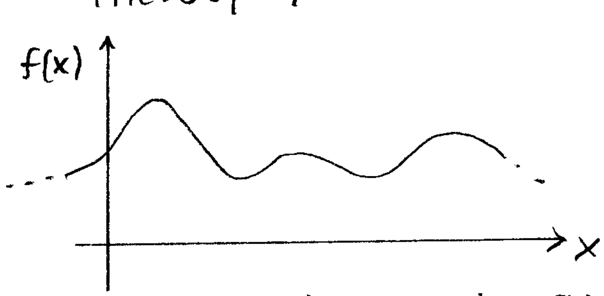
Θέματα Μαθηματικού υποβάθρου

1) Συναρτήσεις

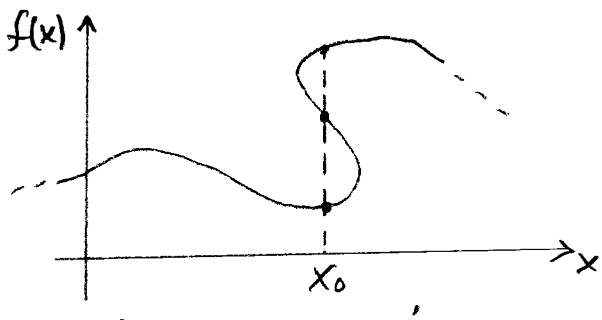
Η έννοια της συναρτήσεως θεωρείται γνωστή (απεικόνιση ενός τμήματος του $\mathbb{R}$, ή ολοκλήρου του $\mathbb{R}$ σε ένα άλλο τμήμα του, με μονοσήμαντο τρόπο)

Γράφουμε $y = f(x)$ ή $y = f(t)$ κ.λπ.

Υπενθυμίζεται



είναι συνάρτηση



ΔΕΝ είναι συνάρτηση

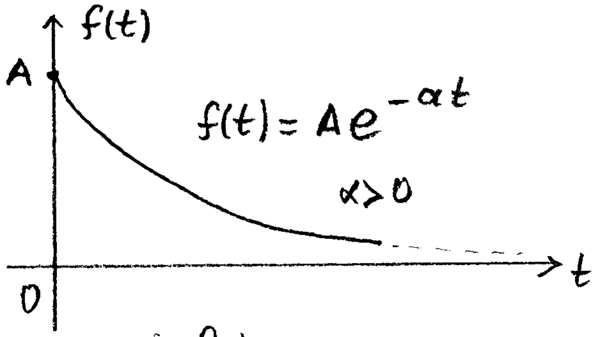
Στην θεωρία κυκλωμάτων χρησιμοποιούνται κυρίως οι ακόλουθες συναρτήσεις

- Πολυώνυμα π.χ $f(t) = \alpha$, $f(t) = \alpha t + b$ $(\alpha, b \in \mathbb{R})$
- Ημιτονοειδής συνάρτηση $f(t) = A_m \sin(\omega t + \varphi)$
  όπου A_m: πλάτος, ω: κυκλική συχνότητα (rad/sec)
  φ: αρχική φάση (rad)
- Εκθετική συνάρτηση $f(t) = Ae^{-kt}$ (εδώ $k>0$)
  - εδώ $k>0$ άρα ο εκθέτης $-kt<0$ (για $t>0$)
  διότι διαφορετικά $f(t) \to \infty$ πράγμα αφύσικο για φυσικά συστήματα όπως είναι τα ηλεκτρικά κυκλώματα
- Συνδυασμοί των παραπάνω συναρτήσεων

