραμμικότητα και το σήμα εξόδου τους παίρνει ένα περιορισμένο αριθμό τιμών (π.χ. 2 ή 3) ανάλογα με την είσοδο.

9.8) Χαρακτηριστικά μεγέθη της απόκρισης συστημάτων

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται μια τυπική καμπύλη **βηματικής απόκρισης** ενός συστήματος. Το σύστημα αυτό προφανώς έχει τάξη ανώτερη της πρώτης και διακρίνεται καθαρά το μόνιμο και το μεταβατικό τμήμα.

Ορίζονται εδώ κάποια χαρακτηριστικά μεγέθη με τα οποία περιγράφεται η απόκριση αυτή.



t_s : **Χρόνος αποκαταστάσεως**. Είναι ο χρόνος που διαρκεί, πρακτικά, το μεταβατικό φαινόμενο. Μετά τη χρονική στιγμή t_s η απόκριση κυμαίνεται σε ένα ποσοστό $\pm a$ % γύρω από την τελική τιμή της $y_{\text{τελ}}$. Το a μπορεί να είναι π.χ. 2% ή 5%

t_r : **Χρόνος ανόδου**. Είναι ο χρόνος που απαιτείται ώστε η απόκριση να μεταβληθεί από το 10% έως το 90% της τελικής της τιμής

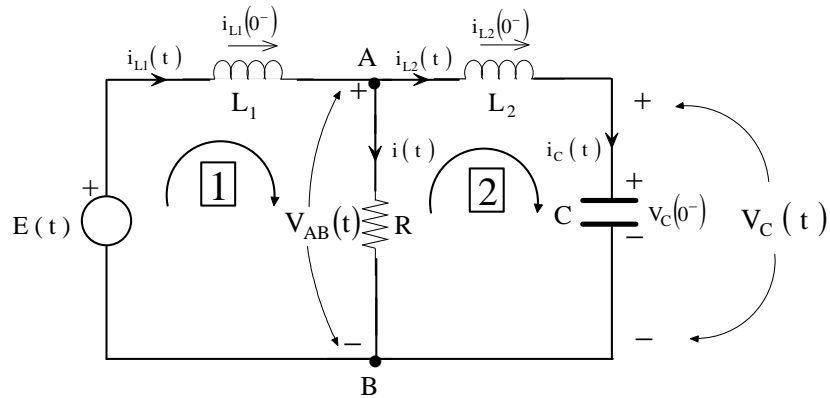
Y_m : **Υπερύψωση**. Είναι η μέγιστη διαφορά Y_m , που εμφανίζεται μεταξύ των τιμών της μεταβατικής απόκρισης και της τελικής τιμής της απόκρισης. Μπορεί να οριστεί και σαν

$$\text{ποσοστό } \varepsilon (\%) \text{ επί της τελικής τιμής της απόκρισης } \varepsilon (\%) = \frac{(Y_m + y_{\text{τελ}}) - y_{\text{τελ}}}{y_{\text{τελ}}} \times 100$$

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Δίδεται το ακόλουθο δίκτυο:



Είσοδος (διέγερση) θεωρείται η τάση της πηγής $E(t)$ η οποία είναι φραγμένη συνάρτηση και έξοδος (απόκριση) η τάση του πυκνωτή $V_C(t)$.

Θεωρούνται γνωστές οι τιμές των R, L_1, L_2 και C , καθώς και οι αρχικές καταστάσεις $i_{L1}(0^-), i_{L2}(0^-), V_C(0^-)$

α) Ζητείται να γίνει μια κατάλληλη εκλογή μεταβλητών καταστάσεως και στη συνέχεια γραφούν οι εξισώσεις καταστάσεως και οι εξισώσεις εξόδου του δικτύου σε μορφή πινάκων.

Λύση:

Το δίκτυο περιέχει 3 δυναμικά στοιχεία (2 πηνία και 1 πυκνωτή) άρα είναι 3^{ης} τάξεως και θα περιγράφεται από 3 μεταβλητές καταστάσεως.

Εκλέγονται εδώ, ως μεταβλητές καταστάσεως τα μεγέθη $i_{L1}(t), i_{L2}(t), V_C(t)$ διότι γι' αυτά δίδονται οι αρχικές καταστάσεις για $t=0^-$, αλλά θα ισχύει λόγω της φραγμένης διέγερσης $E(t)$.

$$i_{L1}(0^-) = i_{L1}(0^+), \quad i_{L2}(0^-) = i_{L2}(0^+), \quad V_C(0^-) = V_C(0^+)$$

Παρακάτω γράφουμε τις εξισώσεις καταστάσεως:

Ο Ν.Τ.Κ. για τον βρόχο 1 γράφεται: $-E(t) + L_1 \frac{di_{L1}(t)}{dt} + i(t)R = 0$ (1)

Ο Ν.Ρ.Κ. για τον κόμβο Α γράφεται:

$$i_{L1}(t) - i(t) - i_{L2}(t) = 0 \Rightarrow i(t) = i_{L1}(t) - i_{L2}(t) \quad (2)$$

συνδυάζοντας τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε την σχέση:

$$L_1 \frac{d i_{L1}(t)}{d t} + R i_{L1}(t) - R i_{L2}(t) = E(t) \quad (3)$$

Η σχέση αυτή είναι η 1^η εξίσωση καταστάσεως, διότι συνδέει την πρώτη παράγωγο του $i_{L1}(t)$ (1^η μεταβλητή καταστάσεως) με τα μεγέθη $i_{L1}(t)$, $i_{L2}(t)$ (2 από τις 3 μεταβλητές καταστάσεως - δεν είναι απαραίτητο να συνδέεται με όλες τις μεταβλητές καταστάσεως) και με το μέγεθος εισόδου $E(t)$.

Ο Ν.Τ.Κ. για τον βρόχο 2 γράφεται: $-i(t)R + L_2 \frac{d i_{L2}(t)}{d t} + V_C(t) = 0 \quad (4)$

και πάλι με χρήση της σχέσης (2) η (4) γίνεται:

$$-R i_{L1}(t) + R i_{L2}(t) + L_2 \frac{d i_{L2}(t)}{d t} + V_C(t) = 0 \quad (5)$$

Αυτή είναι η δεύτερη εξίσωση καταστάσεως διότι συνδέει την πρώτη παράγωγο του $i_{L2}(t)$ (2^η μεταβλητή καταστάσεως) με τα μεγέθη $i_{L1}(t)$, $i_{L2}(t)$ και $V_C(t)$ (τις 3 μεταβλητές καταστάσεως).

Η 3^η εξίσωση καταστάσεως θα προκύψει αμέσως με την εφαρμογή της σχέσης τάσεως-ρεύματος στον πυκνωτή C.

