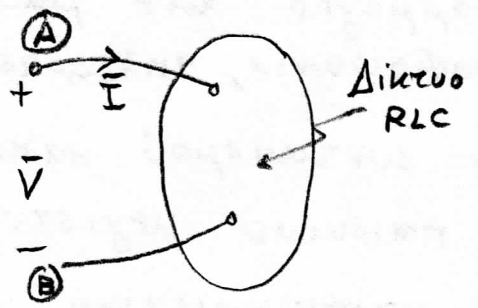
6) Συντονισμός

6.1 Εισαγωγικά

Έστω ενα δίκτυο R, L, C (χωρίς πηγές)



Εξετάζουμε το δίκτυο αυτό απο 2 ακροδέκτες του Ⓐ-Ⓑ. Μεταξύ των Ⓐ-Ⓑ υπάρχει η τάση $\bar{V}$ και απο το Ⓐ εισέρχεται ρεύμα $\bar{I}$. Γενικά είναι $\bar{V} = V_m e^{j\varphi_V}$ και $\bar{I} = I_m e^{j\varphi_I}$ όπου $\varphi_V \neq \varphi_I$ γενικά

Αν συμβεί να έχουμε $\varphi_V = \varphi_I = \varphi$ δηλ τα $\bar{V}$ και $\bar{I}$ να είναι "εν φάσει" τότε λέμε οτι το δίκτυο είναι σε συντονισμό

Στην περίπτωση αυτή η σύνθετη αντίσταση $\bar{Z}$ που "φαίνεται" απο τα Ⓐ-Ⓑ δηλ.

$$\bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{V_m e^{j\varphi}}{I_m e^{j\varphi}} = \frac{V_m}{I_m}$$ είναι καθαρά ωμική

Η εξήγηση για το φαινόμενο του συντονισμού είναι η ακόλουθη:

- Οι αυτεπαγωγές L_i που βρίσκονται μεσα στο δίκτυο "αλληλοεξουδετερώνονται" με τις χωρητικότητες C_j, για κάποια συγκεκριμένη συχνότητα ω, και έτσι το δίκτυο εμφανίζει καθαρά ωμική συμπεριφορά

Όπως είναι προφανές για να έλθει ένα δίκτυο σε συντονισμό θα πρέπει οπωσδήποτε να περιέχει και αυτεπαγωγές και χωρητικότητες (για να γίνει η αλληλοεξουδετέρωση)

Το φαινόμενο του συντονισμού είναι πάρα πολύ χρήσιμο στις εφαρμογές της ραδιοηλεκτρολογίας (τηλεπικοινωνίες, ραδιοφωνία, τηλεόραση κ.λ.π.)

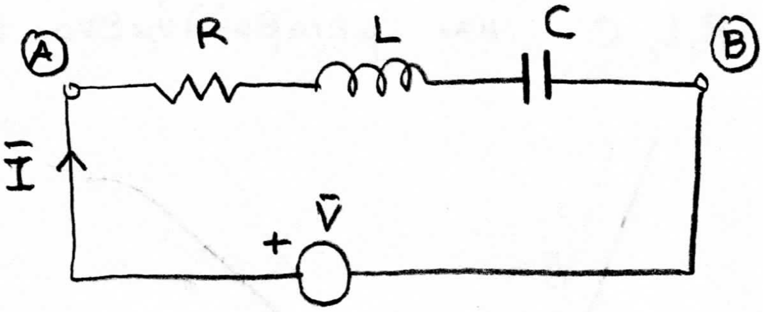
Στο φαινόμενο του συντονισμού κάποια μεγέθη (τάσεις, ρεύματα) παίρνουν μέγιστες τιμές

Επίσης ένα άλλο χαρακτηριστικό ενός συντονισμένου κυκλώματος είναι η ευκολία "διέλευσης" ορισμένων συχνοτήτων και η δυσκολία διέλευσης ορισμένων άλλων συχνοτήτων

Παρακάτω θα εξετάσουμε παραδείγματα συντονισμένων κυκλωμάτων.

