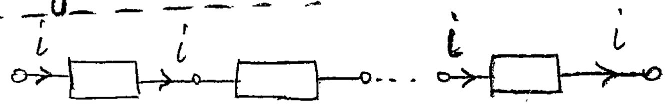
8) Μετασχηματισμός αστέρα-τριγώνου

8.1) Εισαγωγή

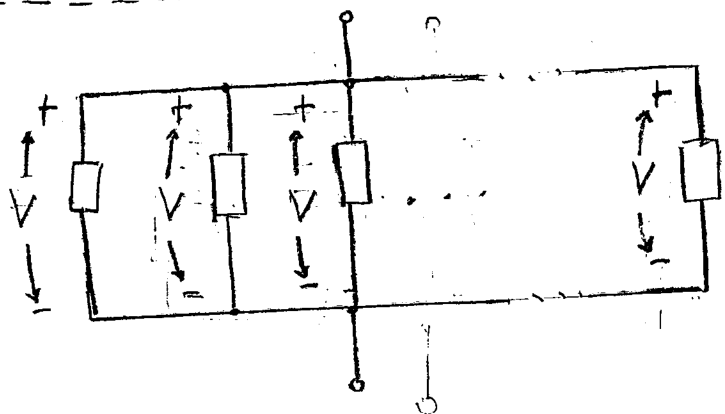
Είναι γνωστές οι 2 βασικές συνδεσμολογίες ηλεκτρικών στοιχείων

- Συνδεσμολογία σειράς



(έχουμε κοινό ρεύμα σε όλα τα στοιχεία)

- Συνδεσμολογία εν παραλλήλω



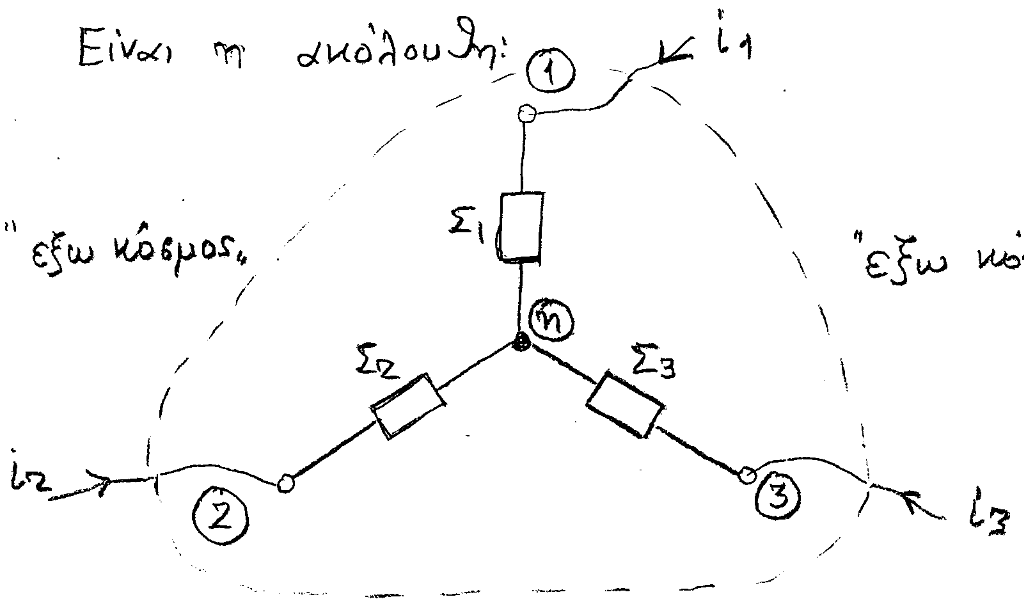
(έχουμε κοινή τάση σε όλα τα στοιχεία)

- Υπάρχουν όμως και συνθετώτερες συνδεσμολογίες, 3 και άνω ηλεκτρικών στοιχείων, που δεν μπορούν να θεωρηθούν ούτε εν σειρά ούτε εν παραλλήλω

Παρακάτω θα δείξουμε 2 χαρακτηριστικές περιπτώσεις συνδεσμολογιών, που έχουν σημαντική αξία στις πρακτικές εφαρμογές. Για απλότητα θα ασχοληθούμε με συνδεσμολογίες 3 στοιχείων. Προφανώς οι περιπτώσεις γενικεύονται για n στοιχεία

8.2 Συνδεσμολογία αστέρα

Είναι η ακόλουθη:



