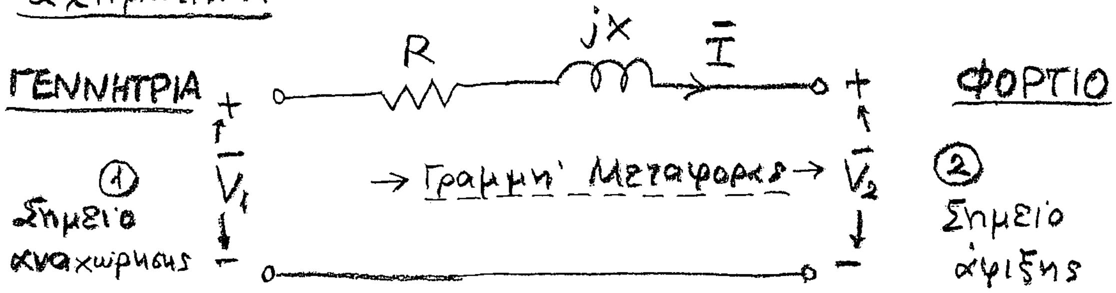
5) Μεταφορά ισχύος μέσω γραμμής (Γραμμή Μεταφοράς)

Τι είναι η γραμμή μεταφοράς;

Απ/ Στην πιο απλή περίπτωση είναι ένα ζευγάρι αγωγών (καλώδια) με το οποίο μεταφέρεται η ηλεκτρική ισχύς σε μια απόσταση.
Η απόσταση αυτή μπορεί να είναι από λίγα μέτρα, μέχρι εκατοντάδες χιλιόμετρα.

Σχηματικά:



$\bar{V}_1$: τάση αναχώρησης, $\bar{V}_2$: τάση άφιξης

$\bar{I}$: ρεύμα γραμμής

R : αντίσταση γραμμής (κατανεμημένη) (Ω/m)

jX : αυτεπαγωγή γραμμής (κατανεμημένη) (H/m)

(Σημειώνεται ότι η γραμμή έχει και κατανεμημένη χωρητικότητα η οποία στην παρούσα ανάλυση δεν θα ληφθεί υπ' όψη)

Έστω: P_1 η ενεργός ισχύς στο σημείο ①
(ισχύς που αναχωρεί)

P_2 η ενεργός ισχύς στο σημείο ②
(ισχύς που φθάνει στους καταναλωτές (φορτία)

Ένα ερώτημα που τίθεται είναι:

Αν θεωρήσουμε δεδομένες τις τάσεις $\bar{V}_1, \bar{V}_2$, πότε η ισχύς P_2 μεγιστοποιείται;

Έστω: $\bar{V}_1 = V_{1m} e^{j\delta}$ και $\bar{V}_2 = V_{2m} e^{j0}$

όπου $\delta \geq 0$ ή και $\delta \leq 0$, προφανώς δ είναι η διαφορά φάσεως μεταξύ $\bar{V}_1, \bar{V}_2$

η ενεργός ισχύς: $P_2 = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\{\bar{V}_2 \bar{I}^*\}$

όπου $-\bar{V}_1 + \bar{I}\bar{Z} + \bar{V}_2 = 0 \Rightarrow \bar{I} = \dfrac{\bar{V}_1 - \bar{V}_2}{\bar{Z}}$

με $\bar{Z} = R + jX = |\bar{Z}| e^{j\varphi_Z}$ $(\varphi_Z > 0)$ (γιατί;)