6.2 Κύκλωμα RLC σειράς

Έχουμε το απλό RLC κύκλωμα σειράς



ή $\bar{Z}_{AB} = R + jX = R + j\omega L - \frac{j}{\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$

ή $$\bar{Z}_{AB} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \angle \tan^{-1}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

- για να έχουμε συντονισμό θα πρέπει:

$$\tan^{-1}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right) = 0^\circ \quad \text{άρα} \quad \omega L - \frac{1}{\omega C} = X = 0$$

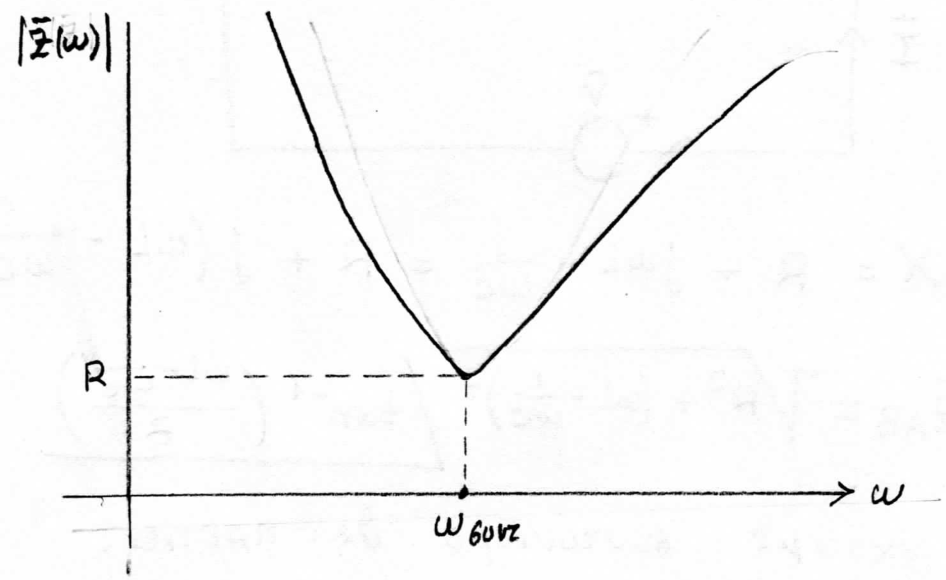
ή $\omega L = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \boxed{\omega_{συντ} = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$ και $f_{συντ} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

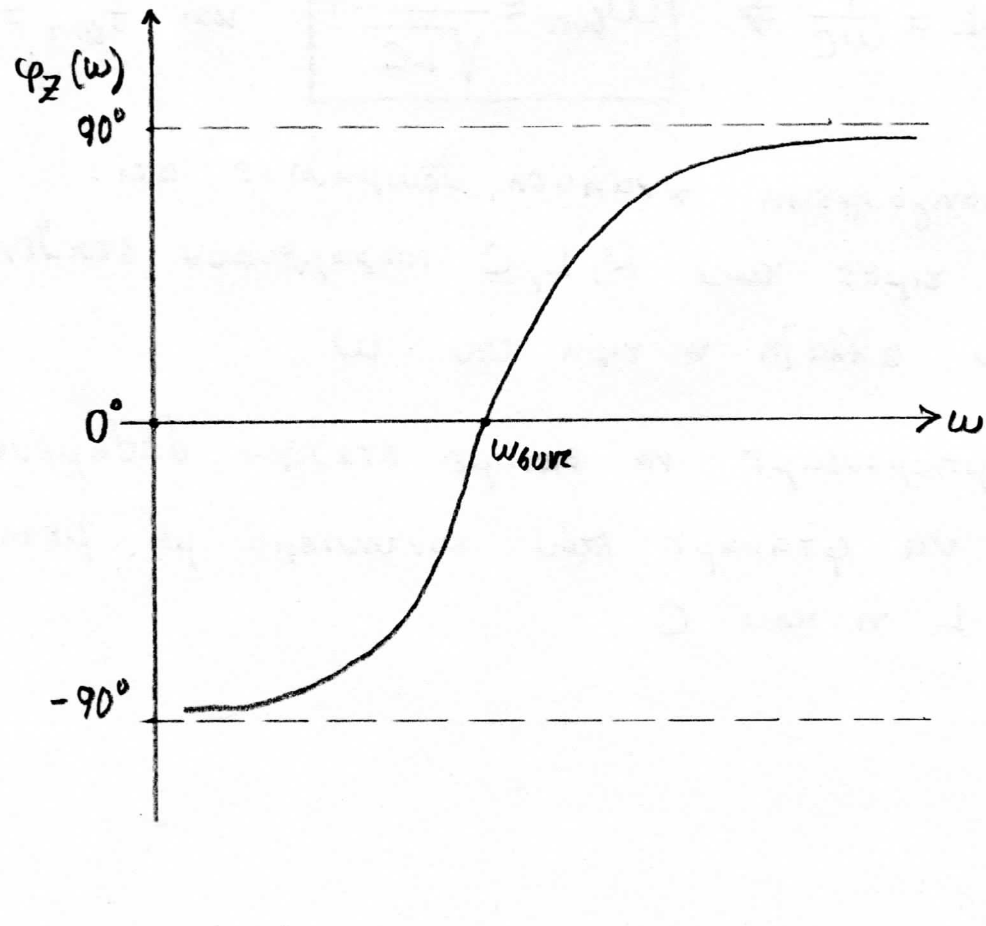
Στην προηγούμενη ανάλυση θεωρήθηκε ότι:

- Οι τιμές των R, L, C παραμένουν σταθερές και αλλάζει η τιμή του ω

- Θα μπορούσαμε να έχουμε σταθερό, δεδομένο, ω και να φτάναμε στον συντονισμό με μεταβολή του L ή του C

Στα επόμενα σχήματα φαίνεται η μεταβολή του $|\bar{Z}| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})}$ και $\varphi_Z = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$ για δεδομένα R, L, C και μεταβαλλόμενο ω





Το ρεύμα $\bar{I}$ που διαρρέει το κύκλωμα θα είναι:

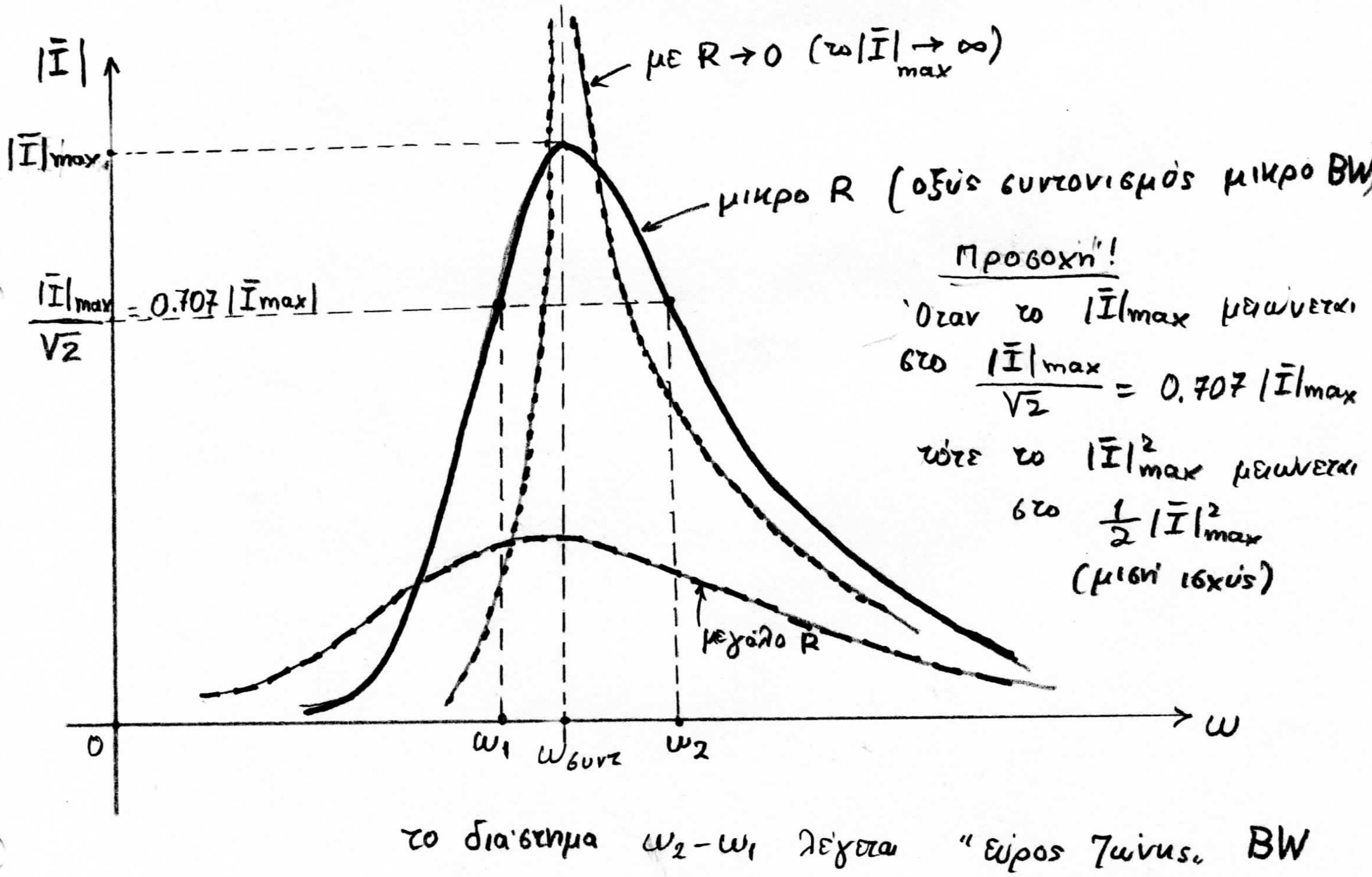
$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}} \quad \text{άρα} \quad |\bar{I}| = \frac{|\bar{V}|}{|\bar{Z}|}$$

