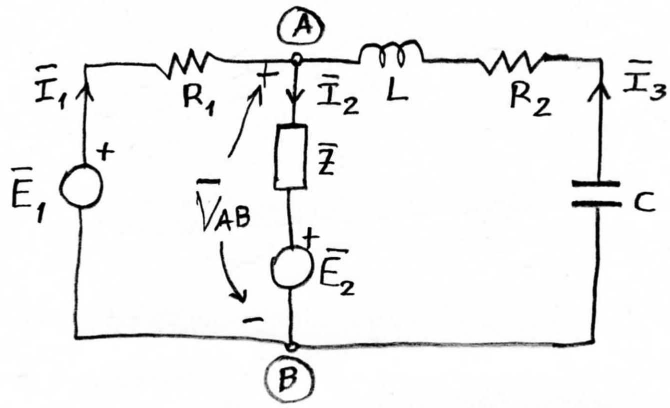
ΑΣΚΗΣΗ 1



Δίδονται:

$\bar{E}_1 = 200\angle 45^\circ$ V , $\bar{E}_2 = 100\angle 60^\circ$ V

$R_1 = 50\,\Omega$, $R_2 = 20\,\Omega$

$L = 1\,H$, $C = 4000\,\mu F$

$\bar{Z} = 40 + j\,20\,\Omega$

$\omega = 10$ r/sec

Ζητούνται:

1) Η τάση $\bar{V}_{AB}$
2) Τα ρεύματα $\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$, $\bar{I}_3$
3) Το ισοζύγιο ισχύος για την ενεργό ισχύ $P_{εν}$

Λύση:

1) Υπολογίζουμε την τάση $\bar{V}_{AB}$ με εφαρμογή του θεωρ Millman

$$\bar{V}_{AB} = \frac{\dfrac{\bar{E}_1}{R_1} + \dfrac{\bar{E}_2}{\bar{Z}}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{\bar{Z}} + \dfrac{1}{R_2 + j\omega L - \dfrac{j}{\omega C}}}$$

αντικαθιστώ τιμές:

$$\bar{V}_{AB} = \frac{\dfrac{200\angle 45^\circ}{50} + \dfrac{100\angle 60^\circ}{40+j20}}{\dfrac{1}{50} + \dfrac{1}{40+j20} + \dfrac{1}{20+j10\cdot 1 - \dfrac{j}{10\cdot 4000\times 10^{-6}}}} = \frac{6{,}2069\angle 40.85^\circ}{0{,}0733\angle 11^\circ}$$

άρα $\bar{V}_{AB} = 84.678\angle 29.85^\circ$ Volts

2) Υπολογίζουμε τα ρεύματα $\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$, $\bar{I}_3$

$$\bar{V}_{AB} = -\bar{I}_1 R_1 + \bar{E}_1 \Rightarrow \bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1 - \bar{V}_{AB}}{R_1} = \frac{200\angle 45^\circ - 84.678\angle 29.85^\circ}{50}$$

$$\bar{V}_{AB} = \bar{I}_2 \bar{Z} + \bar{E}_2 \Rightarrow \bar{I}_2 = \frac{\bar{V}_{AB} - \bar{E}_2}{\bar{Z}} = \frac{84.678\angle 29.85^\circ - 100\angle 60^\circ}{40 + j20}$$

$$\bar{V}_{AB} = -\bar{I}_3\left(j\omega L + R_2 - \frac{j}{\omega C}\right) \Rightarrow \bar{I}_3 = \frac{\bar{V}_{AB}}{-\left(j\omega L + R_2 - \dfrac{j}{\omega C}\right)} = \frac{84.678\angle 29.85^\circ}{-(j10+20-j25)}$$

Προκύπτουν οι τιμές

$$\bar{I}_1 = 2.4063 \angle 55.6^\circ \ A$$

$$\bar{I}_2 = 1.1238 \angle -88.8^\circ \ A$$

$$\bar{I}_3 = 3.3871 \angle -113.3 \ A$$

(Επαλήθευση: N.P.K στόν κόμβο A

πρέπει $\bar{I}_1 - \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0$

προκύπτει $\bar{I}_1 - \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = -0.0038 - j\,0.0018 \approx 0 + j0$)