Ισχύει προφανώς: $i_{L2}(t) = i_C(t) = C \frac{d V_C(t)}{d t} \quad (6)$

Συνοψίζοντας ξαναγράφουμε, με κάποια ανακατάταξη των όρων, τις εξισώσεις (3), (5) και (6) που αποτελούν τις 3 εξισώσεις καταστάσεως.

η (3) γράφεται: $\frac{d i_{L1}(t)}{d t} = -\frac{R}{L_1} i_{L1}(t) + \frac{R}{L_1} i_{L2}(t) + \frac{1}{L_1} E(t)$

η (5) γράφεται: $\frac{d i_{L2}(t)}{d t} = \frac{R}{L_2} i_{L1}(t) - \frac{R}{L_2} i_{L2}(t) - \frac{1}{L_2} V_C(t)$

η (6) γράφεται: $\frac{d V_C(t)}{d t} = \frac{1}{C} i_{L2}(t)$

Σε μορφή πινάκων οι εξισώσεις καταστάσεως γράφονται:

$$\frac{d}{d t} \begin{bmatrix} i_{L1}(t) \\ i_{L2}(t) \\ V_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/L_1 & R/L_1 & 0 \\ R/L_2 & -R/L_2 & -1/L_2 \\ 0 & 1/C & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{L1}(t) \\ i_{L2}(t) \\ V_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} E(t)$$

και οι εξισώσεις εξόδου:
$$V_C(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{L1}(t) \\ i_{L2}(t) \\ V_C(t) \end{bmatrix}$$

β) Να βρεθεί η διαφορική εξίσωση που συνδέει τη διέγερση $E(t)$ με την απόκριση $V_C(t)$ και οι αρχικές συνθήκες οι απαραίτητες για την επίλυσή της.

Λύση:

Βρίσκουμε πρώτα την τάση $V_{AB}(t)$ εφαρμόζοντας το θεώρημα Millman στα σημεία **A – B**

$$V_{AB}(t) = \frac{E(t) \frac{1}{L_1 D}}{\frac{1}{L_1 D} + \frac{1}{R} + \frac{1}{L_2 D + \frac{1}{C D}}} \quad (7)$$

όπου ως γνωστόν $D = \frac{d}{dt}$ ο τελεστής της παραγώγου και $\frac{1}{D}$ ο τελεστής του ολοκληρώματος.

Αν η τάση $V_{AB}(t)$ είναι γνωστή τότε η τάση $V_C(t)$ μπορεί να υπολογιστεί με τον κανόνα του διαιρέτη τάσεως:

$$V_C(t) = V_{AB}(t) \frac{\frac{1}{C D}}{L_2 D + \frac{1}{C D}} \quad (8)$$

συνδυάζοντας τις σχέσεις (7) και (8) και μετά από αρκετές, αλλά απλές, αλγεβρικές πράξεις θα καταλήξουμε στη γραμμική διαφορική εξίσωση, με σταθερούς συντελεστές, που συνδέει το μέγεθος εισόδου $E(t)$ με το μέγεθος εξόδου $V_C(t)$.

Η εξίσωση θα είναι προφανώς 3^{ης} τάξεως:

$$[L_1 L_2 C D^3 + (L_1 + L_2) R C D^2 + L_1 D + R] V_C(t) = R E(t) \quad (9)$$

για την επίλυσή της απαιτείται η γνώση 3 αρχικών συνθηκών για τη χρονική στιγμή $t = 0^+$ και συγκεκριμένα των τιμών:

$$V_C(0^+), \quad D V_C(0^+), \quad D^2 V_C(0^+)$$

Οι συγκεκριμένες αυτές τιμές για τη χρονική στιγμή $t = 0^+$ (που είναι η αρχική χρονική στιγμή της απόκρισης) πρέπει να υπολογιστούν συναρτήσει γνωστών μεγεθών και αυτά είναι:

- οι αρχικές καταστάσεις: $i_{L1}(0^-)$, $i_{L2}(0^-)$, $V_C(0^-)$ (προσέξτε ότι δίδονται για $t = 0^-$)
- οι τιμές της συναρτήσεως εισόδου $E(t)$ αλλά και παραγώγων αυτής μέχρι $2^{ας}$ τάξεως για τη χρονική στιγμή $t = 0^+$

Το πρόβλημα της εύρεσης των αρχικών συνθηκών, σε ένα ηλεκτρικό δίκτυο, γενικά δεν είναι εύκολο και απαιτεί γενικά αρκετή εμπειρία. Τα μαθηματικά «εργαλεία» που χρησιμοποιούνται είναι, και εδώ, οι Νόμοι του Kirchhoff και οι σχέσεις τάσεως – ρεύματος των ηλεκτρικών στοιχείων.

Παρακάτω θα υπολογίσουμε τις ζητούμενες αρχικές συνθήκες:

Αρχικά αναφέρουμε ότι εφ' όσον η τάση $E(t)$ (διέγερση) είναι **φραγμένη**, θα ισχύουν οι σχέσεις:

$$i_{L1}(0^-) = i_{L1}(0^+)$$

$$i_{L2}(0^-) = i_{L2}(0^+)$$

$$V_C(0^-) = V_C(0^+)$$

Δηλαδή οι συναρτήσεις $i_{L1}(t)$, $i_{L2}(t)$, $V_C(t)$ θα είναι συνεχείς για $t = 0$.

Παρατηρούμε ότι η πρώτη αρχική συνθήκη $V_C(0^+)$, προκύπτει απ' ευθείας από τα δεδομένα του προβλήματος, διότι συμβαίνει το μέγεθος εξόδου να είναι τάση πυκνωτή.

Για να υπολογίσουμε τη δεύτερη αρχική συνθήκη, $D V_C(0^+)$, σκεπτόμαστε ως εξής:

Ισχύει $D V_C(t) = \frac{1}{C} i_C(t)$ αλλά από το κύκλωμα είναι προφανές ότι

$i_C(t) = i_{L2}(t)$. Άρα για $t = 0^+$ θα έχουμε:

$$D V_C(0^+) = \frac{1}{C} i_{L2}(0^+) \quad (10)$$

Η τρίτη αρχική συνθήκη $D^2 V_C(0^+)$, υπολογίζεται ως εξής:

Θα ισχύουν:

$$D^2 V_C(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d V_C(t)}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{C} i_C(t) \right) = \frac{1}{C} D i_C(t) = \frac{1}{C} D i_{L2}(t)$$

αλλά
$$D i_{L2}(t) = \frac{1}{L_2} V_{L2}(t)$$

επομένως
$$D^2 V_C(0^+) = \frac{1}{L_2 C} V_{L2}(0^+) \quad (11)$$

Πρέπει να βρούμε μια σχέση για την τάση $V_{L2}(t)$ **συναρτήσει των γνωστών μεγεθών**