ή $$|\bar{I}| = \frac{|\bar{V}|}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

όταν $\omega = \omega_{συντ}$ τότε:

$$|\bar{I}|_{συντ} = |\bar{I}|_{max} = \frac{|\bar{V}|}{R} \quad (\text{γιατί;})$$

δηλ. στο κύκλωμα συντονισμού σειράς το ρεύμα μεγιστοποιείται στην συχνότητα συντονισμού. Αν το R είναι μικρό το $|\bar{I}|_{συντ}$ μπορεί να πάρει πολύ μεγάλες τιμές

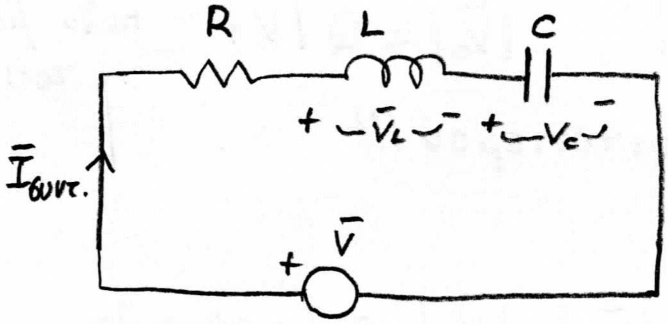


Προσοχή!
Όταν το $|\bar{I}|_{max}$ μειώνεται στο $\frac{|\bar{I}|_{max}}{\sqrt{2}} = 0.707\,|\bar{I}|_{max}$ τότε το $|\bar{I}|^2_{max}$ μειώνεται στο $\frac{1}{2}|\bar{I}|^2_{max}$ (μισή ισχύς)

το διάστημα $\omega_2 - \omega_1$ λέγεται "εύρος ζώνης" BW (bandwidth)

Υπερτάσεις λόγω συντονισμού (σειράς)

Άς εξετάσουμε πάλι το κύκλωμα σειράς, στην κατάσταση του συντονισμού



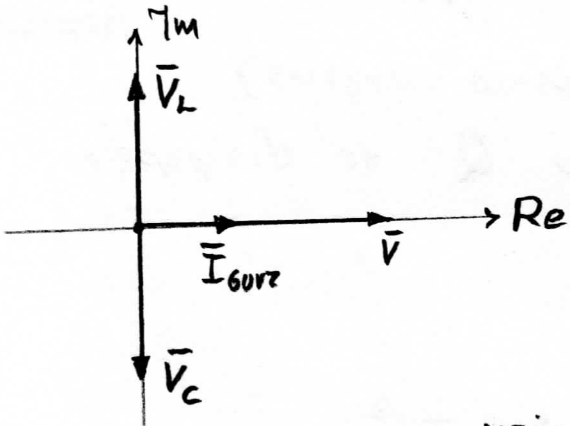
έχουμε: $\bar V_L = j\omega_{συντ.} L\, \bar I_{συντ.}$

$$\bar V_C = -j\frac{1}{\omega_{συντ.} C}\bar I_{συντ.} = -j\omega_{συντ.} L\, \bar I_{συντ.} = -\bar V_L$$

διότι στον συντονισμό ισχύει:

$$\omega_{συντ.} L = \frac{1}{\omega_{συντ.} C}$$

οι τάσεις $\bar V_L$ και $\bar V_C$ διαφέρουν κατά $180°$ στη φάση



θα έχουμε $\bar I_{συντ} = \dfrac{\bar V}{R}$

άρα

$$|\bar V_L| = \omega_{συντ} L \cdot |\bar I_{συντ}| = \omega_{συντ.} L \frac{|\bar V|}{R}$$