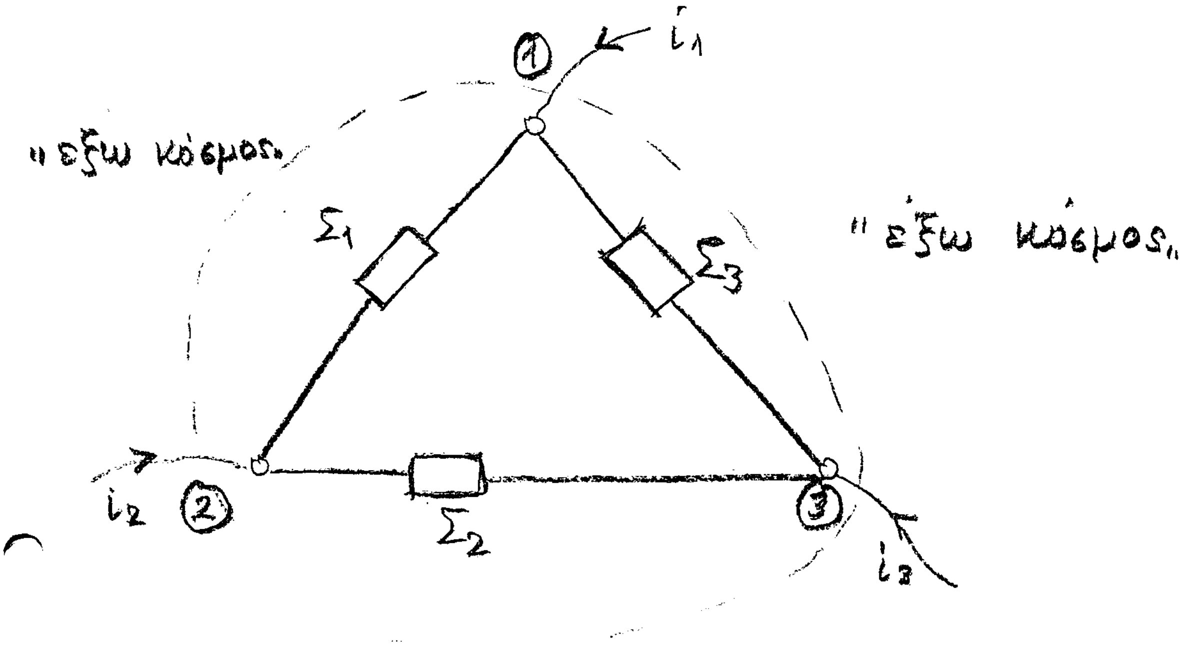
Τα 3 στοιχεία Σ_1, Σ_2, Σ_3 έχουν κοινό τον ένα ακροδέκτη τους (σημείο m) και ο άλλος ακροδέκτης τους 1, 2, 3 συνδέεται με τον "έξω κόσμο".

Θεωρούμε εδώ ότι τα Σ_1, Σ_2, Σ_3 είναι παθητικά στοιχεία (στη συνδεσμολογίες R, L, C με οποιοδήποτε τρόπο σύνδεσης)

Στη γενική περίπτωση τα Σ_1, Σ_2, Σ_3 δεν είναι συνδεδεμένα ούτε εν σειρά, ούτε παράλληλα μεταξύ τους

8.3 Συνδεσμολογία τριγώνου

Είναι η ακόλουθη:



Τα 3 στοιχεία $Σ_1$, $Σ_2$, $Σ_3$ συνδέονται το ένα μετά το άλλο σχηματίζοντας ένα τρίγωνο του οποίου οι κορυφές ①, ②, ③ συνδέονται με τον "έξω κόσμο".

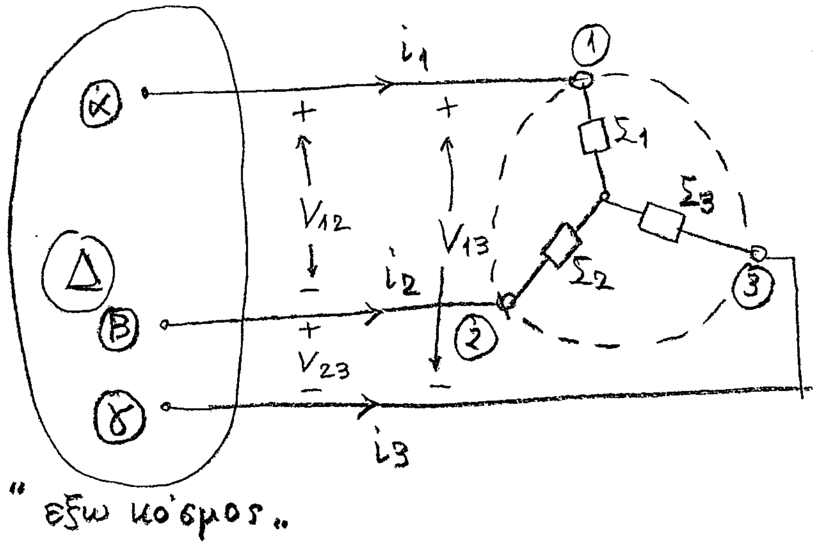
Και πάλι τα $Σ_1$, $Σ_2$, $Σ_3$ δεν είναι, γενικά, ούτε εν σειρά ούτε παράλληλα συνδεδεμένα μεταξύ τους