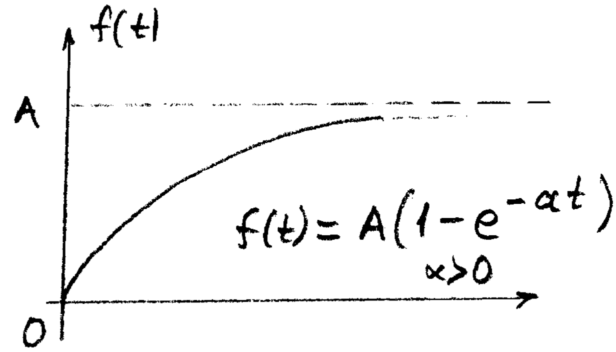
Παρατηρείστε ότι σαν ανεξάρτητη μεταβλητή χρησιμο-ποιείται ο χρόνος t ο οποίος κυμαίνεται στο διάστημα

$$t \in [0, \infty)$$

Ειδικά για την εκθετική συνάρτηση έχουμε τα ακόλουθα δύο είδη:



φθίνουσα τείνει στο 0

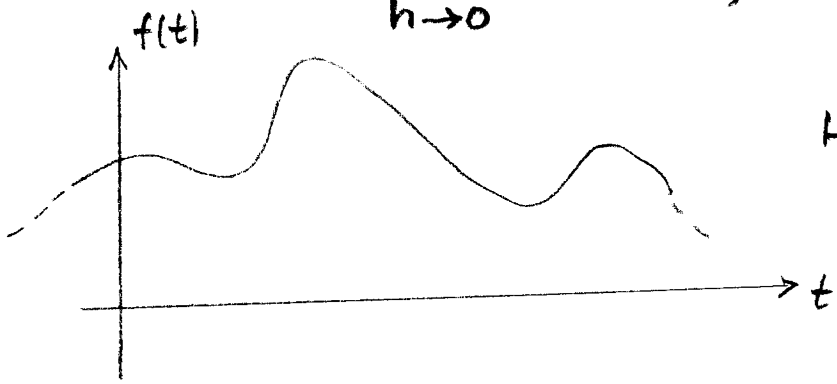


αύξουσα τείνει ασυμπτωτικά στο A

Συνεχείς συναρτήσεις

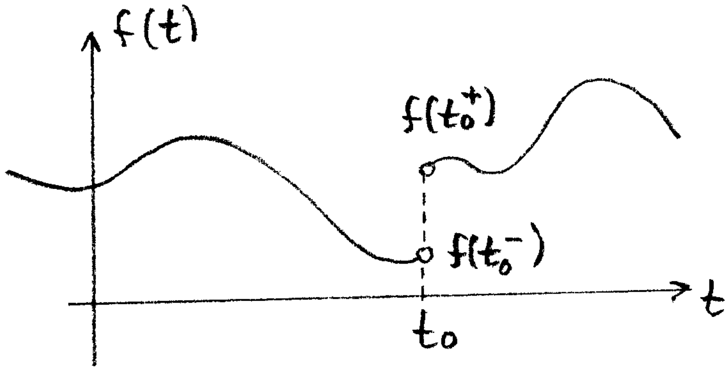
ορισμός $f(t)$ συνεχής στο t_0 όταν

$$\lim_{h \to 0} f(t_0 + h) = f(t_0)$$



Η συνεχής συνάρτηση έχει γραφική παράσταση μια "συνεχή" γραμμή

Ασυνεχείς συναρτήσεις



Εδώ $f(t_0^+) \neq f(t_0^-)$

Δεν υπάρχει η τιμή $f(t_0)$

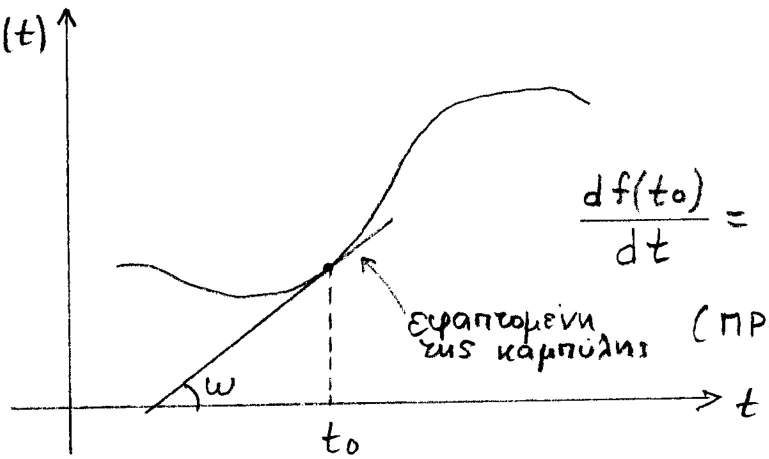
(υπενθυμίζεται

t_0^+ απείρως κοντά στο t_0 αλλά $t_0^+ > t_0$

t_0^- απείρως κοντά στο t_0 αλλά $t_0^- < t_0$)