άρα
$$P_2 = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left\{\bar{V}_2 \left(\frac{\bar{V}_1 - \bar{V}_2}{\bar{Z}}\right)^*\right\}$$

$$= \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left\{\bar{V}_2 \left(\frac{\bar{V}_1^* - \bar{V}_2^*}{\bar{Z}^*}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left\{\frac{\bar{V}_2 \bar{V}_1^* - |\bar{V}_2|^2}{|\bar{Z}| e^{-j\varphi_Z}}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left\{\frac{V_{2m} V_{1m} e^{-j\delta} - V_{2m}^2}{|\bar{Z}| e^{-j\varphi_Z}}\right\}$$

$$= \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left\{\frac{V_{1m} V_{2m}}{|\bar{Z}|} e^{j(-\delta + \varphi_Z)} - \frac{V_{2m}^2}{|\bar{Z}|} e^{j\varphi_Z}\right\}$$

δηλαδή

$$P_2 = \frac{1}{2} Re\left\{ \frac{V_{1m}V_{2m}}{|\bar{Z}|} e^{j(-\delta+\varphi_Z)} \right\} - \frac{1}{2} Re\left\{ \frac{V_{2m}^2}{|\bar{Z}|} e^{j\varphi_Z} \right\}$$

άρα: $$P_2 = \frac{1}{2} \frac{V_{1m}V_{2m}}{|\bar{Z}|} \cos(-\delta+\varphi_Z) - \frac{1}{2} \frac{V_{2m}^2}{|\bar{Z}|} \cos\varphi_Z$$

αλλά $$\cos\varphi_Z = \frac{R}{|\bar{Z}|}$$ (γιατί;)

άρα: $$\boxed{P_2 = \frac{1}{2} \frac{V_{1m}V_{2m}}{|\bar{Z}|} \cos(-\delta+\varphi_Z) - \frac{1}{2} \frac{V_{2m}^2}{|\bar{Z}|^2} R}$$

- όπως προαναφέρθηκε θεωρούμε δεδομένα (σταθερά) τα V_{1m}, V_{2m} (π.χ δίκτυα Δ.Ε.Η.) καθώς και το $\bar{Z}$

Για να έχουμε $P_2 = max$ πρέπει:

$$\cos(-\delta+\varphi_Z) = 1 \quad \text{δηλ} \quad -\delta+\varphi_Z = 0$$

άρα: $\boxed{\delta = \varphi_Z}$ (*) άρα και: $\delta > 0$ (γιατί;) (δηλαδή η τάση $\bar{V}_1$ πρέπει να προηγείται της $\bar{V}_2$)

τότε έχουμε:

$$P_2 = P_{2,max} = \frac{1}{2}\left(\frac{V_{1m}V_{2m}}{|\bar{Z}|} - \frac{V_{2m}^2}{|\bar{Z}|^2} R \right)$$

(*) Δηλαδή η διαφορά φάσεως μεταξύ $\bar{V}_1$ και $\bar{V}_2$ (με την $\bar{V}_1$ να προηγείται!) πρέπει να είναι ίση με την γωνία φ_Z (όπου $\bar{Z} = R + jX = |\bar{Z}| e^{j\varphi_Z}$)

Για να μεταφέρεται ισχύς από το 1 στο 2
(δηλ. για να έχουμε $P_2 > 0$) θα πρέπει:

$$\cos(-\delta + \varphi_Z) > 0$$

άρα:

$$-\frac{\pi}{2} < -\delta + \varphi_Z < \frac{\pi}{2} \quad \text{ή} \quad \boxed{\varphi_Z - \frac{\pi}{2} < \delta < \varphi_Z + \frac{\pi}{2}}$$

επίσης πρέπει

$$P_2 = \frac{1}{2}\frac{V_{1m}V_{2m}}{|\bar{Z}|}\cos(-\delta + \varphi_Z) - \frac{1}{2}\frac{V_{2m}^2}{|\bar{Z}|^2}R \geqslant 0$$

άρα

$$\frac{V_{1m}V_{2m}}{|\bar{Z}|}\cos(-\delta + \varphi_Z) \geqslant \frac{V_{2m}^2}{|\bar{Z}|^2}R$$