8.4. Ισοδυναμία αστέρα - τριγώνου

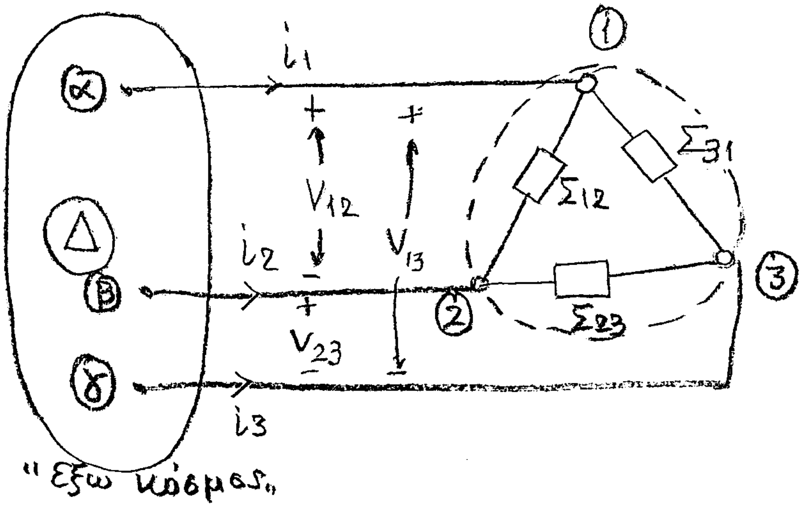
Τίθεται το ερώτημα:

- Είναι δυνατόν μια συνδεσμολογία αστέρα να είναι ισοδύναμη με μια συνδεσμολογία τριγώνου (και αντιστροφα);

Δηλαδή ο "έξω κόσμος" να μην βλέπει καμμία διαφορά μεταξύ των δύο συνδεσμολογιών, ως πρός τούς 3 ακροδέκτες ①, ②, ③ Σχηματικά:



(I)
αστέρας



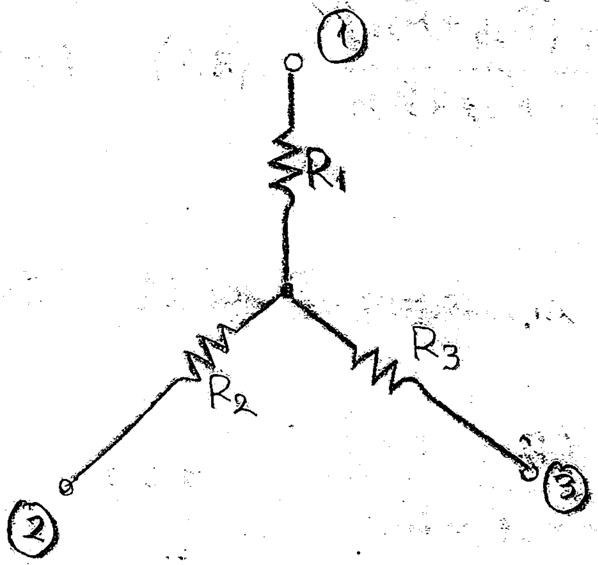
(II)
τρίγωνο

Δηλαδή:

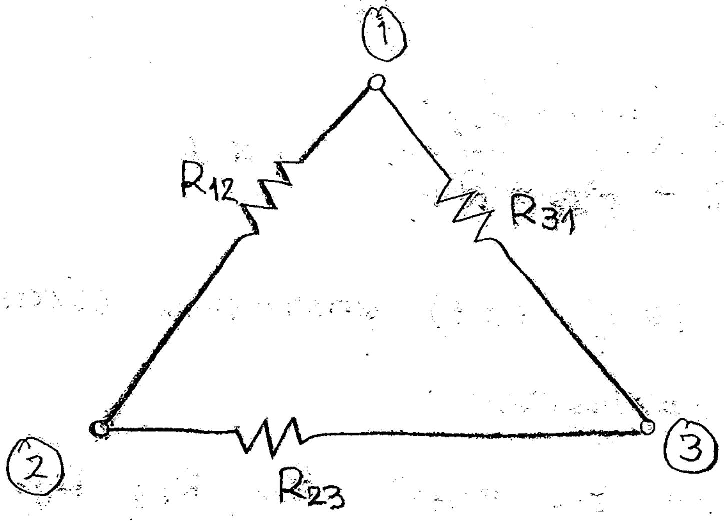
Το δίκτυο Δ ως προς 3 σημεία του α, β, γ συνδέεται με τα σημεία (κροδέκτες) ①, ②, ③ ενός αστέρα (I) και ενός τριγώνου (II).