2) Παράγωγος συναρτήσεως

Ορισμός $$\left.\frac{df(t)}{dt}\right|_{t=t_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} = f'(t_0)$$



$$\frac{df(t_0)}{dt} = f'(t_0) = \tan\omega$$

(ΠΡΟΣΟΧΗ! ορθοκανονικό σύστημα)

Ιδιότητες παραγώγων

$$\left.\begin{aligned} (\alpha f(t))' &= \alpha f'(t) \qquad \alpha\in\mathbb{R} \\ (f_1(t)+f_2(t))' &= f_1'(t)+f_2'(t) \end{aligned}\right\} \text{Γραμμικότητα}$$

Βασικές παράγωγοι

$$(t^n)' = n t^{n-1}$$

$$(A_m \sin(\omega t+\varphi))' = \omega A_m \cos(\omega t+\varphi)$$

$$(A_m \cos(\omega t+\varphi))' = -\omega A_m \sin(\omega t+\varphi)$$

$$(Ae^{-\alpha t})' = -\alpha A e^{-\alpha t}$$

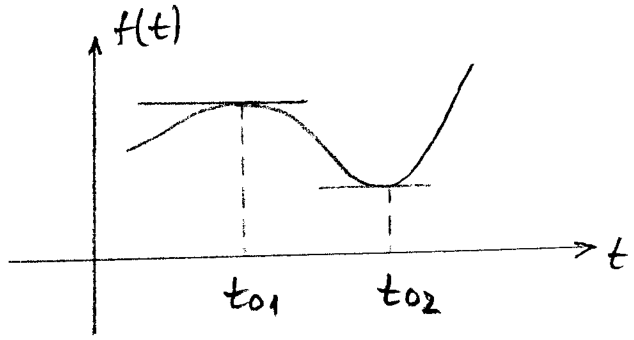
n-οστή παράγωγος

2η $f''(t) = (f'(t))'$ 3η $f'''(t) = (f''(t))'$

n-οστή $f^{(n)}(t) = (f^{(n-1)}(t))'$

Σχέση παραγώγου με ακρότατα

- Αν $f'(t_0)=0$ στο t_0 υπάρχει τοπικό ακρότατο



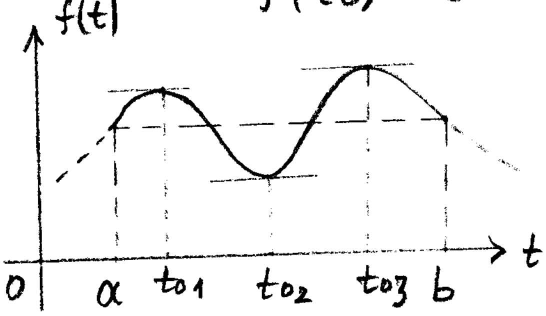
αν $f''(t_0)<0$ τοπικό max

$f''(t_0)>0$ τοπικό min

Θεώρημα Rolle

Εστω $f(t) \in [\alpha, b]$ αν $f(\alpha)=f(b)$ τότε υπάρχει <u>τουλάχιστον</u> ενα $t_0 \in (\alpha, b)$ τετοιο ωστε