3) Ισοζύγιο ισχύος για την $P_{εν}$

ισχύς πηγής $\bar{E}_1$

$\bar{S}_{E_1} = -\frac{1}{2}\bar{E}_1 \bar{I}_1^*$ (διότι φ.α. $\bar{E}_1$, $\bar{I}_1$ μη συσχετισμένες)

άρα $\bar{S}_{E_1} = \underbrace{-236,523}_{P_{εν}} + j\underbrace{44,264}_{P_α}$ άρα $P_{εν,E_1} = Re\{\bar{S}_{E_1}\}$

$\Rightarrow P_{εν,E_1} = 236,523$ W παράγει

ισχύς πηγής $\bar{E}_2$

$\bar{S}_{E_2} = \frac{1}{2}\bar{E}_2 \cdot \bar{I}_2^*$ (διότι φ.α $\bar{E}_2$, $\bar{I}_2$ συσχετισμένες)

άρα $\bar{S}_{E_2} = \underbrace{-48,063}_{P_{εν}} + j\underbrace{29,108}_{P_α}$ άρα $P_{εν,E_2} = Re\{\bar{S}_{E_2}\}$

$\Rightarrow P_{εν,E_2} = 48,063$ W παράγει

Συνολική παραγόμενη ενεργός ισχύς

$$P_{εν,παραγ} = P_{εν,E_1} + P_{εν,E_2} = 284.586 \ W$$

Ενεργο ισχύ απορροφούν οι R_1, R_2, και $\bar{Z}$
(οχι τά L, C)

$$P_{εν, R_1} = \frac{1}{2} R_1 |\bar{I}_1|^2 = 144,757 \text{ W}$$

$$P_{εν, R_2} = \frac{1}{2} R_2 |\bar{I}_3|^2 = 114,724 \text{ W}$$

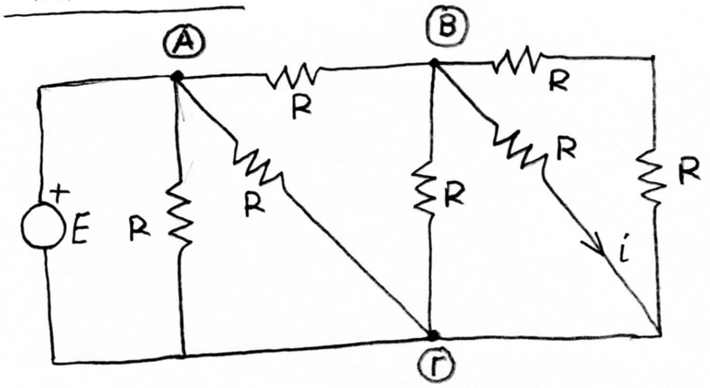
$$P_{εν, Z} = \frac{1}{2} Re\{\bar{Z}\} \cdot |\bar{I}_2|^2 = 25,258 \text{ W}$$

Συνολική απορροφούμενη ενεργός ισχύς

$$P_{εν, απορρ.} = P_{εν, R_1} + P_{εν, R_2} + P_{εν, Z} = 284.74 \text{ W}$$

$P_{εν, απορρ} \approx P_{εν, παραγ}$ με σφάλμα $< 0.05\%$

ΑΣΚΗΣΗ 2



Διδονται:

$E = 10\,V$

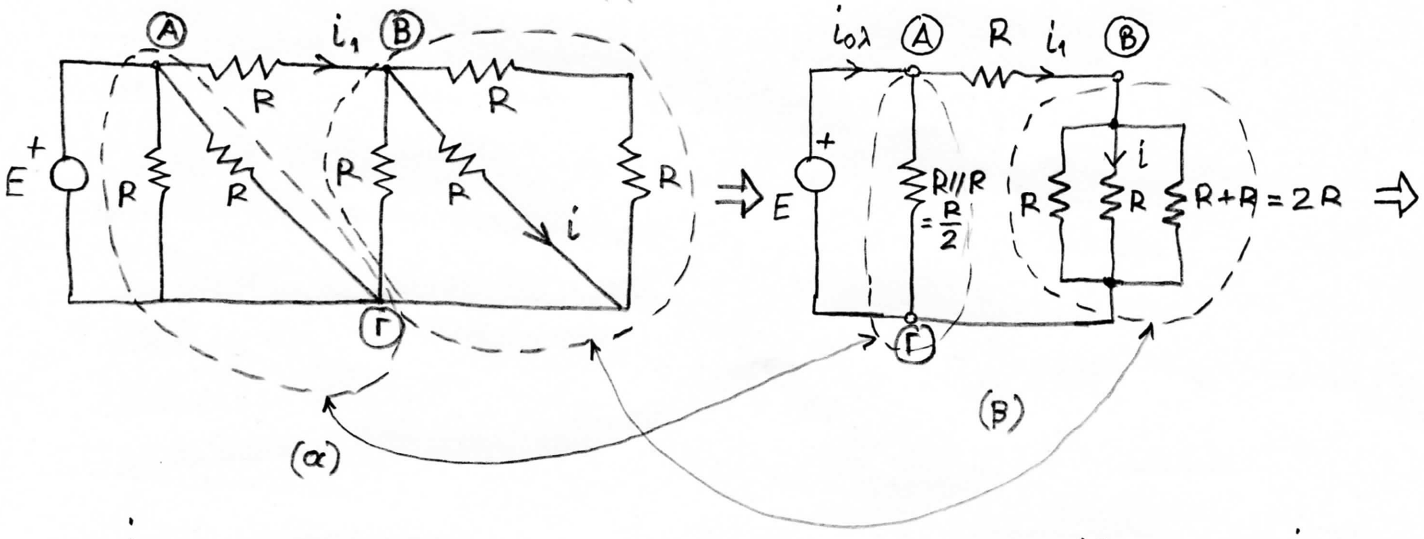
$R = 2\,\Omega$

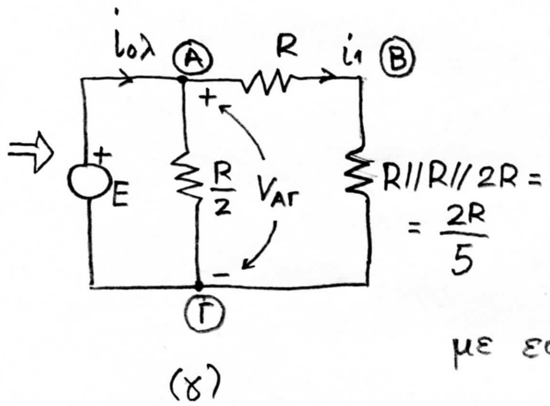
Ζητούνται:

1) Το ρεύμα i
2) Η ισχύς που παράγει η πηγή E

Λύση

Εφαρμόζουμε "συνθέσεις" αντιστάσεων





Το ρεύμα i_1 υπολογίζεται αμέσως

$$i_1 = \frac{V_{A\Gamma}}{R+\frac{2R}{5}} = \frac{E}{\frac{7R}{5}} = \frac{5E}{7R} = 3.5714\ A$$

απο το σχ. (β) βρίσκω το ζητούμενο i με εφαρμογή διαιρέτη ρεύματος

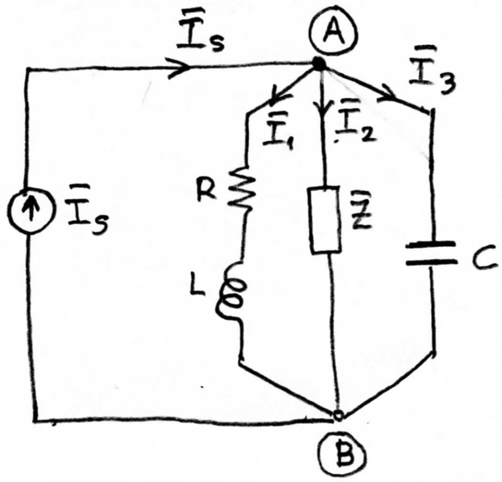
$$i = i_1 \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R}+\frac{1}{R}+\frac{1}{2R}} = i_1 \cdot \frac{2}{5} \Rightarrow \underline{i = 1.4285\ A}$$

