# 9) Μέθοδος ρευμάτων Βρόχων



## 9.1 Εισαγωγή

Είναι γνωστός ο τρόπος επίλυσης (ανάλυσης) οποιουδήποτε ηλεκτρικού δικτύου με εφαρμογή των Νόμων Kirchhoff

Συγκεκριμένα:
- Έχουμε ηλ δίκτυο που έχει n - κόμβους και b - κλάδους
  άγνωστοι = 2b (τάση και ρεύμα σε κάθε κλάδο)
  από σχέσεις τάσεως-ρεύματος → τελικά οι άγνωστοι είναι b

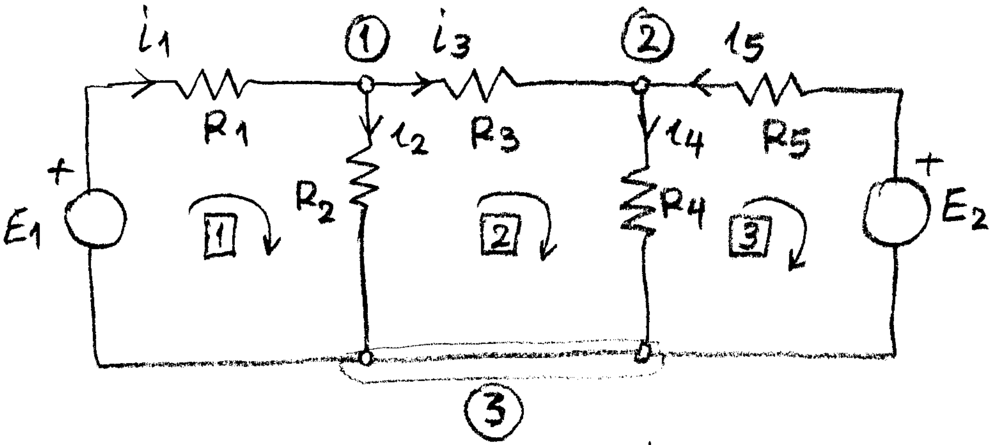
από Ν.Ρ.Κ n κόμβοι δίνουν → (n-1) ανεξ. εξισώσεις
οι υπόλοιπες b-(n-1) ανεξ. εξισώσεις θα ληφθούν από τον Ν.Τ.Κ. στους απλούς βρόχους (ή οφθαλμούς)

Η μέθοδος που θα αναπτυχθεί παρακάτω "Μέθοδος ρευμάτων Βρόχων" απλοποιεί ακόμα περισσότερο το θέμα επίλυση δικτύου (λιγοστεύει τους αγνώστους και τις εξισώσεις) κάνοντας μια έξυπνη παραδοχή που αρχικά φαίνεται λίγο ασαφής αλλά τελικά αποδεικνύεται πολύ χρήσιμη...

Προχωράμε παρακάτω στην διατύπωση της με ένα απλό παράδειγμα.

## 9.2 Διατύπωση της μεθόδου - Παράδειγμα

Έστω το ηλ. δίκτυο (αναφερόμαστε για απλότητα αρχικά σε δίκτυο Σ.Ρ.)




το δίκτυο έχει $n = 3$ κόμβους

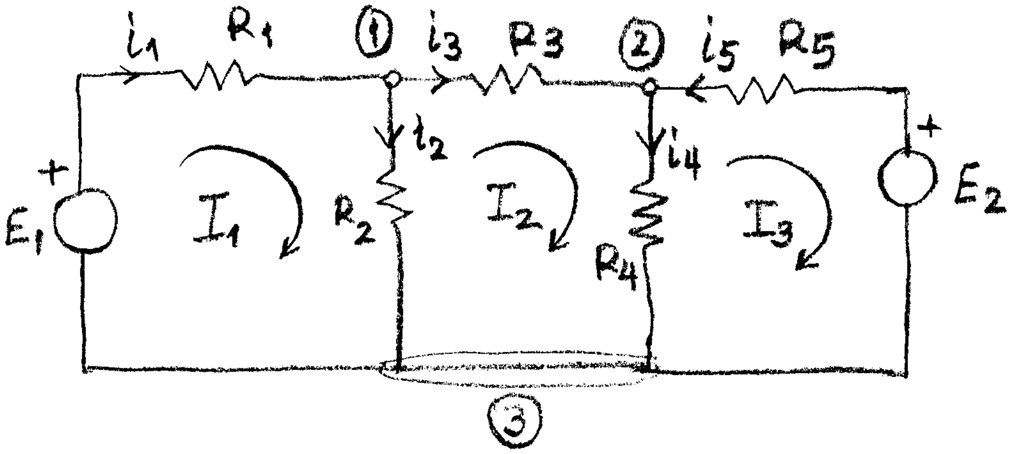
$b = 5$ κλάδους

και 3 απλούς βρόχους (οφθαλμούς) $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$