Όταν τα ρεύματα i_1, i_2, i_3 και οι τάσεις V_{12}, V_{23}, V_{13} παραμένουν τα ίδια, και στις δυο περιπτώσεις, τότε ο αστέρας και το τρίγωνο είναι μεταξύ τους ισοδύναμα

Παρακάτω θα εξετάσουμε λεπτομερώς το θέμα της ισοδυναμίας.
Όπως προαναφέραμε τα στοιχεία που σχηματούν τον αστέρα και το τρίγωνο είναι παθητικά.
Για απλότητα θα θεωρήσουμε ότι είναι απλές ωμικές αντιστάσεις. Έτσι θα έχουμε:



Αστέρας



Τρίγωνο

Για να είναι ισοδύναμες οι δυο συνδεσμολογίες θα πρέπει να ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

- Εξετάζω από τους ακροδέκτες ① και ②, ο ③ είναι "στον αέρα" (δεν συνδέεται πουθενά)

$$R_1 + R_2 = \frac{R_{12}\left(R_{23} + R_{31}\right)}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (8.1) \quad (\text{γιατί;})$$

- Εξετάζω από τους ακροδέκτες ② και ③, ο ① είναι "στον αέρα"

$$R_2 + R_3 = \frac{R_{23}\left(R_{12} + R_{31}\right)}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (8.2)$$

- Εξετάζω από τους ακροδέκτες ③ και ①, ο ② είναι "στον αέρα"

$$R_1 + R_3 = \frac{R_{31}\left(R_{12} + R_{23}\right)}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (8.3)$$

Οι σχέσεις (8.1), (8.2), (8.3) αποτελούν σύστημα 3 εξισώσεων με 3 αγνώστους

π.χ θεωρώ <u>γνωστές</u> τις τιμές R_{12}, R_{23}, R_{31} και <u>άγνωστες</u> τις τιμές R_1, R_2, R_3

Λύνοντας το σύστημα θα βρω τις σχέσεις μεταξύ των (R_1, R_2, R_3) και (R_{12}, R_{23}, R_{31}) για να έχω ισοδυναμία

Θα έχω

$$R_1 + R_2 = \frac{R_{12}R_{23} + R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (8.1')$$

ή $(8.2) \Rightarrow$ $$-R_2 - R_3 = \frac{-R_{12}R_{23} - R_{31}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (8.4')$$

$$(8.1') + (8.4') \Rightarrow R_1 - R_3 = \frac{R_{12}R_{31} - R_{31}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (8.5')$$

και $$(8.5') + (8.3') \Rightarrow 2R_1 = \frac{2R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

άρα τελικά

$$\boxed{R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}} \quad (8.6')$$

με όμοιο τρόπο θα βρούμε:

$$\boxed{R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}} \quad (8.7)$$

$$\boxed{R_3 = \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}} \quad (8.8')$$

- οι σχέσεις (8.6), (8.7), (8.8) δίνουν τις τιμές των R_1, R_2, R_3, του ισοδύναμου αστέρα, όταν είναι γνωστές οι τιμές των R_{12}, R_{23}, R_{31} του δεδομένου τριγώνου

Εργαζόμενοι αντίστροφα θα βρούμε τις σχέσεις

$$\boxed{R_{12} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3}} \qquad (8.9)$$

$$\boxed{R_{23} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1}} \qquad (8.10)$$

$$\boxed{R_{31} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2}} \qquad (8.11)$$

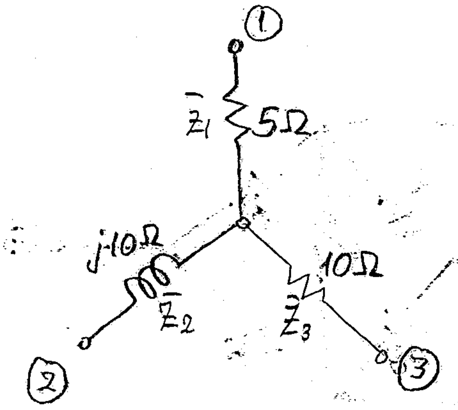
- οι σχέσεις (8.9), (8.10), (8.11) δίνουν τις τιμές των R_{12}, R_{23}, R_{31}, του ισοδύναμου τριγώνου, όταν είναι γνωστές οι τιμές των R_1, R_2, R_3 του δεδομένου αστέρα

Όλοι αυτοί οι τύποι γενικεύονται (γράφονται όμοια) στις περιπτώσεις που, αντί ωμικές R, έχουμε σύνθετες $\bar{Z}(\omega)$ ή τελεστριες αντιστάσεις $Z(D)$