Το ρεύμα $i_{o\lambda}$ θα είναι:

$$i_{o\lambda} = \frac{E}{\frac{R}{2} // \left(R+\frac{2R}{5}\right)} = \frac{E}{\frac{7R}{19}} = 13,5714\ A$$

άρα $\underline{P_E = E \cdot i_{o\lambda} = 135,71\ W}$ (παράγει προφανώς)

ΑΣΚΗΣΗ 3



Δίδονται:

$\bar{I}_s = 10\angle 60^\circ$ A

$R = 40\Omega$, $L = 0.5H$, $C = 250\ \mu F$

$\bar{Z} = 25 - j32\,\Omega$

$\omega = 100\ r/s$

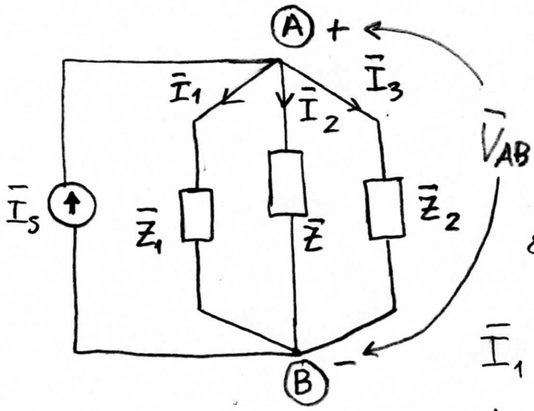
Ζητούνται:

1) Τα ρεύματα $\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$, $\bar{I}_3$

2) Η ισχύς της πηγής $\bar{I}_s$ (ενεργός , άεργος)

Λύση:

Ξανασχεδιάζω το κύκλωμα



όπου $\bar{Z}_1 = R + j\omega L = 40 + j\,100 \cdot 0,5 = 40 + j50\,\Omega$

$\bar{Z}_2 = -j\dfrac{1}{\omega C} = -j\dfrac{1}{100 \times 250 \times 10^{-6}} = -j40\,\Omega$

εφαρμόζω διαιρέτη ρεύματος

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_s \cdot \frac{\frac{1}{\bar{Z}_1}}{\frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}} + \frac{1}{\bar{Z}_2}} = 10\angle 60^\circ \frac{\frac{1}{40+j50}}{\frac{1}{40+j50} + \frac{1}{25-j32} + \frac{1}{-j40}}$$

άρα $\bar{I}_1 = 10\angle 60^\circ \cdot \dfrac{\frac{2}{205} - j\frac{1}{82}}{0.0249 + j\,0.0322} \Rightarrow \underline{\bar{I}_1 = 2.7773 - j\,2.6471\ A} = \underline{3.8368\angle -43.6^\circ\ A}$

όμοια $\bar{I}_2 = \bar{I}_s \dfrac{\frac{1}{\bar{Z}}}{\frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}} + \frac{1}{\bar{Z}_2}} \Rightarrow \underline{\bar{I}_2 = 3.0509 + j\,5.2243\ A} = \underline{6,0499\angle 59.7^\circ\ A}$

και $\bar{I}_3 = \bar{I}_s \dfrac{\frac{1}{\bar{Z}_2}}{\frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}} + \frac{1}{\bar{Z}_2}} \Rightarrow \underline{\bar{I}_3 = -0.8244 + j\,6.0862 A} = \underline{6,1418\angle 97.7^\circ\ A}$

(Επαλήθευση: θα πρέπει $\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = \bar{I}_s$

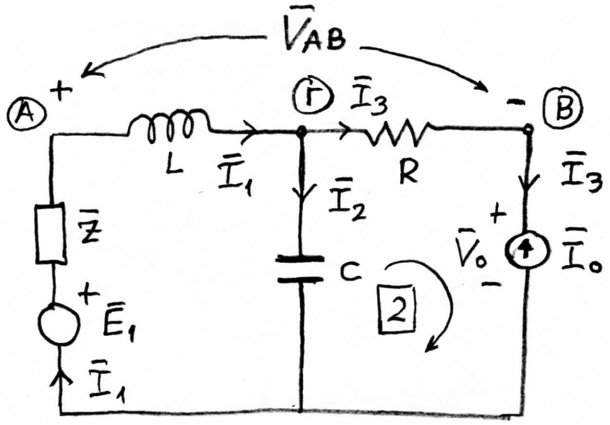
έχουμε $\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 10,007\angle 59.97^\circ \approx \bar{I}_s$ (επαληθεύεται))