οι άγνωστοι είναι τα 5 ρεύματα $\{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5\}$

Στο σημείο αυτό:

- Εισάγουμε 3 "φανταστικά" ρεύματα, τα ρεύματα βρόχων $I_1$, $I_2$, $I_3$ (φαίνονται στο παρακάτω σχήμα)

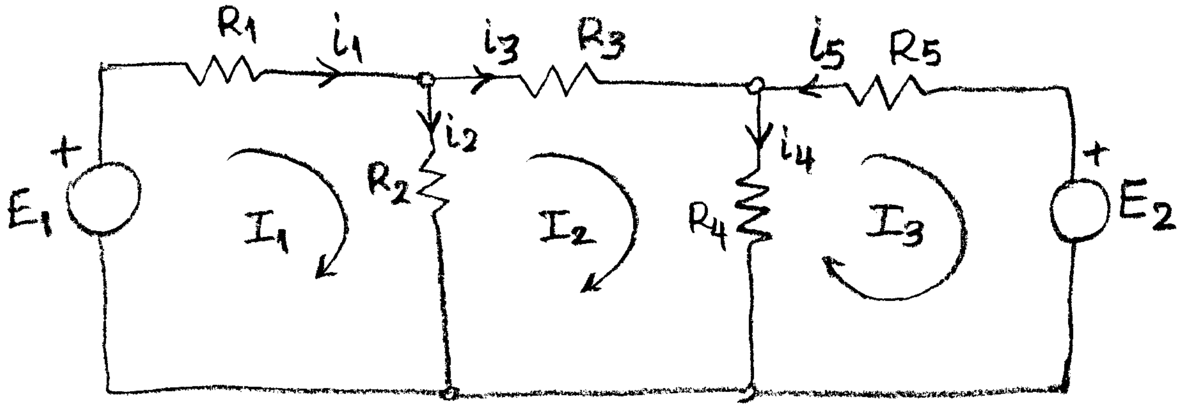


- Τα ρεύματα $I_1, I_2, I_3$ θεωρείται ότι διαρρέουν τους απλούς βρόχους $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ και $\boxed{3}$ πράγμα „αφύσικο" γιατί ένα ρεύμα διαρρέει κλάδο και όχι βρόχο γι' αυτό και τα ρεύματα αυτά τα ονομάσαμε "φανταστικά ρεύματα" (δεν υπάρχουν στην πραγματικότητα!)

- Η φορά των $I_1, I_2, I_3$ επιλέγεται αυθαίρετα (δεξιόστροφη ή αριστερόστροφη σε κάθε βρόχο)
(Συνήθως - για απλότητα - επιλέγονται όλα δεξιόστροφα ή όλα αριστερόστροφα)

- Ο αριθμός των απλών βρόχων (οφθαλμών) καθορίζει και τον αριθμό των ρευμάτων $I_i$

- Παρακάτω εκφράζουμε τα ρεύματα κλάδων (στο συγκεκριμένο παράδειγμα) συναρτήσει των ρευμάτων βρόχων.




- το ρεύμα $i_1$ ανήκει μόνο στον βρόχο $\boxed{1}$ άρα $i_1 = I_1$ γιατί τα $i_1$ και $I_1$ είναι ομόρροπα

- το ρεύμα $i_2$ ανήκει στους βρόχους $\boxed{1}$ και $\boxed{2}$ και είναι ομόρροπο με το $I_1$ και αντίρροπο με το $I_2$

άρα $i_2 = I_1 - I_2$

- Ομοια σκεπτόμενοι θα έχουμε:

$$i_3 = I_2$$

$$i_4 = I_2 - I_3$$

και $i_5 = - I_3$ (αντίρροπα)

Συνοψίζουμε:

Εκφράσαμε τα 5 ρεύματα κλάδων ($i_1, i_2, i_3, i_4, i_5$) συναρτήσει μόνο των 3 ρευμάτων βρόχων ($I_1, I_2, I_3$) δηλαδή αν βρούμε τα $I_1, I_2, I_3$ αμέσως βρίσκουμε και τα $i_1, i_2, i_3, i_4, i_5$ δηλαδή έχουμε επιλύσει πλήρως το εν λόγω δίκτυο...

χρειαζόμαστε 3 εξισώσεις (ανεξάρτητες) για τον υπολογισμό των $I_1, I_2, I_3$. Ποιές θα είναι αυτές;

Απάντηση: - Προφανώς οι 3 εξισώσεις απο τον Νομο Τάσεων Kirchhoff στους 3 απλούς βρόχους!