Σε μια τροποποιημένη μορφή από την σχέση (4) ο Ν.Τ.Κ. για τον βρόχο 2 γράφεται:

$$-i(t)R + V_{L2}(t) + V_C(t) = 0$$

και από την σχέση (2) $i(t) = i_{L1}(t) - i_{L2}(t)$

άρα με συνδυασμό των δύο τελευταίων σχέσεων θα πάρουμε:

$$V_{L2}(t) = i_{L1}(t)R - i_{L2}(t)R - V_C(t) \quad (12)$$

και από τις σχέσεις (11) και (12) τελικά θα προκύψει, θέτοντας $t = 0^+$, η ζητούμενη τρίτη αρχική συνθήκη.

$$D^2 V_C(0^+) = \frac{1}{L_2 C} [i_{L1}(0^+)R - i_{L2}(0^+)R - V_C(0^+)] \quad (13)$$

Επαναλαμβάνουμε εδώ, συνοπτικά, την διαφορική εξίσωση (**Δ.Ε.**) που συνδέει την είσοδο $E(t)$ με την έξοδο $V_C(t)$, και τις 3 αρχικές συνθήκες (**Α.Σ.**) που την συνοδεύουν.

$$\mathbf{\Delta.Ε.:} \quad [L_1 L_2 C D^3 + (L_1 + L_2) R C D^2 + L_1 D + R] V_C(t) = R E(t)$$

$$\mathbf{Α.Σ.:} \quad V_C(0^+) \quad (= \text{γνωστό από τα δεδομένα})$$

$$D V_C(0^+) = \frac{1}{C} i_{L2}(0^+)$$

$$D^2 V_C(0^+) = \frac{1}{L_2 C} [i_{L1}(0^+)R - i_{L2}(0^+)R - V_C(0^+)]$$

Παρατηρούμε ότι οι αριθμητικές τιμές των τριών αρχικών συνθηκών υπολογίζονται αμέσως συναρτήσει **γνωστών μεγεθών** από τα δεδομένα του προβλήματος.

γ) Έστω ότι, για τα δεδομένα του προβλήματος, δίδονται οι ακόλουθες αριθμητικές τιμές:

$$R = 4 \Omega, \quad L_1 = 1 \text{ H}, \quad L_2 = 2 \text{ H}, \quad C = 0.5 \text{ F}$$

και $i_{L1}(0^-) = 0.5 \text{ Amp}$, $i_{L2}(0^-) = 0.2 \text{ Amp}$, $V_C(0^-) = 10 \text{ Volts}$,

να υπολογιστεί η απόκριση $v_C(t)$ για είσοδο την βηματική συνάρτηση $E(t) = u(t)$.

Λύση:

Αντικαθιστώντας τις αριθμητικές τιμές η διαφορική εξίσωση γράφεται:

$$D^3 V_C(t) + 6D^2 V_C(t) + D V_C(t) + 4 V_C(t) = 4 u(t) \quad (14)$$

και οι αρχικές συνθήκες:

$$V_C(0^+) = 10 \text{ V}$$

$$D V_C(0^+) = 0.4 \text{ V/sec}$$

$$D^2 V_C(0^+) = -8.8 \text{ V/sec}^2$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της Δ.Ε. θα είναι:

$$s^3 + 6s^2 + s + 4 = 0$$

με ρίζες $s_1 = -5.945$, $s_{2,3} = -0.0275 \pm j 0.8198$

(Σημ. Οι ρίζες αυτές υπολογίστηκαν με κάποιον αλγόριθμο εύρεσης ριζών πολυωνύμων)

Η γενική λύση της ομογενούς Δ.Ε. θα είναι:

$$V_{C,ομογ}(t) = C_1 e^{-5.945t} + e^{-0.0275t} [C_2 \sin(0.8198t) + C_3 \cos(0.8198t)]$$

Αναζητούμε μια μερική λύση της Δ.Ε.

Επειδή για $t > 0$ η Δ.Ε. γράφεται:

$$D^3 V_C(t) + 6D^2 V_C(t) + D V_C(t) + 4 V_C(t) = 4$$

η μερική λύση θα είναι της μορφής:

$$V_{C,μερ}(t) = K = \text{σταθ.}$$

Αντικαθιστώντας την $V_{C,μερ}(t)$ στην Δ.Ε. αμέσως θα προκύψει $V_{C,μερ}(t) = 1$

Επομένως η γενική λύση της Δ.Ε. γράφεται:

$$\begin{aligned} V_C(t) &= V_{C,ομογ}(t) + V_{C,μερ}(t) = \\ &= C_1 e^{-5.945t} + e^{-0.0275t} [C_2 \sin(0.8198t) + C_3 \cos(0.8198t)] + 1 \end{aligned}$$

Οι σταθερές C_1, C_2, C_3 υπολογίζονται από τις Α.Σ.

$$V_C(0^+) = 10 \text{ V},$$

$$D V_C(0^+) = 0.4 \text{ V/sec},$$

$$D^2 V_C(0^+) = -8.8 \text{ V/sec}^2$$

Έτσι θα έχουμε:

$$V_C(0^+) = C_1 + C_3 + 1 = 10$$

$$D V_C(0^+) = -5.945 C_1 - 0.0275 C_3 + 0.8198 C_2 = 0.4$$

$$\begin{aligned} D^2 V_C(0^+) &= (5.945)^2 C_1 + (0.0275)^2 C_3 - 0.0275(0.8198) C_2 - 0.0275(0.8198) C_2 \\ &\quad - (0.8198)^2 C_3 = -8.8 \end{aligned}$$

άρα προκύπτει το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} C_1 + C_3 &= 9 \\ -5.945 C_1 + 0.8198 C_2 - 0.0275 C_3 &= 0.4 \\ 35.343 C_1 - 0.0450 C_2 - 0.6713 C_3 &= -8.8 \end{aligned}$$