Η τάση $\bar{V}_{AB} = \bar{I}_1 \bar{Z}_1 = 3,8368\angle -43.6^\circ \cdot (40 + j50) = 245,675\angle 7,7^\circ$ V

άρα $\bar{S}_{I_s} = -\dfrac{1}{2}\bar{V}_{AB}\bar{I}_s^{*} = -751,18 + j\,971,91 \Rightarrow P_{\varepsilon\nu, I_s} = 751,18\,W$ παράγει $\quad P_{\alpha, I_s} = 971,91\,VAR$

(φ.α. μη συσχετισμένες)

ΑΣΚΗΣΗ 4



Διδονται:

$\bar{E}_1 = 150\angle 60^\circ$ V

$\bar{I}_o = 1.2\angle -35^\circ$ A

$\bar{Z} = 140 + j85\ \Omega$

$R = 250\ \Omega$, $L = 4\ H$, $C = 125\ \mu F$

$\omega = 50$ r/s

και επισης $\bar{V}_{AB} = -342.43 + j523,1$ V

Ζητουνται:

1) Τα ρεύματα $\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$, $\bar{I}_3$

2) Η τάση $\bar{V}_o$

3) Η ενεργός ισχύς των πηγών $\bar{E}_1$ και $\bar{I}_o$

Λύση

1) Προφανως $\bar{I}_3 = -\bar{I}_o = 1.2\angle -35^\circ + 180^\circ = \underline{1.2\angle 145^\circ}$ A

επισης θα ισχύει:

$$\bar{V}_{AB} = j\omega L\,\bar{I}_1 + \bar{I}_3 \cdot R \Rightarrow \bar{I}_1 = \frac{\bar{V}_{AB} - \bar{I}_3 \cdot R}{j\omega L}$$

αρα
$$\bar{I}_1 = \frac{(-342.43 + j523.1) - 1.2\angle 145^\circ \cdot 250}{j \cdot 50 \cdot 4} = 1.7551 + j0.4834 \text{ A}$$

ή $\underline{I_1 = 1.8204\angle 15.4^\circ \text{ A}}$

απο Ν.Ρ.Κ στον κόμβο Γ

$$\bar{I}_1 - \bar{I}_2 - \bar{I}_3 = 0 \Rightarrow \bar{I}_2 = \bar{I}_1 - \bar{I}_3 \Rightarrow \underline{\bar{I}_2 = 2.7457\angle -4.3^\circ} \text{ A}$$

2) Υπολογίζω την τάση $\bar{V}_o$

απο Ν.Τ.Κ. στον βρόχο $\boxed{2}$

$$-\bar{I}_2 \cdot \frac{1}{j\omega C} + \bar{I}_3 \cdot R + \bar{V}_o = 0 \Rightarrow \bar{V}_o = \frac{\bar{I}_2}{j\omega C} - \bar{I}_3 \cdot R$$

άρα
$$\bar{V}_o = \frac{2.7457\angle -4.3^\circ}{j \cdot 50 \cdot 125 \cdot 10^{-6}} - 1,2\angle 145^\circ \cdot 250 \Rightarrow \underline{\bar{V}_o = 646.19\angle -70.8 \text{ V}}$$

3) Ισχύες των πηγών

Μιγαδική ισχύς της $\bar{E}_1$

$$\bar{S}_{E_1} = -\frac{1}{2}\bar{E}_1 \bar{I}_1^{*}$$ (διότι φ.α. μη συσχετισμένες)