και: $|\bar V_C| = \dfrac{1}{\omega_{συντ} C}\dfrac{|\bar V|}{R}$

Ορίζουμε το μέγεθος Q (συντελεστής ποιότητας)

$$Q = \frac{\omega_{συντ.} L}{R} = \frac{1}{\omega_{συντ} R \cdot C} \quad \text{(αδιάστατο μέγεθος)}$$

Πρακτικά:

– Είναι δυνατόν το Q να πάρει τιμές πολύ μεγαλύτερες από το 1 (ακόμα και $Q \simeq 200$)

οπότε $|\bar{V}_L| = Q|\bar{V}|$, $|\bar{V}_C| = Q|\bar{V}|$ τάσεις πολύ μεγαλύτερες του $|\bar{V}|$

– υπερτάσεις συντονισμού!!!

Προσοχή

Υπενθυμίζεται ότι $|\bar{V}_L|, |\bar{V}_C|$ πολύ μεγάλα

αλλά $\bar{V}_L + \bar{V}_C = 0$ (γιατί;)

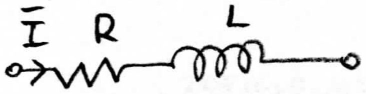
Θα δώσουμε εδώ τον γενικό ορισμό του Q (συντελεστής ποιότητας) μιας συνδεσμολογίας R-L-C

$$Q = 2\pi \cdot \frac{\text{Μέγιστη αποθηκευμένη ενέργεια στη διάρκεια μιας περιόδου}}{\text{Ενέργεια που χάνεται σε θερμότητα στη διάρκεια μιας περιόδου}}$$

(Το Q εκφράζει την ικανότητα αποθηκεύσεως ενέργειας)

– Παραδείγματα υπολογισμού του Q σε διάφορες συνδεσμολογίες

1) R,L σειράς



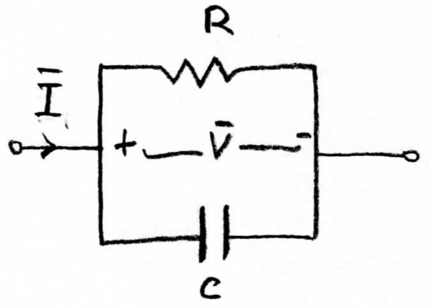
$$Q = 2\pi \cdot \frac{\frac{1}{2} L I_m^2}{\frac{1}{2} I_m^2 R T} \Rightarrow$$

$\bar{I} = I_m e^{j\varphi_I}$

T: περίοδος

$$\Rightarrow Q = \frac{2\pi L}{RT} = \frac{2\pi L}{R \frac{2\pi}{\omega}} = \frac{\omega L}{R}$$

2) R,C παράλληλα



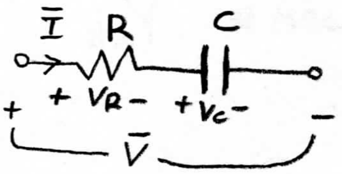
$$Q = 2\pi \cdot \frac{\cancel{\frac{1}{2}} C V_m^2}{\cancel{\frac{1}{2}} I_m^2 R T} = \frac{2\pi \cdot C V_m^2}{\left(\frac{V_m}{R}\right)^2 R \frac{2\pi}{\omega}}$$