με λύση:

$$C_1 = -0.0764$$

$$C_2 = 0.2386$$

$$C_3 = 9.0764$$

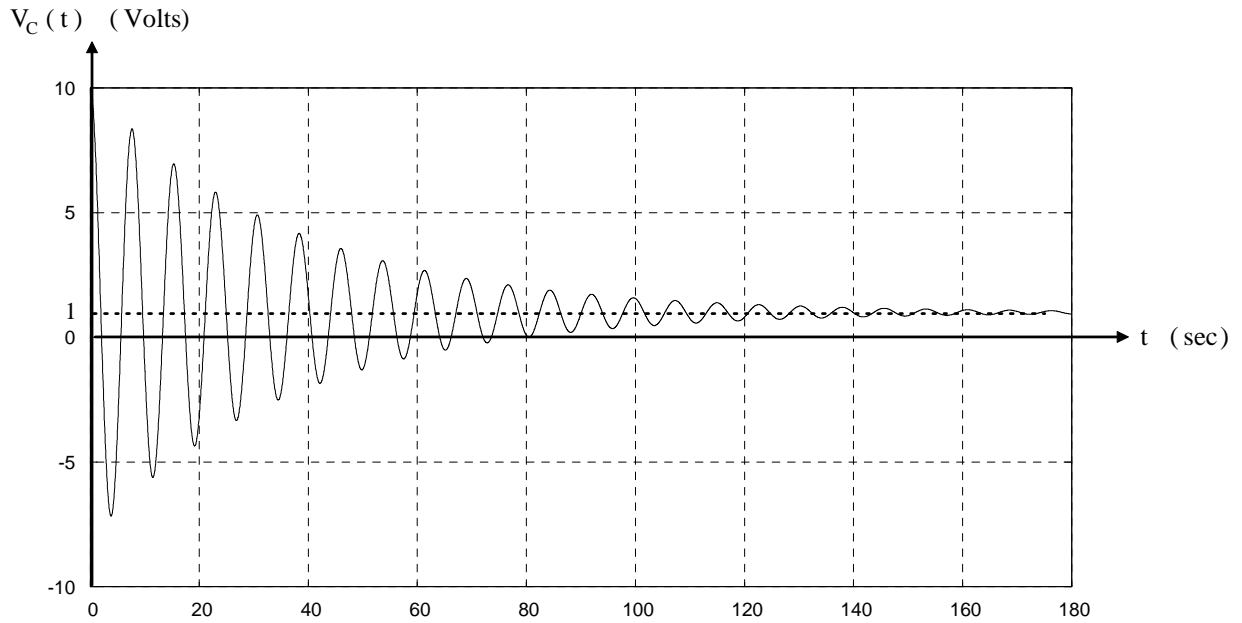
άρα η λύση της Δ.Ε. γράφεται τελικά

$$V_C(t) = -0.0764 e^{-5.945t} + e^{-0.0275t} [0.2386 \sin(0.8198t) + 9.0764 \cos(0.8198t)] + 1$$

ή ισοδύναμα

$$V_C(t) = -0.0764 e^{-5.945t} + 9.0794 e^{-0.0275t} \sin(0.8198t + 88.5^\circ) + 1$$

Παρακάτω φαίνεται η γραφική της λύσης



Το δίκτυο έχει δύο σταθερές χρόνου: $T_1 = 1 / 5.945 = 0.1682 \text{ sec}$ και $T_2 = 1 / 0.0275 = 36.36 \text{ sec}$. Η επικρατούσα σταθερά χρόνου είναι η μεγαλύτερη δηλ. η T_2 . Το μεταβατικό φαινόμενο διαρκεί πρακτικά χρόνο ίσο με $5 T_2 = 182 \text{ sec}$ περίπου.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Για ένα γραμμικό σύστημα 1^{ης} τάξεως, με μία είσοδο $f(t)$, και μία έξοδο $y(t)$ η διαφορική εξίσωση είναι:

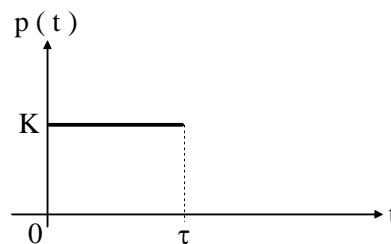
$$a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 f(t)$$

και η αρχική συνθήκη για $t=0^-$ $y(0^-) = 0$

Ζητούνται: α) Η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ του συστήματος

β) Η κρουστική απόκριση $h(t)$

γ) Η απόκριση στον παλμό του σχήματος

**Λύση:**

α) Από τη διαφορική εξίσωση προκύπτει αμέσως η συνάρτηση μεταφοράς, γιατί όπως είναι γνωστό οι συντελεστές της Δ.Ε. είναι και οι συντελεστές των πολυωνύμων της συνάρτησης μεταφοράς, και επίσης οι τάξεις παραγώγισης “μεταφράζονται” σε δυνάμεις του s . Άρα θα έχουμε:

$$a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_0 F(s)$$

και

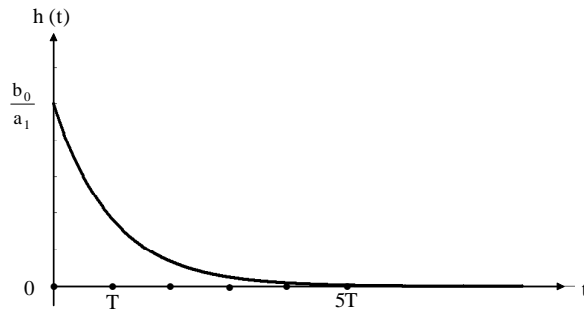
$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{b_0}{a_1 s + a_0}$$

β) Η κρουστική απόκριση θα είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης μεταφοράς. $h(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ H(s) \}$.

Άρα:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{b_0}{a_1 s + a_0} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\frac{b_0}{a_1}}{s + \frac{a_0}{a_1}} \right\} = \frac{b_0}{a_1} e^{-\frac{a_0}{a_1} t}$$

Με γραφική παράσταση:



Παρατηρήστε ότι: $h(0^-) = 0$ ενώ $h(0^+) = b_0/a_1$

γ) Ο παλμός $p(t)$ του σχήματος γράφεται: $p(t) = K(u(t) - u(t - \tau))$

Για να βρούμε την απόκριση $Y(s)$ στο πεδίο της μιγαδικής συχνότητας χρησιμοποιούμε τη σχέση:

$$Y(s) = H(s)F(s)$$

όπου εδώ το σήμα εισόδου $f(t)$ είναι ο παλμός $p(t)$ άρα:

$$F(s) = \mathcal{L}\{p(t)\} = \mathcal{L}\{K(u(t) - u(t - \tau))\} = \frac{K}{s} - \frac{K}{s} e^{-s\tau}$$

άρα:

$$Y(s) = \frac{b_0}{a_1 s + a_0} \left(\frac{K}{s} - \frac{K}{s} e^{-s\tau} \right) = \frac{K b_0}{a_1 s^2 + a_0 s} (1 - e^{-s\tau})$$

το κλάσμα $\frac{K b_0}{a_1 s^2 + a_0 s}$ μπορεί εύκολα να αναλυθεί με τη μέθοδο Heaviside:

$$\frac{K b_0}{a_1 s^2 + a_0 s} = \frac{K b_0}{a_0} \frac{1}{s} - \frac{K b_0}{a_0} \left(\frac{1}{s + \frac{a_0}{a_1}} \right)$$

άρα:

$$Y(s) = \frac{K b_0}{a_0} (1 - e^{-s\tau}) \left[\frac{1}{s} - \left(\frac{1}{s + \frac{a_0}{a_1}} \right) \right]$$