8.5 Εφαρμογές

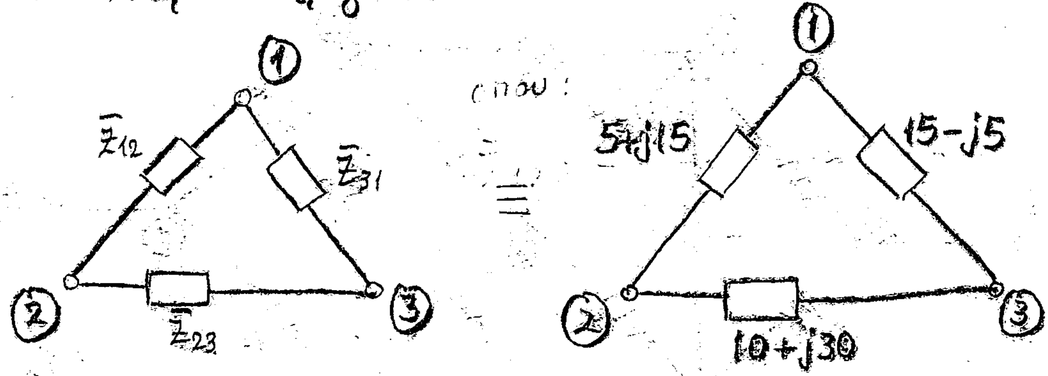
Εφαρμογή 1

Στην παρακάτω συνδεσμολογία αστέρα, βρείτε το ισοδύναμο τρίγωνο.



Απ/ έχουμε $\bar{Z}_1 = 5\Omega$, $\bar{Z}_2 = j10$, $\bar{Z}_3 = 10\Omega$

άρα το ισοδύναμο τρίγωνο θα είναι:



όπου

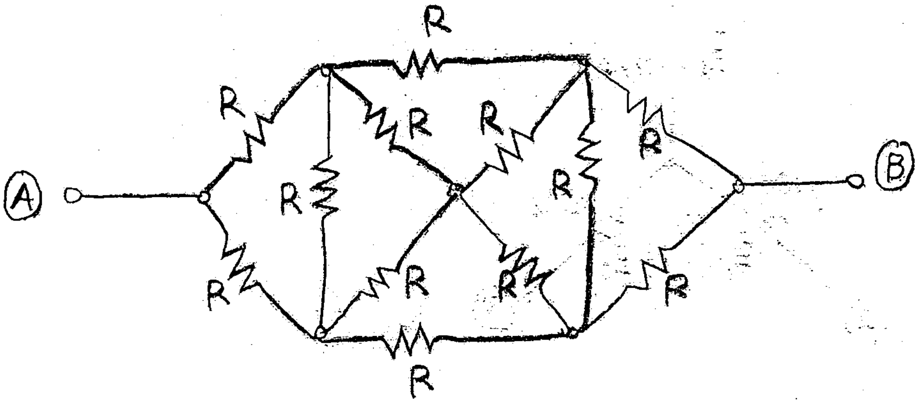
$$\bar{Z}_{12} = \frac{\bar{Z}_1\bar{Z}_2 + \bar{Z}_2\bar{Z}_3 + \bar{Z}_3\bar{Z}_1}{\bar{Z}_3} = \frac{5\times j10 + 10\times j10 + 5\times 10}{10} = \frac{50+j150}{10} = 5 + j15\ \Omega$$

$$\bar{Z}_{23} = \frac{\bar{Z}_1\bar{Z}_2 + \bar{Z}_2\bar{Z}_3 + \bar{Z}_3\bar{Z}_1}{\bar{Z}_1} = \frac{50+j150}{5} = 10 + j30\ \Omega$$

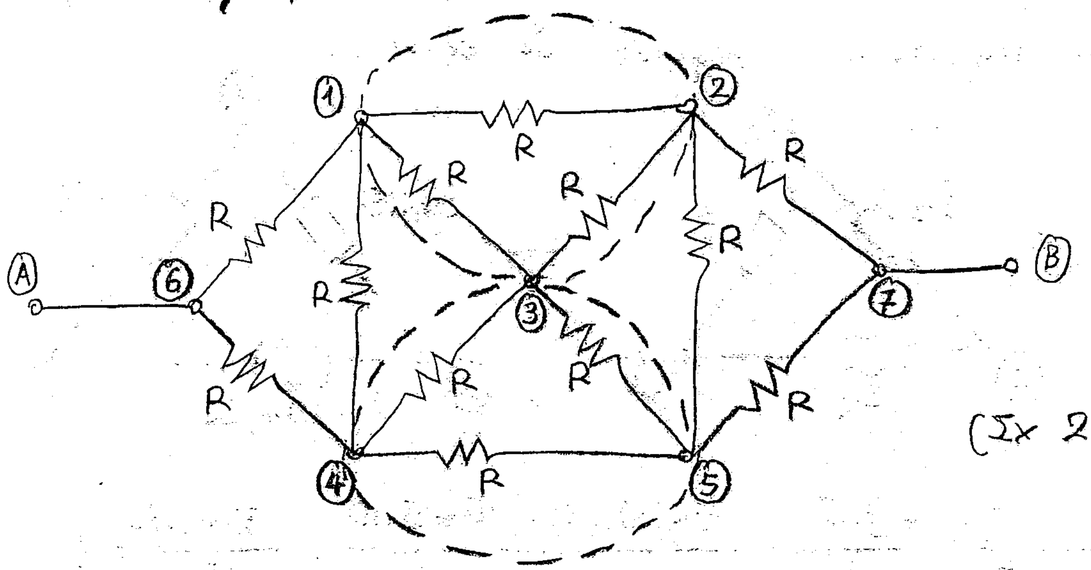
$$\bar{Z}_{31} = \frac{\bar{Z}_1\bar{Z}_2 + \bar{Z}_2\bar{Z}_3 + \bar{Z}_3\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2} = \frac{50+j150}{j10} = 15 - j5\ \Omega$$