Δηλαδή:

N.T.K. $\boxed{1}$ $-E_1 + R_1 i_1 + R_2 i_2 = 0$ (9.1)

N.T.K. $\boxed{2}$ $-R_2 i_2 + R_3 i_3 + R_4 i_4 = 0$ (9.2)

N.T.K. $\boxed{3}$ $-R_4 i_4 - R_5 i_5 + E_2 = 0$ (9.3)

Έχουμε και τις σχέσεις

$i_1 = I_1$ (9.4)

$i_2 = I_1 - I_2$ (9.5)

$i_3 = I_2$ (9.6)

$i_4 = I_2 - I_3$ (9.7)

$i_5 = -I_3$ (9.8)

αντικαθιστούμε τις (9.4) – (9.8) στις (9.1) έως (9.3) και έχουμε:

$$-E_1 + R_1 I_1 + R_2(I_1 - I_2) = 0 \quad (9.9)$$

$$-R_2(I_1 - I_2) + R_3 I_2 + R_4(I_2 - I_3) = 0 \quad (9.10)$$

$$-R_4(I_2 - I_3) - R_5(-I_3) + E_2 = 0 \quad (9.11)$$

Ανακατατάσσουμε τις 3 τελευταίες εξισώσεις:

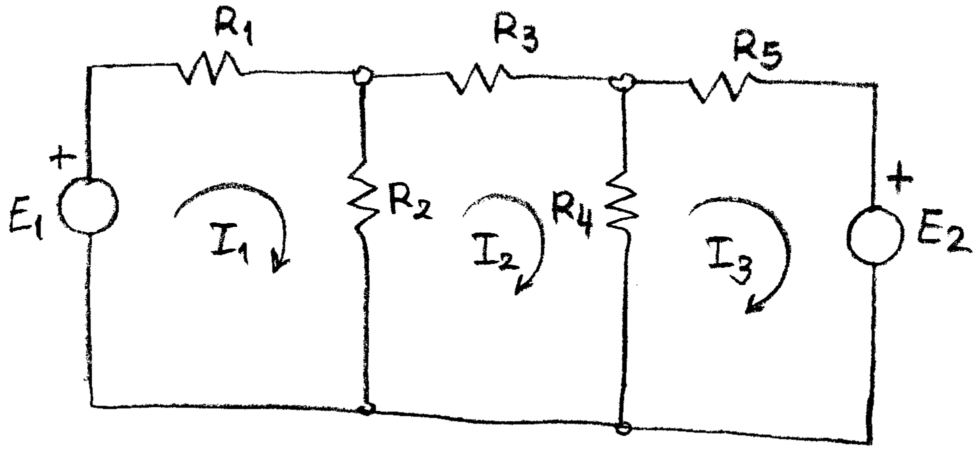
$$
\begin{aligned}
(R_1+R_2)I_1 - R_2 I_2 &= E_1 \\
-R_2 I_1 + (R_2+R_3+R_4)I_2 - R_4 I_3 &= 0 \\
-R_4 I_2 + (R_4+R_5)I_3 &= -E_2
\end{aligned}
$$

ή σε μορφή πινάκων

$$
\begin{bmatrix} R_1+R_2 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2+R_3+R_4 & -R_4 \\ 0 & -R_4 & R_4+R_5 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} E_1 \\ 0 \\ -E_2 \end{bmatrix}
$$

Η μορφή που προέκυψε και έχει γενική ισχύ θα μας επιτρέψει να γράφουμε τις εξισώσεις βρόχων με "επισκόπηση" (inspection), ακολουθώντας την. μεθοδολογία:

Ξανασχεδιάζουμε το δίκτυο




1) Εντοπίζουμε τους απλούς βρόχους (οφθαλμούς) και τοποθετούμε με αυθαίρετη φορά τα ρεύματα βρόχων
(σύσταση: να είναι όλα ομόρροπα)
Εδώ θέσαμε τα $I_1$, $I_2$, $I_3$

2) Το σύστημα με αγνώστους τα $I_1, I_2, I_3$ θα έχει μορφή:

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma E_1 \\ \Sigma E_2 \\ \Sigma E_3 \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \widehat{R} \cdot \widehat{I} = \widehat{E}$$

Ο πίνακας $\widehat{R}$ θα είναι συμμετρικός
δηλαδή
$$R_{12} = R_{21}$$
$$R_{13} = R_{31}$$
$$R_{23} = R_{32}$$

3) Οι τιμές των στοιχείων του $\widehat{R}$ προκύπτουν ως εξής:

γιά τα διαγώνια στοιχεία

$R_{11}$ , $R_{22}$ , $R_{33}$

Οι τιμές των διαγωνίων στοιχείων είναι πάντα θετικές και είναι ίσες με το <u>άθροισμα των αντιστάσεων</u> που υπάρχουν στόν δεδομένο βρόχο