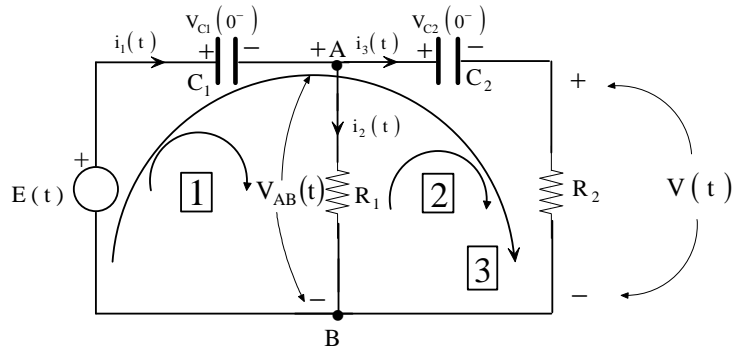
και τελικά $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{K b_0}{a_0} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{K b_0}{a_0} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} e^{-s\tau}\right\} -$

$$- \frac{K b_0}{a_0} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + \frac{a_0}{a_1}}\right\} + \frac{K b_0}{a_0} \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{1}{s + \frac{a_0}{a_1}}\right) e^{-s\tau}\right\}$$

$$\text{ή: } y(t) = \frac{K b_0}{a_0} \left(u(t) - u(t - \tau) - e^{-\frac{a_0}{a_1} t} + e^{-\frac{a_0}{a_1} (t - \tau)} u(t - \tau) \right)$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Λίδεται το παρακάτω ηλεκτρικό δίκτυο.



Είσοδος θεωρείται η τάση της πηγής $E(t)$ και έξοδος η τάση $V(t)$ στα άκρα της R_2 .

Θεωρούνται γνωστές οι τιμές: $R_1, R_2, C_1, C_2, V_{C1}(0^-), V_{C2}(0^-)$

Ζητούνται:

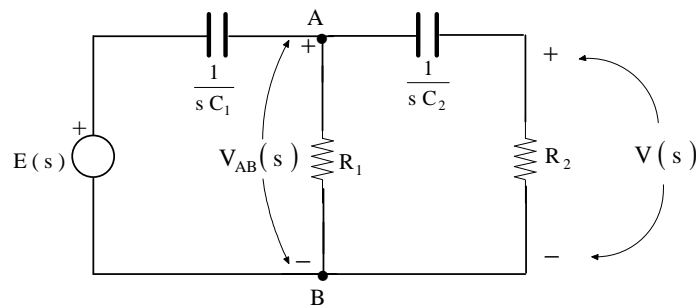
α) Η συνάρτηση μεταφοράς $H(s) = \frac{V(s)}{E(s)}$

β) Η διαφορική εξίσωση που συνδέει την είσοδο με την έξοδο και οι αρχικές συνθήκες οι απαραίτητες για την επίλυσή της

Λύση

α) Για να βρούμε τη συνάρτηση μεταφοράς αρχικά μετασχηματίζουμε το δίκτυο στην περιοχή της μιγαδικής συχνότητας s , λαμβάνοντας όμως αρχικές καταστάσεις μηδενικές.

Έτσι το δίκτυο γίνεται:



Η τάση V_{AB} , με χρήση του θεωρήματος Millman, θα δίνεται από τη σχέση:

$$V_{AB}(s) = \frac{E(s) \frac{1}{1/s C_1}}{\frac{1}{1/s C_1} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + (1/s C_2)}} \quad (1)$$

και με χρήση του κανόνα του διαιρέτη τάσεως:

$$V(s) = V_{AB}(s) \frac{R_2}{R_2 + \left(\frac{1}{s C_2}\right)} \quad (2)$$

συνδυάζοντας τις σχέσεις (1) και (2) και μετά από αρκετή άλγεβρα θα καταλήξουμε στη σχέση:

$$V(s) \left[R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) s + 1 \right] = R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 E(s)$$

άρα η ζητούμενη συνάρτηση μεταφοράς θα είναι:

$$H(s) = \frac{V(s)}{E(s)} = \frac{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) s + 1} \quad (3)$$

β) Εφ' όσον γνωρίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς μπορούμε αμέσως να βρούμε τη διαφορική εξίσωση, κατά τα γνωστά, αντικαθιστώντας τις δυνάμεις του s με τάξεις παραγωγίσης. Έτσι θα προκύψει η Δ.Ε.:

$$R_1 R_2 C_1 C_2 D^2 V(t) + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) D V(t) + V(t) = R_1 R_2 C_1 C_2 D^2 E(t)$$

πρόκειται για Δ.Ε. 2^{as} τάξεως γιατί και το δίκτυο είναι 2^{as} τάξεως.

Οι αρχικές συνθήκες, απαραίτητες για την επίλυσή της, είναι οι ακόλουθες 2:

$$V(0^+) \quad \text{και} \quad D V(0^+)$$

Η εύρεσή τους, ιδίως της 2^{as} , απαιτεί αρκετή εμπειρία στη θεωρία κυκλωμάτων. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει πρέπει να υπολογιστούν για τη χρονική στιγμή $t = 0^+$ **συναρτήσεις γνωστών μεγεθών** δηλαδή των R_1, R_2, C_1, C_2 , των τιμών $V_{C_1}(0^-), V_{C_2}(0^-)$ (αρχικές

καταστάσεις) καθώς και των τιμών της διέγερσης $E(t)$ και παραγώγων αυτής μέχρι 2^{ας} τάξεως για $t = 0^+$.

Εφ' όσον η διέγερση $E(t)$ είναι φραγμένη συνάρτηση θα ισχύουν:

$$V_{C1}(0^-) = V_{C1}(0^+) \quad \text{και} \quad V_{C2}(0^-) = V_{C2}(0^+)$$

Για τον υπολογισμό της πρώτης Α.Σ. σκεπτόμαστε ως εξής:

Ο Ν.Τ.Κ. στον σύνθετο βρόχο 3 γράφεται:

$$-E(t) + V_{C1}(t) + V_{C2}(t) + V(t) = 0$$

άρα για $t = 0^+$ θα έχουμε:

$$V(0^+) = E(0^+) - V_{C1}(0^+) - V_{C2}(0^+) \quad (4)$$

που είναι η 1^η ζητούμενη αρχική συνθήκη.

Για να βρούμε τη δεύτερη αρχική συνθήκη γράφουμε αρχικά τη σχέση:

$$D V(t) = D E(t) - D V_{C1}(t) - D V_{C2}(t) \quad (5)$$

$$\text{αλλά:} \quad D V_{C1}(t) = \frac{1}{C_1} i_1(t) \quad (6) \quad \text{και} \quad D V_{C2}(t) = \frac{1}{C_2} i_3(t) \quad (7)$$

$$\text{Το ρεύμα } i_3(t) \text{ μπορεί να γραφεί:} \quad i_3(t) = \frac{V(t)}{R_2} \quad (8)$$

(η τιμή $V(0^+)$ είναι γνωστή!)