$$f'(t_0)=0$$

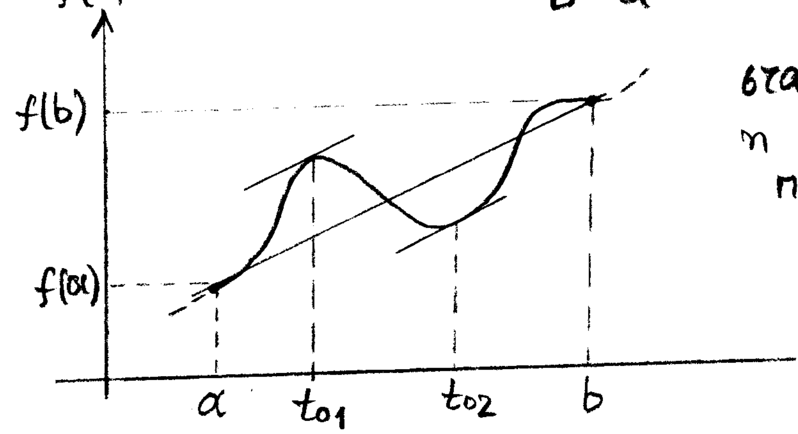


(εδω υπαρχουν 3 τετοια σημεια...)

Θεωρημα Μεσης Τιμης του Διαφορικου Λογισμου

Εστω $f(t) \in [\alpha, b]$. Υπαρχει <u>τουλάχιστον</u> ενα $t_0 \in (\alpha, b)$ τέτοιο ώστε

$$f'(t_0)=\frac{f(b)-f(\alpha)}{b-\alpha}$$



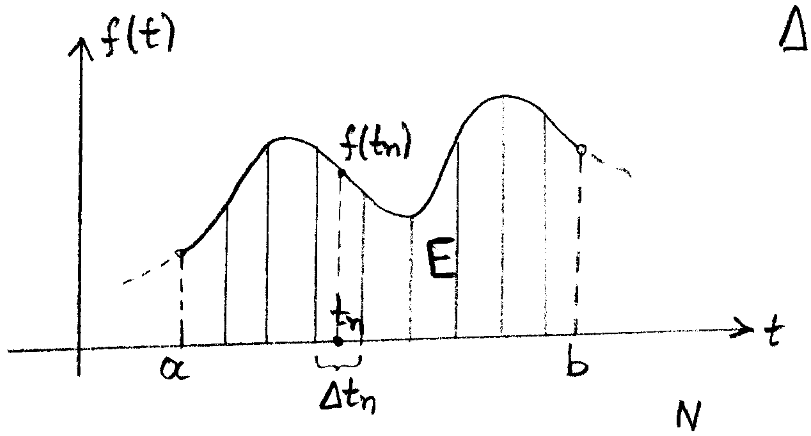
στα t_{01} και t_{02} η εφαπτομενη ειναι παραλληλη στην ευθεια που ενωνει τα σημεια $(\alpha, f(\alpha))$ και $(b, f(b))$

3) Ολοκλήρωμα συναρτήσεως

- Αόριστο ολοκλήρωμα (παράγουσα)

$$\int f(t)\,dt = F(t) \Rightarrow F'(t) = f(t)$$

- Ορισμένο ολοκλήρωμα



Διαμέριση του διαστήματος $[\alpha, b]$ σε N τμήματα Δt_n (ίσα μεταξύ τους)

το t_n στο μέσον του αντίστοιχου Δt_n

$$\int_{\alpha}^{b} f(t)\,dt = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f(t_n)\,\Delta t_n = E \quad (\text{Εμβαδόν})$$

Αποδεικνύεται ότι

$$\int_{\alpha}^{b} f(t)\,dt = F(b) - F(\alpha) \quad \text{όπου} \quad F'(t) = f(t)$$

Ιδιότητες αορίστου ολοκληρώματος

$$\left.\begin{aligned} \int \alpha f(t)\,dt &= \alpha \int f(t)\,dt \qquad \alpha \in \mathbb{R} \\ \int (f_1(t) + f_2(t))\,dt &= \int f_1(t)\,dt + \int f_2(t)\,dt \end{aligned}\right\} \text{Γραμμικότητα}$$