Εφαρμογή 2)

Στην παρακάτω συνδεσμολογία η τιμή R θεωρείται γνωστή. Υπολογίστε την αντίσταση R_{AB}

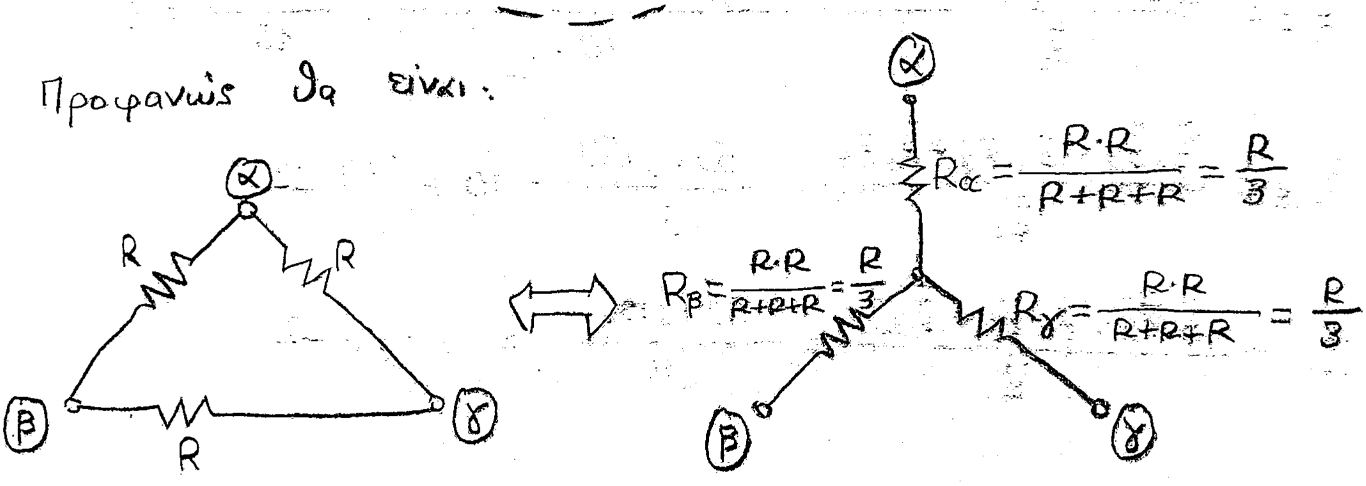


Απ/ Θα κάνουμε διαδοχικούς μετασχηματισμούς τριγώνων σε αστέρες.



(Σχ 2.1)

Προφανώς θα είναι:

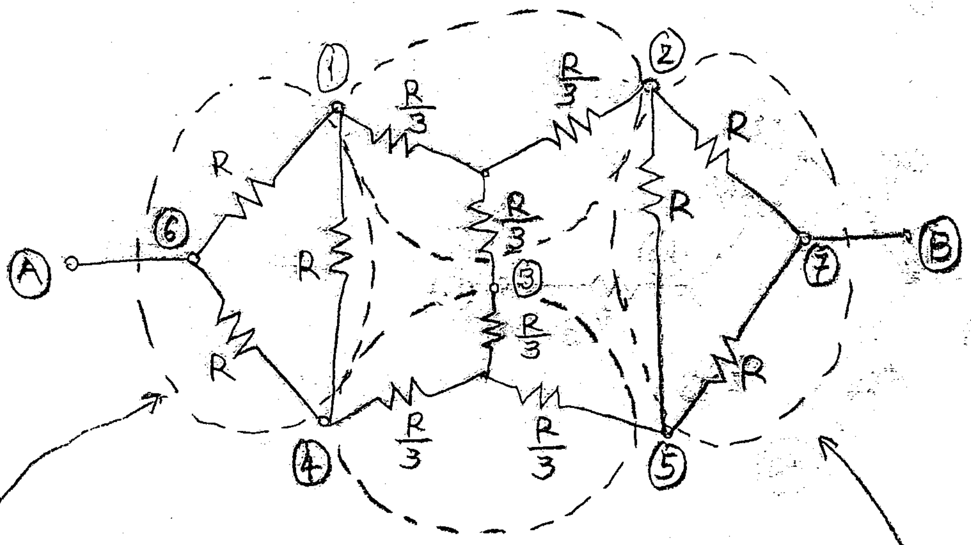


$$R_\alpha = \frac{R\cdot R}{R+R+R} = \frac{R}{3}$$

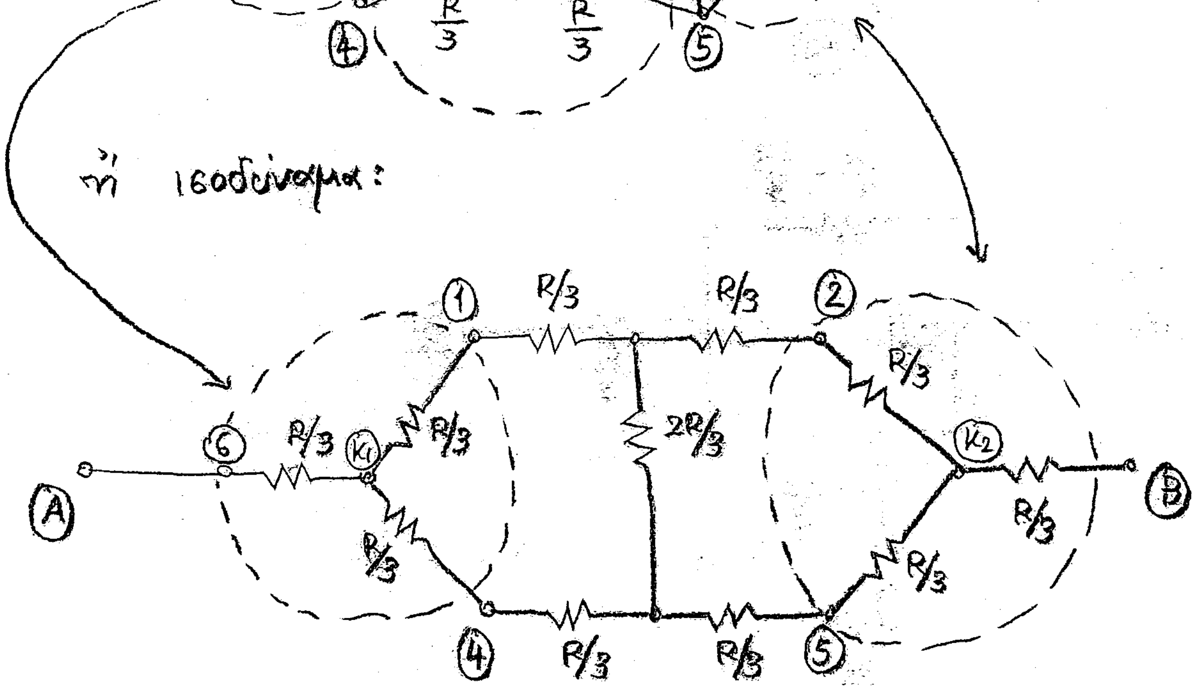
$$R_\beta = \frac{R\cdot R}{R+R+R} = \frac{R}{3}$$

$$R_\gamma = \frac{R\cdot R}{R+R+R} = \frac{R}{3}$$

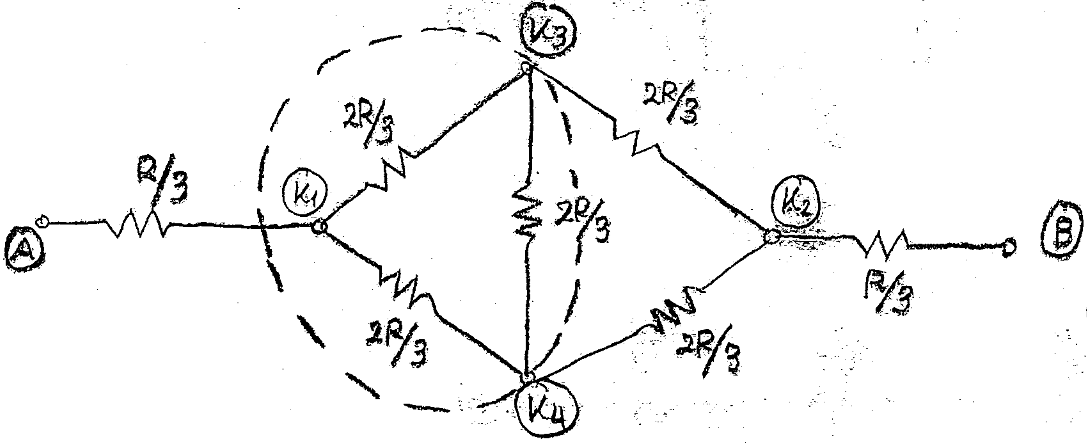
άρα το Σχ 2.1 γίνεται:



ή ισοδύναμα:

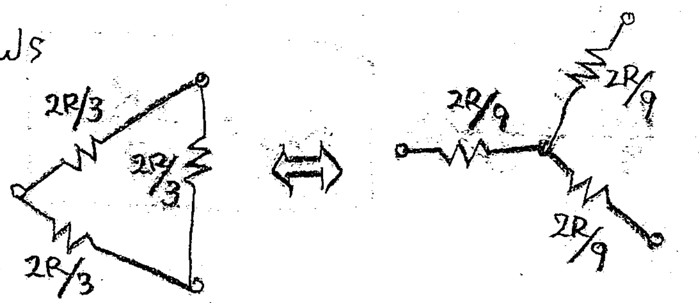


προσθέτουμε τις εν σειρά αντιστάσεις



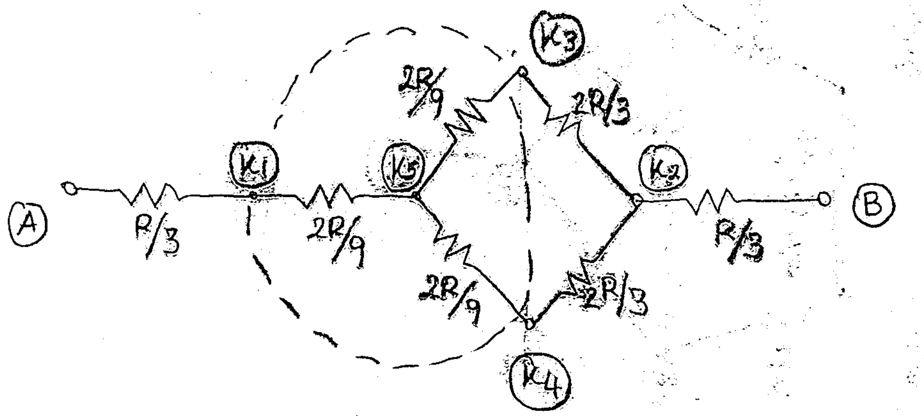
(Σχ 2.2)

προφανώς

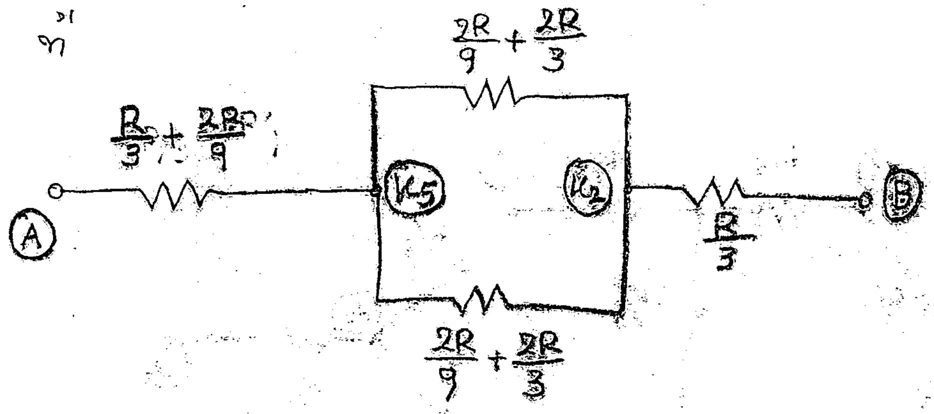


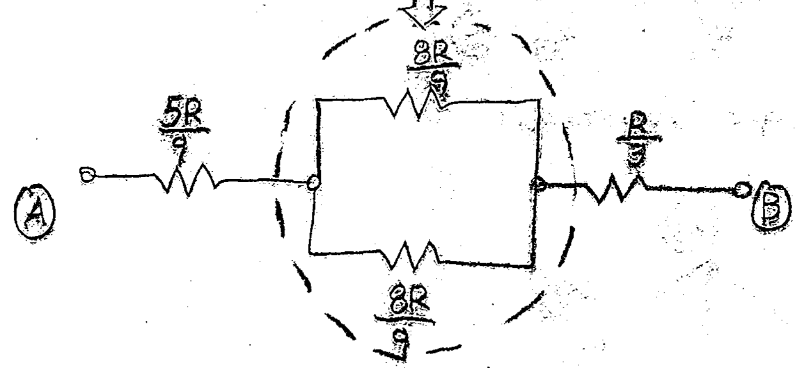
άρα

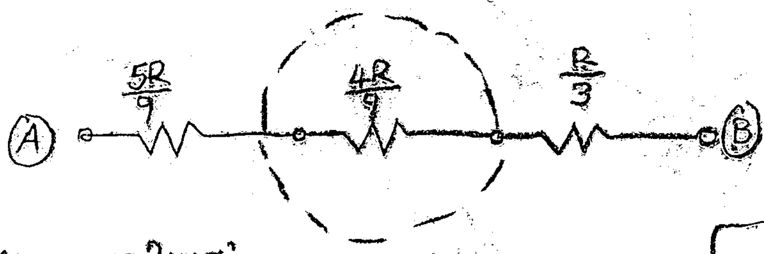
το (Σχ 2.2) γίνεται:



ή







άρα τελικά

$$R_{AB} = \frac{5R}{9} + \frac{4R}{9} + \frac{R}{3} \Rightarrow \boxed{R_{AB} = \frac{4R}{3}}$$