Ενώ το ρεύμα $i_1(t)$ γράφεται (μέσω του Ν.Ρ.Κ. στον κόμβο Α)

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t) \quad (9)$$

όπου από τον Ν.Τ.Κ. στον βρόχο 1:

$$-E(t) + V_{C1}(t) + i_2(t)R_1 = 0 \Rightarrow i_2(t) = \frac{E(t) - V_{C1}(t)}{R_1} \quad (10)$$

συνδυάζοντας τις σχέσεις (5) έως (10) θα πάρουμε:

$$D V(t) = D E(t) - \frac{1}{C_1} i_1(t) - \frac{1}{C_2} i_3(t) = D E(t) - \frac{1}{C_1} (i_2(t) + i_3(t)) - \frac{1}{C_2} i_3(t)$$

$$\dot{V}(t) = D E(t) - \frac{1}{C_1} \left(\frac{E(t) - V_{C1}(t)}{R_1} + \frac{V(t)}{R_2} \right) - \frac{1}{C_2} \frac{V(t)}{R_2}$$

και για $t = 0^+$:

$$D V(0^+) = D E(0^+) - \frac{1}{C_1} \left(\frac{E(0^+) - V_{C1}(0^+)}{R_1} + \frac{V(0^+)}{R_2} \right) - \frac{1}{C_2} \frac{V(0^+)}{R_2} \quad (11)$$

αυτή είναι η δεύτερη ζητούμενη αρχική συνθήκη. (Η τιμή $V(0^+)$ δίνεται από τη σχέση (4)).

Συνοψίζουμε τα προηγούμενα :

Δ.Ε.

$$R_1 R_2 C_1 C_2 D^2 V(t) + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) D V(t) + V(t) = R_1 R_2 C_1 C_2 D^2 E(t)$$

Α.Σ.

$$V(0^+) = E(0^+) - V_{C1}(0^+) - V_{C2}(0^+)$$

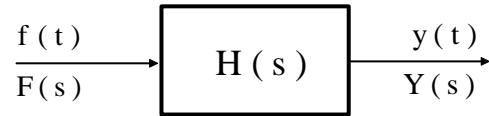
$$D V(0^+) = D E(0^+) - \frac{1}{C_1} \left(\frac{E(0^+) - V_{C1}(0^+)}{R_1} + \frac{V(0^+)}{R_2} \right) - \frac{1}{C_2} \frac{V(0^+)}{R_2}$$

Αριθμητική Εφαρμογή: Να υπολογιστεί η απόκριση του δικτύου για είσοδο την βηματική συνάρτηση $u(t)$ και τιμές στοιχείων:

$$R_1 = 1 \Omega, \quad R_2 = 1 \Omega, \quad C_1 = 1 \text{ F}, \quad C_2 = 1 \text{ F}, \quad V_{C1}(0^-) = 0 \text{ V}, \quad V_{C2}(0^-) = 0 \text{ V}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Δίδεται το ακόλουθο γραμμικό, και χρονικά σταθερό σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$



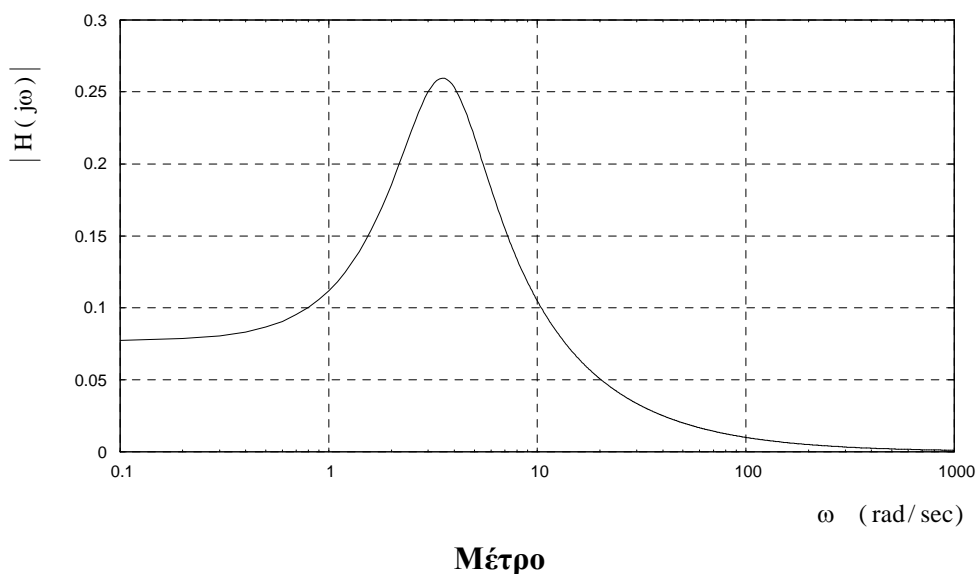
$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{s+1}{s^2+4s+13}$$

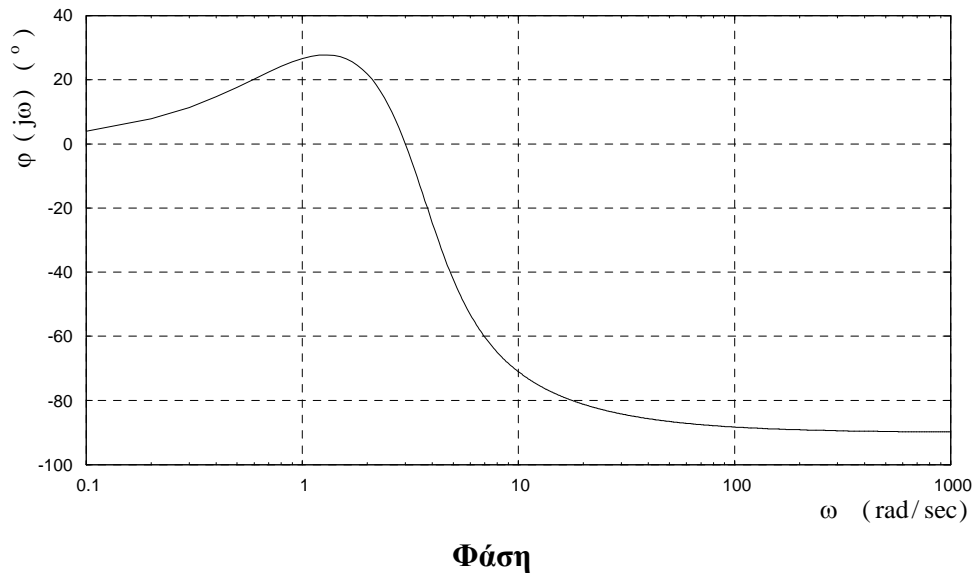
1) Να γίνουν τα διαγράμματα Bode (για μέτρο και φάση) της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος.