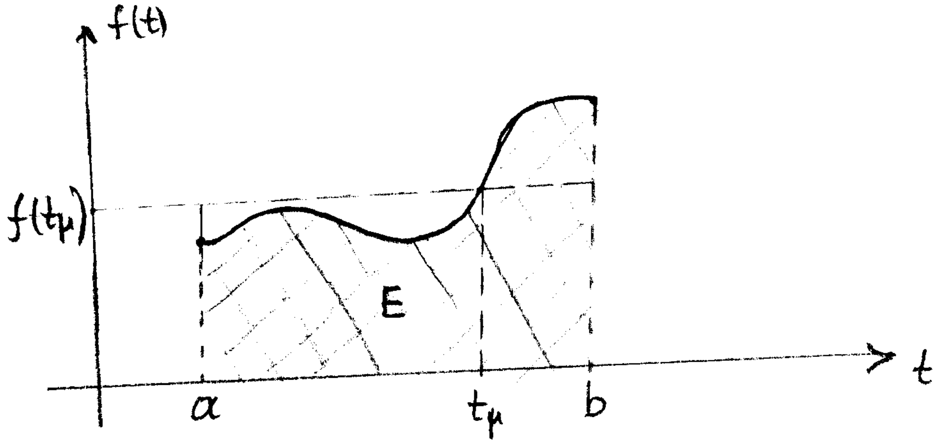
Θεώρημα Μέσης Τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού

Εστω $f(t) \in [\alpha, b]$ και υπάρχει το $\int_{\alpha}^{b} f(t)\,dt$

Τοτε υπάρχει ενα σημείο $t_\mu \in [\alpha, b]$ τέτοιο ωστε

$$\int_{\alpha}^{b} f(t)\,dt = f(t_\mu)(b-\alpha)$$

η τιμη $f(t_\mu)$ λέγεται <u>μέση τιμη</u> της $f(t)$ στο $[\alpha, b]$



Το ορθογώνιο με πλευρες $(b-\alpha)$ και $f(t_\mu)$ έχει εμβαδον Ε

Βασικά Αόριστα Ολοκληρώματα

$$\int t^n \, dt = \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

$$\int A_m \sin(\omega t + \varphi)\, dt = -\frac{A_m}{\omega} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\int A_m \cos(\omega t + \varphi)\, dt = \frac{A_m}{\omega} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\int A e^{-\alpha t}\, dt = -\frac{A}{\alpha} e^{-\alpha t}$$

Πινακες – Οριζουσες – Γραμμικα Συστηματα

Ονομάζουμε πινακα $\hat{A}$ την διπλη ακολουθια αριθμων

$$\hat{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}}_{n\text{-στηλες}} \left.\vphantom{\begin{bmatrix} a \\ a \\ a \\ a \end{bmatrix}}\right\} m\text{-γραμμες}$$

Διάσταση πινακα $\hat{A}$ $(m \times n)$ (γραμμές $\times$ στηλες)

Αν $m = n$ ο πινακας λέγεται <u>τετραγωνικός</u>

Πραξεις πινάκων

1) <u>Προσθεση</u> $\hat{A} \pm \hat{B}$

πρεπει οι πινακες $\hat{A}$ και $\hat{B}$ να εχουν τις ιδιες διαστάσεις π.χ $(m \times n)$

τότε

$$\hat{A} \pm \hat{B} = \hat{C}$$

οπου $C_{11} = \alpha_{11} \pm b_{11}$, $C_{12} = \alpha_{12} \pm b_{12}$, κ.λ.π

2) Πολλαπλασιασμός $\hat{A}\cdot\hat{B}$

έστω $\hat{A}$ με διάσταση $(m\times n)$

πρέπει ο $\hat{B}$ να έχει τόσες γραμμές όσες είναι οι στήλες του $\hat{A}$

δηλ. $\hat{B}$ με διάσταση $(n\times k)$

Το γινόμενο $\hat{C}=\hat{A}\cdot\hat{B}$ έχει διάσταση

$$\hat{C} \quad (m\times n)\cdot(n\times k) \rightarrow (m\times k)$$

Π.χ.

$$\underset{(4\times3)}{\hat{A}} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} \end{bmatrix} \qquad \underset{(3\times4)}{\hat{B}} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{bmatrix}$$