$\bar{I} = I_m e^{j\varphi_I}$

$\bar{V} = V_m e^{j\varphi_V}$

$$\Rightarrow Q = \frac{C}{\frac{1}{\omega R}} = \omega R C$$

3) R,C σειράς

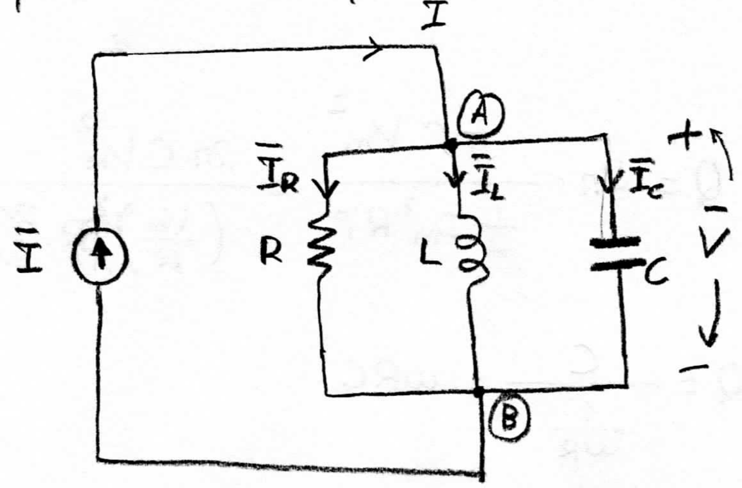


$$Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2} C V_{cm}^2}{\frac{1}{2} I_m^2 R T} = 2\pi \cdot \frac{C V_{cm}^2}{(V_{cm} \omega C)^2 R T} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q = \frac{2\pi C}{\omega^2 C^2 R \frac{2\pi}{\omega}} = \frac{1}{\omega R C}$$

6.3 Κύκλωμα RLC παράλληλα (δυαδικό κύκλωμα με το RLC σειράς)

Έχουμε τό κύκλωμα



Για λόγους συμμετρίας με το κύκλωμα RLC σειράς θεωρούμε ότι το κύκλωμα RLC παράλληλα τροφοδοτείται από πηγή ρεύματος $\bar{I}$

– έχουμε $\bar{Y}_{AB} = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$ και $\bar{V} = \frac{\bar{I}}{\bar{Y}_{AB}}$

γιά να είναι τα $\bar{V}, \bar{I}$ "εν φάσει" θα πρέπει $\bar{Y}_{AB}$ να είναι καθαρά ωμική.

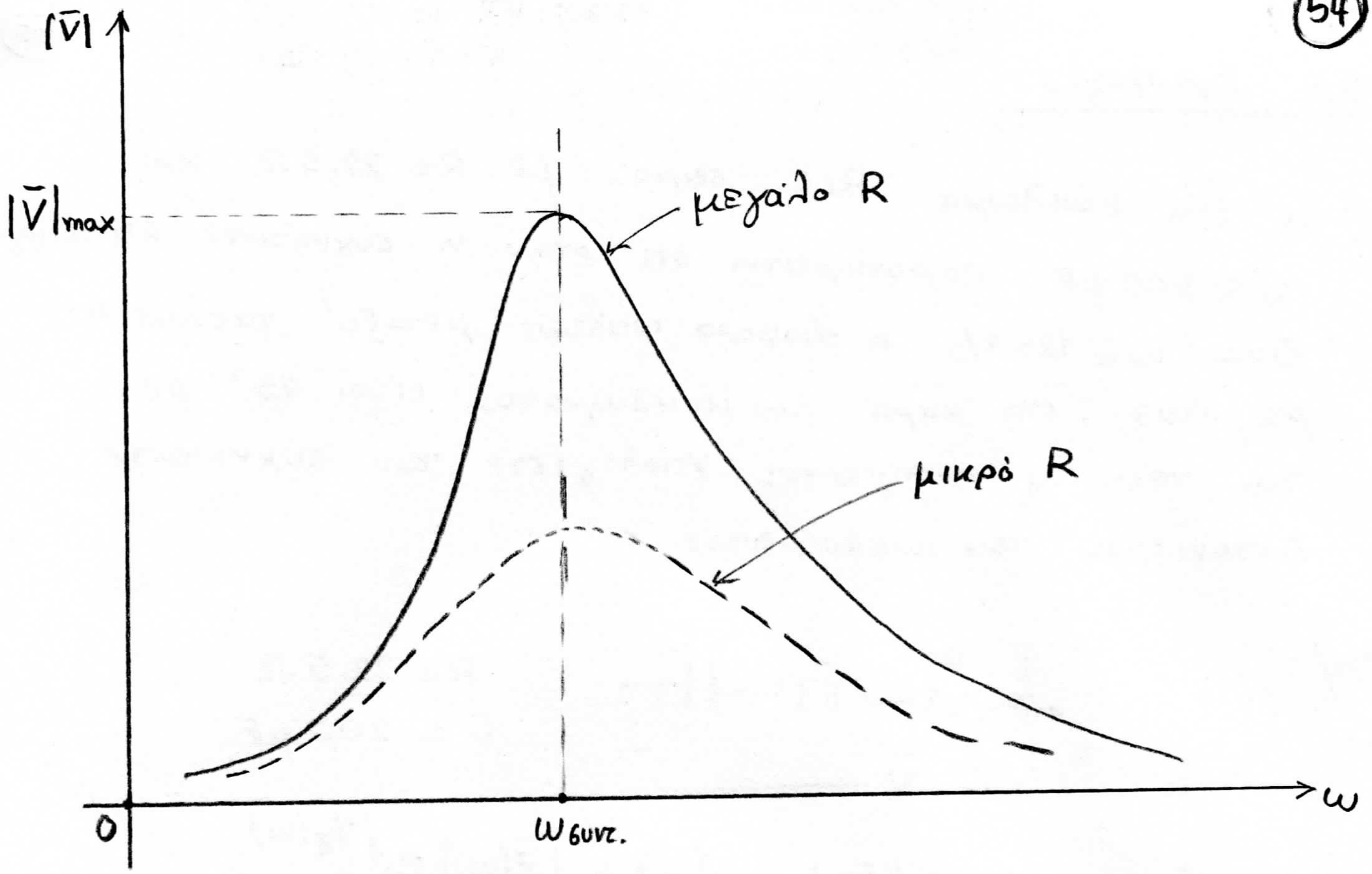
Άρα $\bar{Y}_{AB} = \frac{1}{R}$ επομένως $\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = 0$