Υπενθυμίζεται ότι η συνάρτηση μεταφοράς $H(s) = |H(s)| e^{j\varphi(s)}$ είναι μια μιγαδική συνάρτηση του s , όπου $s = \sigma + j\omega$, η μιγαδική συχνότητα.

Για να κατασκευάσουμε τα διαγράμματα Bode θέτουμε $s = j\omega$ (δηλαδή αναφερόμαστε στην Ημιτονική Μόνιμη Κατάσταση) και λαμβάνουμε τα διαγράμματα του μέτρου $|H(j\omega)|$ και της φάσης $\varphi(j\omega)$ της συνάρτησης μεταφοράς. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα θεωρήσαμε πεδίο μεταβολής του ω από 0.1 έως 1000 rad/sec.

Τα σχετικά διαγράμματα φαίνονται παρακάτω. (Στον οριζόντιο άξονα των συχνοτήτων χρησιμοποιείται, για καλλίτερη ευκρίνεια, λογαριθμική κλίμακα)





2) Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος

Η κρουστική απόκριση είναι, ως γνωστόν, η απόκριση $y(t) = h(t)$ του συστήματος με είσοδο την κρουστική συνάρτηση $\delta(t)$, και με αρχικές συνθήκες για $t=0^-$ μηδενικές. Επομένως στο παράδειγμά μας (σύστημα 2^{ας} τάξεως) θα έχουμε $h(0^-) = 0$ και $\frac{dh(0^-)}{dt} = 0$.

Είναι γνωστή η σχέση που συνδέει την κρουστική απόκριση $h(t)$ με την συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ ενός γραμμικού συστήματος.

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$$

άρα
$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+4s+13}\right\}$$

θα έχουμε $H(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$ όπου:

$$A(s) = s + 1$$

$$B(s) = s^2 + 4s + 13 \quad \text{με ρίζες: } s_{1,2} = -2 \pm j3 = \sigma \pm j\omega \quad (\text{ζεύγος συζυγών μιγαδικών})$$

$$B'(s) = 2s + 4$$

Άρα τελικά
$$h(t) = 2M e^{\sigma t} \cos(\omega t + \varphi)$$

όπου: $\sigma = -2$, $\omega = 3$ και $\frac{A(s_1)}{B'(s_1)} = M e^{j\varphi}$ με $s_1 = -2 + j3$

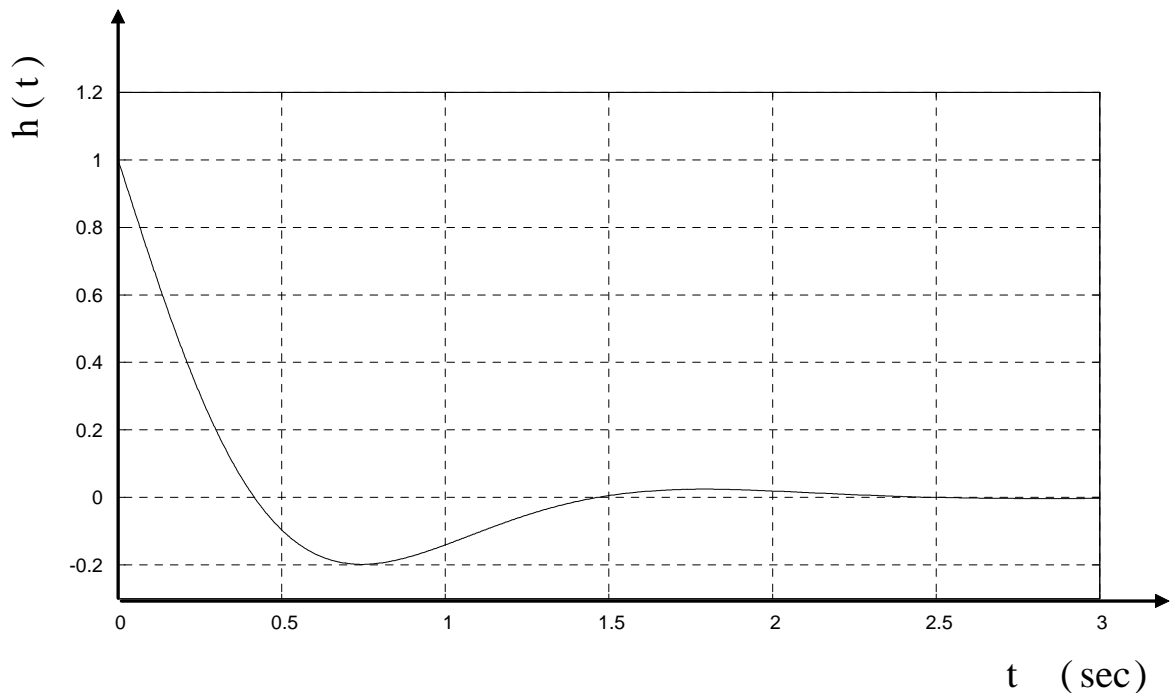
μετά τις πράξεις προκύπτουν οι τιμές:

$$M = 0.527 \quad \text{και} \quad \varphi = 18.4^\circ$$

άρα η κρουστική απόκριση θα είναι:

$$h(t) = 1.054 e^{-2t} \cos(3t + 18.4^\circ) \quad (1)$$

Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται η κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος



β' τρόπος εύρεσης της κρουστικής απόκρισης

Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την κρουστική απόκριση και με έναν άλλο τρόπο.