άρα

$$\bar{S}_{E_1} = -\frac{1}{2} \cdot 150\angle 60^\circ \cdot 1{,}8204\angle -15{,}4^\circ$$

$$\Rightarrow \bar{S}_{E_1} = -97.21 - j\,95.86$$

$P_{εν,E_1} = 97{,}21\ W$ παραγόμενη

Μιγαδική ισχύς της $\bar{I}_o$

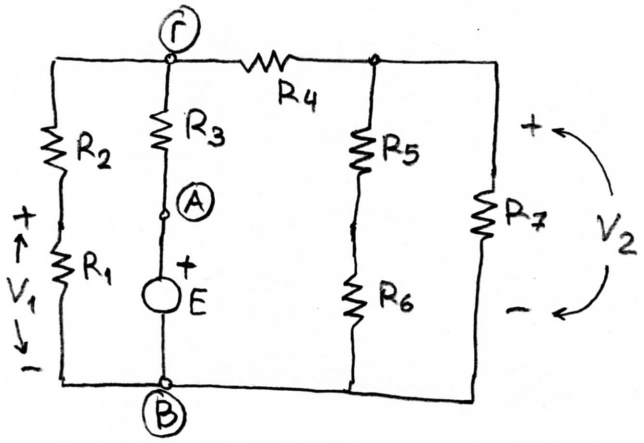
$$\bar{S}_{I_o} = -\frac{1}{2}\bar{V}_o \cdot \bar{I}_o^{*}$$ (διότι φ.α. μη συσχετισμένες)

άρα

$$\bar{S}_{I_o} = -\frac{1}{2} \cdot 646{,}19\angle -70{,}8^\circ \cdot 1{,}2\angle 35^\circ = -314.46 + j\,226{,}79$$

$P_{εν,I_o} = 314.46\ W$ παραγόμενη

ΑΣΚΗΣΗ 5



Δίδεται τό δίκτυο:

Τιμές στοιχείων

$R_1 = 12\,\Omega$, $R_2 = 5\,\Omega$, $R_3 = 2\,\Omega$

$R_4 = 4\,\Omega$, $R_5 = 8\,\Omega$, $R_6 = 6\,\Omega$

$R_7 = 20\,\Omega$, $E = 12\,V$

Ζητούνται:

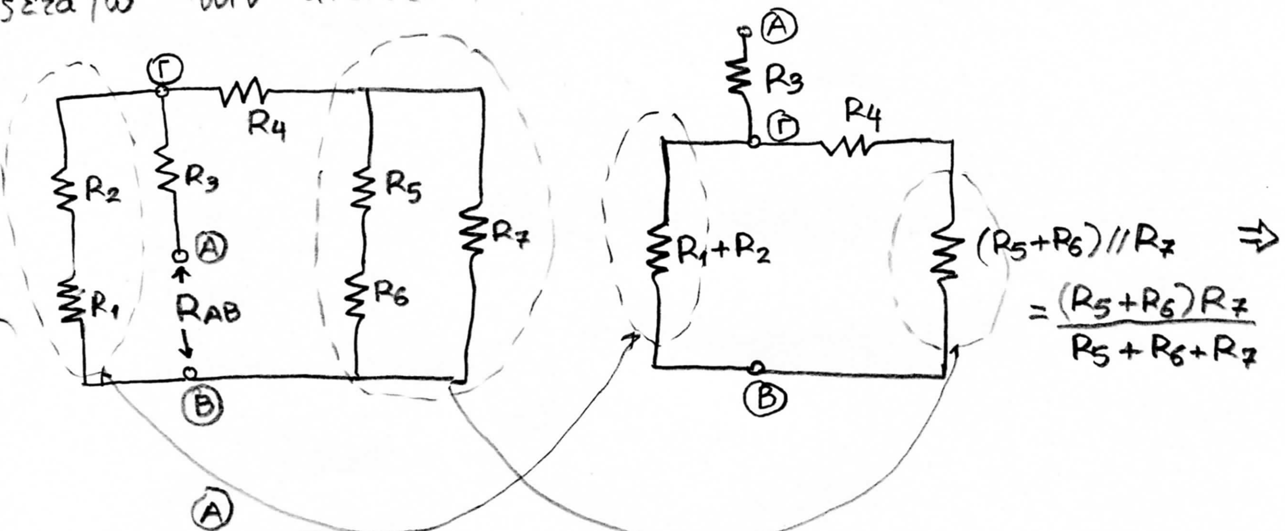
1) Η ισοδύναμη αντίσταση R_{AB} πού είναι συνδεδεμένη στα άκρα της πηγής E