δηλ. $\boxed{\omega_{συντ} = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$ – ίδια με το κύκλωμα RLC σειράς

"δυαδικά" σκεπτόμενοι θα έχουμε:

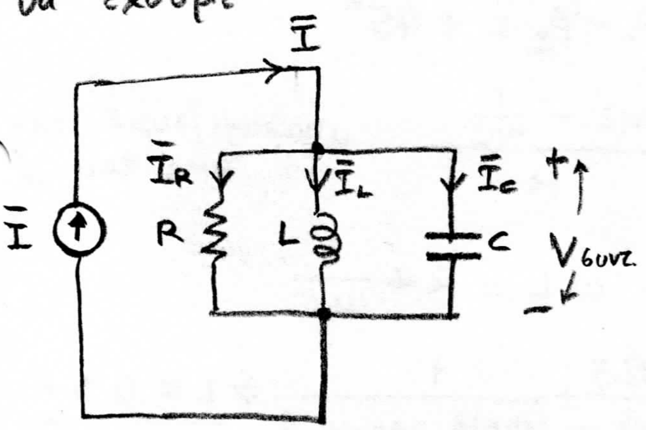
$$|\bar{V}|_{συντ} = |\bar{V}|_{max} = \frac{|\bar{I}|}{\frac{1}{R}} = |\bar{I}| \cdot R$$

και αντίστοιχα...



Ρεύματα $\bar{I}_L$, $\bar{I}_C$ στον παράλληλο συντονισμό

Στο κύκλωμα RLC παράλληλα, και στη συχνότητα συντονισμού, θα έχουμε



$$\bar{I}_L = \frac{\bar{V}_{συντ.}}{j\omega_{συντ}L} \qquad (\text{όπου } \bar{V}_{συντ} = \bar{I}\cdot R)$$

$$\bar{I}_C = \bar{V}_{συντ}\, j\omega_{συντ.}C = -\bar{I}_L$$

$$\left(\text{διότι } \frac{1}{\omega_{συντ}L} = \omega_{συντ}C\right)$$

τα ρεύματα $\bar{I}_L$, $\bar{I}_C$ διαφέρουν κατά 180° στη φάση και στην περίπτωση αυτή θα έχουμε:

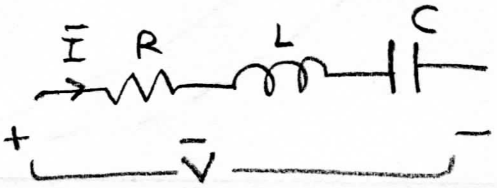
$$|\bar{I}_L| = \frac{|\bar{V}_{συντ}|}{\omega_{συντ}L} = |\bar{I}|\frac{R}{\omega_{συντ}L}$$

$$|\bar{I}_C| = |\bar{V}_{συντ}|\,\omega_{συντ}\cdot C = |\bar{I}|\,R\,\omega_{συντ}\cdot C$$

6.4 Εφαρμογές

1) Σε ένα κύκλωμα RLC σειράς με $R = 22.5\,\Omega$ και $C = 200\,\mu F$ παρατηρείται ότι όταν η συχνότητα λειτουργίας είναι $\omega = 125\ r/s$, η διαφορά φάσεως μεταξύ τάσεως και ρεύματος, στα άκρα του κυκλώματος, είναι 45° με την τάση να προηγείται. Υπολογίστε την συχνότητα συντονισμού του κυκλώματος