Συγκεκριμένα η διαφορική εξίσωση του συστήματος θα είναι:

$$D^2 y(t) + 4D y(t) + 13y(t) = Df(t) + f(t)$$

και θέτοντας $f(t) = \delta(t)$, και για την περίπτωσή μας $y(t) = h(t)$ θα πάρουμε:

$$D^2 h(t) + 4D h(t) + 13h(t) = D\delta(t) + \delta(t)$$

Προφανώς για $t > 0$, ή ισοδύναμα για $t \geq 0^+$, η διαφορική εξίσωση γράφεται:

$$D^2 h(t) + 4D h(t) + 13h(t) = 0$$

Το πρόβλημα λοιπόν ανάγεται στην επίλυση μιας ομογενούς διαφορικής εξίσωσης με άγνωστες, κατ' αρχήν, αρχικές συνθήκες: $h(0^+)$ και $Dh(0^+)$

Εφαρμόζοντας τη σχετική μεθοδολογία που αναφέρεται στο κεφάλαιο 4 (εδάφιο 8) θα βρούμε τελικά τις τιμές

$$h(0^+) = 1, \quad Dh(0^+) = -3$$

Άρα λοιπόν το πρόβλημα που έχουμε να επιλύσουμε είναι:

$$\Delta.E. \quad D^2 h(t) + 4 Dh(t) + 13 h(t) = 0$$

$$A.S. \quad h(0^+) = 1, \quad Dh(0^+) = -3$$

$$\text{Η επίλυση δίνει για } t \geq 0^+ : \quad h(t) = e^{-2t} \left[\cos(3t) - \frac{1}{3} \sin(3t) \right] \quad (2)$$

Η έκφραση αυτή είναι ταυτόσημη, για κάθε t , με την έκφραση της σχέσης (1)

3) Να υπολογιστεί η βηματική απόκριση $\alpha(t)$ του συστήματος

Η βηματική απόκριση είναι η απόκριση $y(t) = \alpha(t)$ του συστήματος με είσοδο την βηματική συνάρτηση $u(t)$, και με αρχικές συνθήκες για $t = 0^-$ μηδενικές. Επομένως στο

παράδειγμά μας (σύστημα 2^{ας} τάξεως) θα έχουμε $\alpha(0^-) = 0$ και $\frac{d\alpha(0^-)}{dt} = 0$.

Από την θεμελιώδη σχέση, για κάθε γραμμικό σύστημα, $Y(s) = H(s)F(s)$

όπου εδώ $f(t) = u(t)$ άρα $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}$

$$\text{θα πάρουμε: } Y(s) = A(s) = H(s)F(s) = \frac{s+1}{s^2+4s+13} \cdot \left(\frac{1}{s}\right) = \frac{s+1}{s^3+4s^2+13s}$$

άρα η βηματική απόκριση θα είναι:

$$\alpha(t) = \mathcal{L}^{-1}\{A(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^3+4s^2+13s}\right\}$$

θα έχουμε:

$$A(s) = s+1$$

$$B(s) = s^3 + 4s^2 + 13s \quad \text{με ρίζες: } s_1 = 0, \quad s_{2,3} = -2 \pm j3 = \sigma \pm j\omega$$

$$B'(s) = 3s^2 + 8s + 13$$

και τελικά:
$$h(t) = \frac{A(s_1)}{B'(s_1)} u(t) + 2M e^{\sigma t} \cos(\omega t + \varphi)$$

όπου: $\sigma = -2$, $\omega = 3$ και $\frac{A(s_2)}{B'(s_2)} = M e^{j\varphi}$ με $s_2 = -2 + j3$

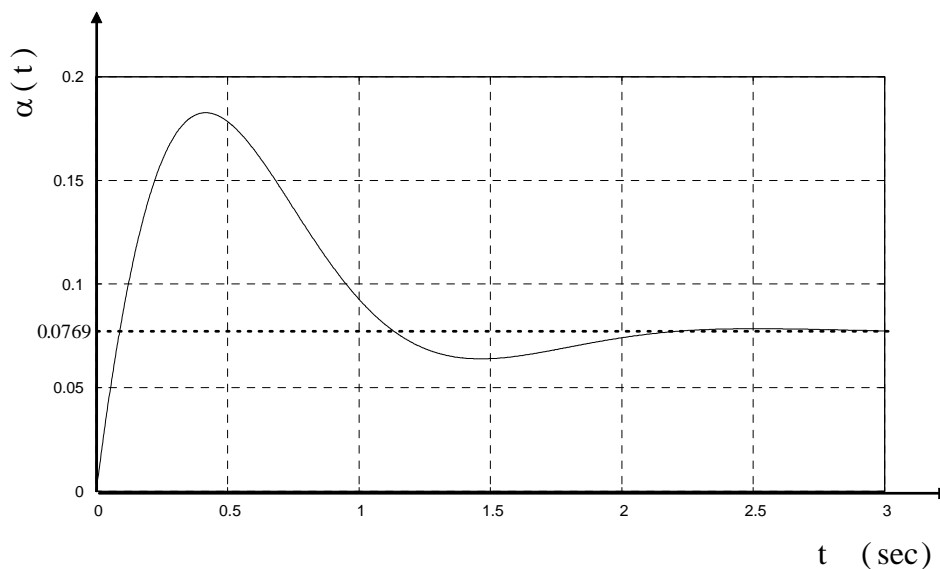
μετά τις πράξεις προκύπτουν οι τιμές:

$$M = 0.1462 \quad \text{και} \quad \varphi = -105.3^\circ$$

άρα η βηματική απόκριση θα είναι:

$$\alpha(t) = 0.2924 e^{-2t} \cos(3t - 105.3^\circ) + 0.0769 u(t) \quad (3)$$

Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται η βηματική απόκριση $\alpha(t)$ του συστήματος.



Γνωρίζοντας τις εκφράσεις που μας δίνουν την κρουστική $h(t)$ και την βηματική απόκριση $\alpha(t)$ μπορούμε εύκολα να επαληθεύσουμε τις σχέσεις:

$$h(t) = \frac{d\alpha(t)}{dt} \quad \text{και} \quad \alpha(t) = \int_0^t h(t') dt'$$

Υπόδειξη Δίδεται το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int e^{at} \cos(\omega t + \varphi) dt = \frac{a}{a^2 + \omega^2} e^{at} \cos(\omega t + \varphi) + \frac{\omega}{a^2 + \omega^2} e^{at} \sin(\omega t + \varphi)$$

4) Να υπολογιστεί η απόκριση $y(t)$ του συστήματος στο σήμα εισόδου:

$$f(t) = u(t-1) - u(t-3)$$

Γνωρίζοντας την απόκριση $\alpha(t)$, σε βηματική είσοδο $u(t)$, και εφ' όσον το σύστημά μας είναι γραμμικό και **χρονικά σταθερό** η απόκριση $y(t)$, στην είσοδο $f(t) = u(t-1) - u(t-3)$ μπορεί να γραφεί αμέσως ως εξής: (βλ. σχετικά και σελ 108)

$$y(t) = \alpha(t-1)u(t-1) - \alpha(t-3)u(t-3)$$

ή :

$$y(t) = 0.2924 e^{-2(t-1)} \cos(3(t-1) - 105.3^\circ) u(t-1) + 0.0769 u(t-1) - \\ - 0.2924 e^{-2(t-3)} \cos(3(t-3) - 105.3^\circ) u(t-3) - 0.0769 u(t-3)$$

Στα παρακάτω διαγράμματα φαίνονται το σήμα εισόδου $f(t) = u(t-1) - u(t-3)$ (τετραγωνικός παλμός) και η απόκριση $y(t)$ στο σήμα αυτό.