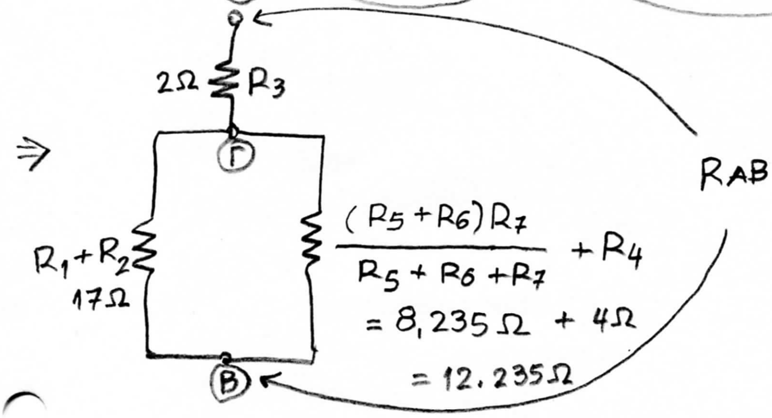
2) Οι τάσεις V_1 και V_2

3) Η ισχύς της πηγής E

Λύση

1) Εξετάζω την αντίσταση πού "φαίνεται" από τα άκρα Ⓐ-Ⓑ



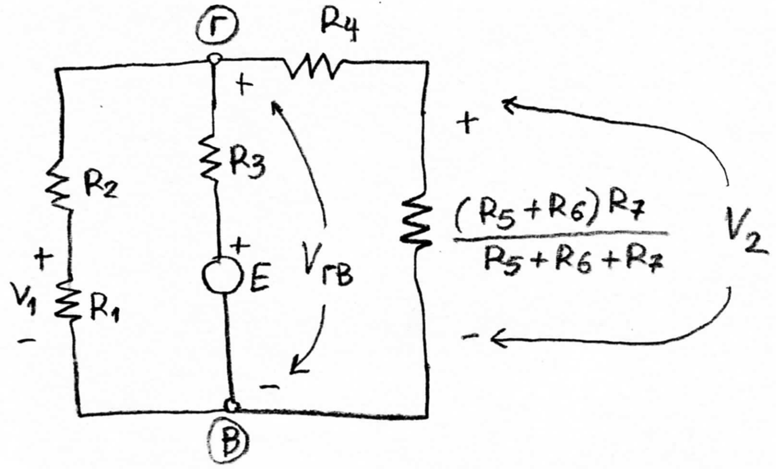


ἄρα

$$R_{AB} = \frac{12{,}235 \cdot 17}{12{,}235 + 17} + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_{AB} = 9{,}1146\,\Omega$$

2) Υπολογίζω την τάση $V_{ΓB}$



Θεωρ. Millman

$$V_{ΓB} = \frac{\frac{E}{R_3}}{\frac{1}{R_1+R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4+\frac{(R_5+R_6)R_7}{R_5+R_6+R_7}}} = \frac{\frac{12}{2}}{\frac{1}{17}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4+8.235}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow V_{ΓB} = 9.3668\ V$

άρα $V_1 = V_{ΓB}\dfrac{R_1}{R_1+R_2} = 9.3668\cdot\dfrac{12}{12+5} \Rightarrow V_1 = 6.6119\ V$

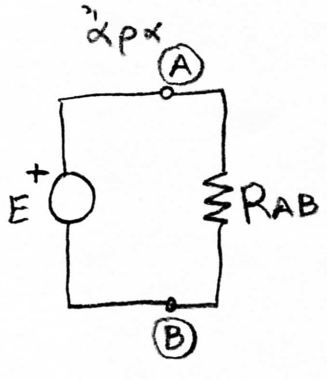
(διαιρέτης τάσης)

και $V_2 = V_{ΓB}\dfrac{\frac{(R_5+R_6)R_7}{R_5+R_6+R_7}}{R_4+\frac{(R_5+R_6)R_7}{R_5+R_6+R_7}} = 9.3668\cdot\dfrac{8.235}{4+8,235} \Rightarrow$

$\Rightarrow V_2 = 6.3045\ V$

3) Βρήκαμε ότι $R_{AB} = 9.1146\,\Omega$

άρα



$P_E = \dfrac{E^2}{R_{AB}} = 15,798\ W$ παραγόμενη