ή

$$V_{1m}\cos(-\delta + \varphi_Z) \geqslant \frac{V_{2m}}{|\bar{Z}|}R$$

$$\boxed{V_{1m} \geqslant \frac{V_{2m}R}{|\bar{Z}|\cos(-\delta + \varphi_Z)}}$$

Αν αγνοήσουμε την ωμική αντίσταση R δηλαδή θεωρήσουμε ότι $\bar{Z} = jX$ (και $\varphi_Z = \frac{\pi}{2}$)

τότε η αρχική σχέση που δίνει την P_2 γράφεται:

αρχικά: $$P_2 = \frac{1}{2}\frac{V_{1m}V_{2m}}{|\bar{Z}|}\cos(-\delta+\varphi_Z) - \frac{1}{2}\frac{V_{2m}^2}{|\bar{Z}|^2}R$$

με $R = 0$ γίνεται:

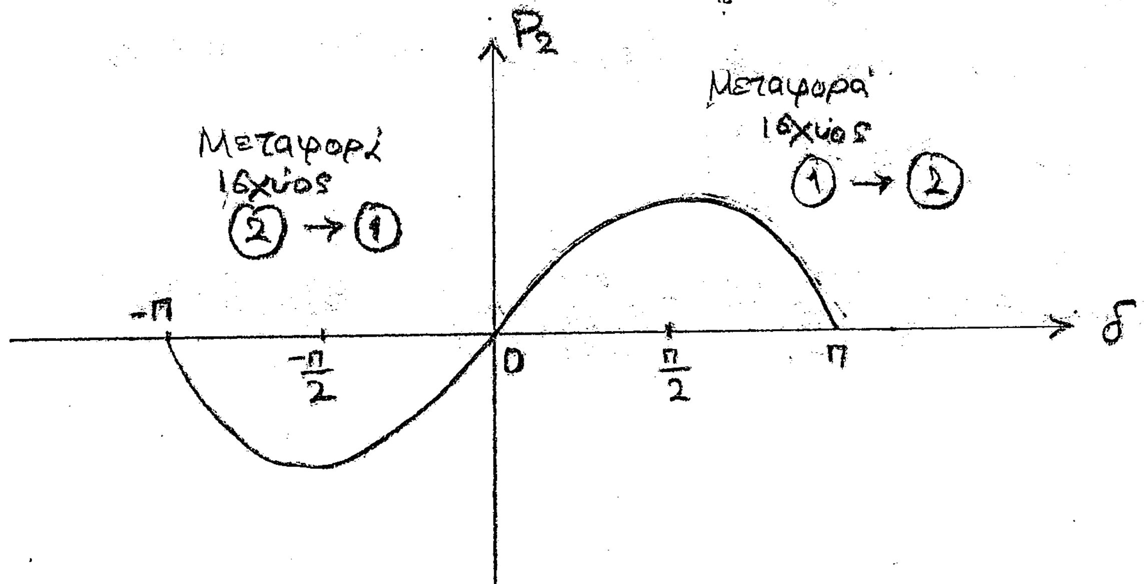
$$P_2 = \frac{1}{2}\frac{V_{1m}V_{2m}}{|\bar{Z}|}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)$$

ή $$\boxed{P_2 = \frac{1}{2}\frac{V_{1m}V_{2m}}{|\bar{Z}|}\sin\delta}$$

(Προφανώς για $P_2 > 0$ θα πρέπει: $0 < \delta < \pi$)

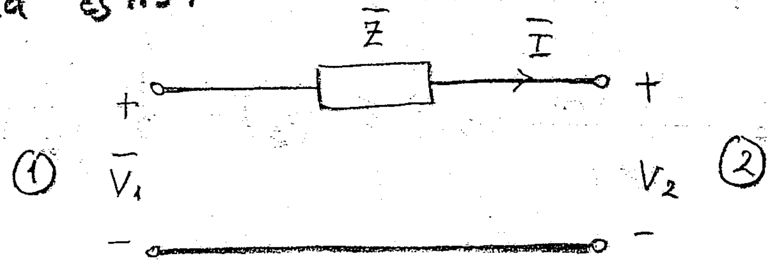
και $$P_{2,max} = \frac{1}{2}\frac{V_{1m}V_{2m}}{|\bar{Z}|} \quad \left(\text{όταν } \delta = \frac{\pi}{2}\right)$$