ο $$\underset{(4\times4)}{\hat{C}} = \hat{A}\cdot\hat{B} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix}$$

όπου $c_{11} = \alpha_{11}b_{11} + \alpha_{12}b_{21} + \alpha_{13}b_{31}$ (εσωτ. γινόμενο 1ης γραμμής του $\hat{A}$ επί 1ης στήλης του $\hat{B}$)

$c_{12} = \alpha_{11}b_{12} + \alpha_{12}b_{22} + \alpha_{13}b_{32}$ (" 1ης γραμμής " " 2ης στήλης ")

$\vdots$

$c_{44} = \alpha_{41}b_{14} + \alpha_{42}b_{24} + \alpha_{43}b_{34}$ (" 4ης γραμμής " 4ης στήλης)

Ορίζουσες $|\hat{A}|$

Θεωρούμε μόνο τετραγωνικούς πίνακες $\hat{A}$ $(n \times n)$

Ορίζουσα $|\hat{A}|$ (2×2)

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$$

ορίζουσα $|\hat{A}|$ (3×3)

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{12}\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{13}\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix}$$

διαγράφω την γραμμή και την στήλη του α_{11} και μένει πίνακας (2×2)

ομοια με γραμμή και στήλη του α_{12}

ομοια

Με ομοιο τροπο υπολογίζονται οι ορίζουσες (4×4), ... $(n\times n)$

Μια ορίζουσα π.χ (4×4) αναπτύσσεται σε 4 ορίζουσες (3×3), η καθε μια (3×3) σε 3 ορίζουσες (2×2) κ.λ.π.

Γενικα μια ορίζουσα $(n\times n)$ αναπτύσσεται σε $\frac{n!}{2}$ ορίζουσες (2×2)

Γραμμικά συστήματα

Γενική μορφή

$$
\begin{aligned}
\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n &= b_1 \\
\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
\alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

Γραμμικό σύστημα $(n \times n)$

ή σε μορφή πινάκων

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ \alpha_{n1} & \dots & & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

(πίνακας συντελεστών των αγνώστων)

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

(πίνακας αγνώστων)

$$\hat{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

(πίνακας β' μέλους)

το σύστημα γράφεται: $\hat{A} \cdot \hat{x} = \hat{b}$

Επίλυση συστήματος (μέθοδος Cramer)

$$x_1 = \frac{|\hat{A}_1|}{|\hat{A}|}, \quad x_2 = \frac{|\hat{A}_2|}{|\hat{A}|}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{|\hat{A}_n|}{|\hat{A}|}$$

όπου

$$|\hat{A}| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{n1} & \cdots & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{(ορίζουσα του } \hat{A}\text{)}$$

$$|\hat{A}_1| = \begin{vmatrix} b_1 & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ b_2 & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_n & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}, \quad |\bar{A}_2| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & b_1 & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & b_2 & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{n1} & b_n & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

στήλη συντελεστών x_1

στήλη συντελεστών x_2

ομοίως ...

$$|\bar{A}_n| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & b_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & & b_n \end{vmatrix}$$

στήλη συντελεστών του x_n

(Σημειώνεται ότι για μεγάλες διαστάσεις ($n \times n$) η μέθοδος Cramer δεν χρησιμοποιείται λόγω τεράστιου όγκου πράξεων)

Το σύστημα SI

Βασικές μονάδες

Μήκος : m
Μάζα : kgr
χρόνος : sec
Ενταση ηλ. ρεύματος : Ampere
Θερμοκρασία : Kelvin
Ποσοτητα ύλης : mol
φωτεινη ενταση : cd

Συμπληρωματικές μονάδες

γωνία : rad
στερεά γωνια : sterad

Πολλαπλάσια μονάδων

T (Tera) $\times 10^{12}$
G (Giga) $\times 10^{9}$
M (Mega) $\times 10^{6}$
K (kilo) $\times 10^{3}$

Υποπολλαπλάσια μονάδων

P (pico) $\times 10^{-12}$
n (nano) $\times 10^{-9}$
micro (μ) $\times 10^{-6}$
mili (m) $\times 10^{-3}$