Απ/



$R = 22.5\,\Omega$
$C = 200\,\mu F$

έχουμε: $$\bar{Z}(\omega) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = |\bar{Z}(\omega)|\, e^{j\varphi_Z(\omega)}$$

$$\varphi_Z(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right) = \varphi_V - \varphi_I$$

όταν $\omega_1 = 125\ r/s$ τότε $\varphi_Z = \varphi_V - \varphi_I = +45^\circ$

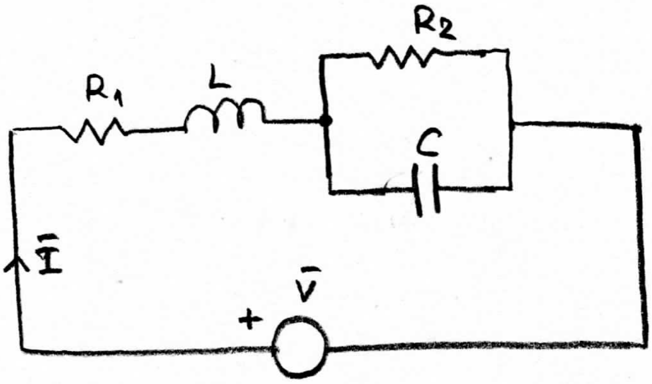
$$\tan\varphi_Z = \tan 45^\circ = 1 = \frac{\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}}{R}$$ υπολογίζουμε την τιμή του L

άρα $R = \omega_1 L - \dfrac{1}{\omega_1 C} \Rightarrow \omega_1 L = R + \dfrac{1}{\omega_1 C}$

$$\Rightarrow L = \frac{R}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_1^2 C} = \frac{22.5}{125} + \frac{1}{(125)^2 \cdot 200\times10^{-6}} \Rightarrow \underline{L = 0.5\,H}$$

άρα $$\omega_{συντ} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0.5\times200\times10^{-6}}} = 100\ r/sec$$

ε) Δίδεται το ακόλουθο κύκλωμα



όπου

$\bar{V} = 48\angle 30^\circ$ V

$R_1 = 50\,\Omega$, $R_2 = 10\,\Omega$

$C = 100\,\mu F$

$\omega = 1000$ r/s

- Υπολογίστε την τιμή της αυτεπαγωγής L ώστε το κύκλωμα να βρίσκεται σε συντονισμό

Απ/

Για να έχουμε συντονισμό θα πρέπει η $\bar{Z}_{ολ}(\omega)$ να είναι καθαρά ωμική

$$\bar{Z}_{ολ}(\omega) = R_1 + j\omega L + \frac{R_2\left(\frac{-j}{\omega C}\right)}{R_2 - \frac{j}{\omega C}} = R_1 + j\omega L + \frac{\frac{-jR_2}{\omega C}}{\frac{\omega C R_2 - j}{\omega C}}$$

$$= R_1 + j\omega L + \frac{-jR_2}{\omega C R_2 - j} = R_1 + j\omega L + \frac{-jR_2(\omega C R_2 + j)}{(\omega C R_2 - j)(\omega C R_2 + j)} =$$

$$= R_1 + j\omega L + \frac{R_2 - j\omega C R_2^2}{1 + \omega^2 C^2 R_2^2} = R_{ολ}(\omega) + jX_{ολ}(\omega)$$

στον συντονισμό θα πρέπει $X_{ολ}(\omega) = 0$ (καθαρά ωμική)

άρα $\left(\omega L - \frac{\omega C R_2^2}{1 + \omega^2 C^2 R_2^2}\right) = 0 \Rightarrow L = \frac{C R_2^2}{1 + \omega^2 C^2 R_2^2}$

θέτουμε τις δεδομένες τιμές των ω, R_2, C και βρίσκουμε

$$L = \frac{100 \times 10^{-6} \cdot 10^2}{1 + (1000 \times 100 \times 10^{-6} \times 10)^2} \Rightarrow \underline{\underline{L = 0.005\ H}}$$

<u>Παρατήρηση:</u>

- η τιμή της $\bar{V}$ και η τιμή της R_1 δεν επηρεάζουν το αποτέλεσμα (γιατί;)