Εδώ το παρακάτω διάγραμμα είναι πολύ ενδιαφέρον



Εφαρμογές

1) Στην ακόλουθη διάταξη (γραμμή μεταφοράς) ισχύουν τα εξής:



$\bar{V}_1 = 220\, e^{j\delta}$ V όπου $-180^\circ \leq \delta \leq 180^\circ$

$\bar{V}_2 = 180\, e^{j0}$ V , $\bar{Z} = 5 + j2\ \Omega$

Ζητούνται:

- η τιμή της γωνίας δ για την οποία έχουμε μέγιστη απορρόφηση ενεργού ισχύος στην θέση 2
- η μέγιστη αυτή ισχύς.

Απ/

έχουμε $\bar{Z} = 5 + j2 = 5,385\angle 21,8^\circ$ δηλ. $\varphi_Z = 21.8^\circ$

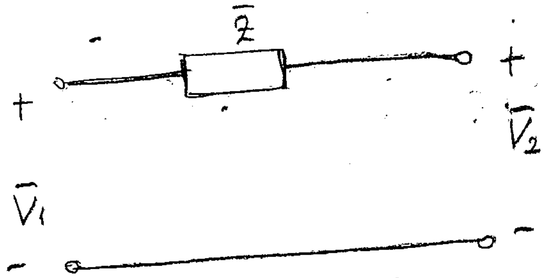
για μέγιστη ισχύ στην θέση 2 πρέπει $\delta = \varphi_Z$

άρα $\boxed{\delta = 21.8^\circ}$

και $P_{2,max} = \frac{1}{2}\left(\frac{V_{1m} V_{2m}}{|\bar{Z}|} - \frac{V_{2m}^2}{|\bar{Z}|^2} R \right) = 883,60$ W

2) Στην ακόλουθη διάταξη ζητείται να υπολογιστεί η μέγιστη τιμή της ενεργού ισχύος που μπορεί να μεταφερθεί από το σημείο (1) στο σημείο (2)
Ποια πρέπει να είναι στην περίπτωση αυτή η φάση της τάσεως $\bar{V}_2$;
Δίδονται οι τιμές:

$$\bar{V}_1 = 440 e^{j10^\circ} V, \quad |\bar{V}_2| = 420 V \text{ (μέτρο)}$$
$$\bar{Z} = 0.5 + j1.5 \Omega$$



Απ/
Η max ισχύς θα είναι:

$$P_{2,max} = \frac{1}{2}\left(\frac{V_{1m} V_{2m}}{|\bar{Z}|} - \frac{V_{2m}^2}{|\bar{Z}|^2} R\right)$$

όπου $|\bar{Z}| = |0.5 + j1.5| \Omega = 1.581 \Omega$

άρα $\boxed{P_{2,max} = 40.800,9 \ W}$

Για να έχω max ενεργό ισχύ στην θέση (2) θα πρέπει να ισχύει $\delta = \varphi_{\bar{Z}}$

οπου $\delta = \varphi_{V_1} - \varphi_{V_2}$ και $\varphi_{\bar{Z}} = \text{όρισμα}(\bar{Z})$

εδω $\varphi_{\bar{Z}} = \text{όρισμα}(0.5 + j1.5) = 71,6^\circ$

άρα $\varphi_{V_1} - \varphi_{V_2} = 71.6^\circ \Rightarrow \varphi_{V_2} = \varphi_{V_1} - 71.6^\circ = 10^\circ - 71.6^\circ \Rightarrow$

$$\boxed{\varphi_{V_2} = -61.6^\circ}$$