Παρατηρήστε:

$$R_{11} = R_1 + R_2 \,, \quad R_{22} = R_2 + R_3 + R_4 \,, \quad R_{33} = R_4 + R_5$$

Οι τιμές του στοιχείου $R_{ij} = R_{ji}$ $(i \neq j)$ θα είναι το άθροισμα <u>τών κοινών</u> αντιστάσεων που υπάρχουν στους βρόχους $i$ και $j$ με πρόσημο:

- θετικό αν τα ρεύματα $I_i$ και $I_j$ διαρρέουν ομόρροπα τις κοινές αντιστάσεις
- αρνητικό αν τις διαρρέουν αντίρροπα

<u>Παρατηρήστε:</u>

$R_{12} = R_{21} = -R_2$ (κοινή η $R_2$ στούς βρόχους $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ με αντίρροπα ρεύματα)

$R_{13} = R_{31} = 0$ (<u>δεν υπάρχει</u> κοινή αντίσταση στους βρόχους $\boxed{1}$ και $\boxed{3}$)

$R_{23} = R_{32} = -R_4$ (κοινή η $R_4$ στούς βρόχους $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ με αντίρροπα ρεύματα)

4) Οι τιμές των στοιχείων του πίνακα $\hat{E}$ (Β' μέλος – πηγές) προκύπτουν ως εξής:

το $\sum E_i$ είναι το αλγεβρικό άθροισμα των πηγών τάσεως που υπάρχουν στον βρόχο $i$

– αν η φορά διαγραφής του $I_i$ <u>βρίσκει πρώτα</u> το (–) της πηγής $E$ τότε η $E$ λαμβάνεται με θετικό πρόσημο

– αν η φορά διαγραφής του $I_i$ <u>βρίσκει πρώτα</u> το (+) της πηγής $E$ τότε η πηγή $E$ λαμβάνεται με αρνητικό πρόσημο

<u>Παρατηρήστε:</u>

$\sum E_1 = E_1$ (μόνο η $E_1$ υπάρχει στον βρόχο $\boxed{1}$ και το $I_1$ "βρίσκει" πρώτα το (–) της $E_1$)

$\sum E_2 = 0$ (Δεν υπάρχουν πηγές στον βρόχο $\boxed{2}$)

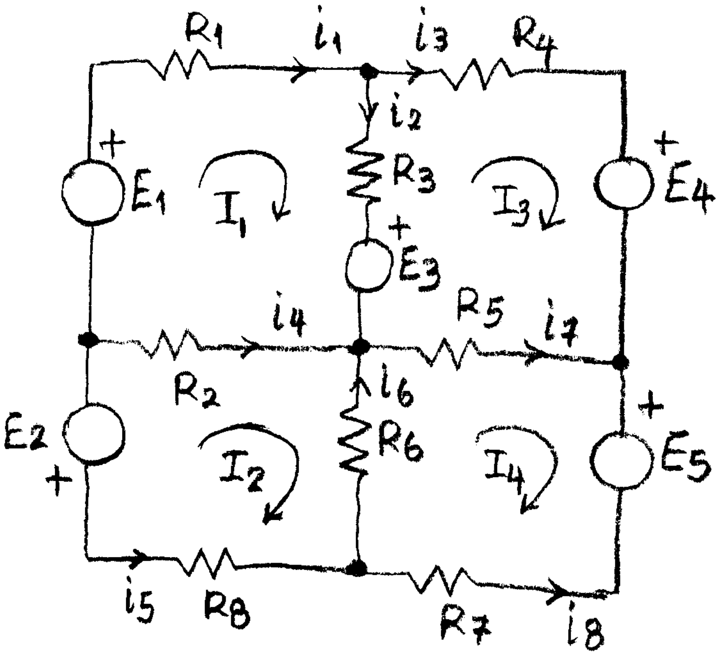
$\sum E_3 = -E_2$ (γιατί;)

Η ανωτέρω μέθοδος γραφής των εξισώσεων βρόχων με επισκόπηση είναι πολύ εύκολη στην εφαρμογή της.

Ακολουθούν παραδείγματα:

# Παράδειγμα 1

Στο δίκτυο του σχήματος να γραφούν οι εξισώσεις βρόχων, με επισκόπηση




Απ/

Παρατηρώ ότι το δίκτυο έχει $b = 8$ κλάδους και 4 οφθαλμούς αντί για σύστημα $(8 \times 8)$ μπορεί να επιλυθεί με την μέθοδο βρόχων με σύστημα $(4 \times 4)$!

Τοποθετούμε τα 4 ρεύματα βρόχων (αυθαίρετες φορές)

$$(I_1, I_2, I_3, I_4)$$

Γράφουμε με επισκόπηση τις εξισώσεις ρευμάτων βρόχων

$$\begin{bmatrix} R_1+R_2+R_3 & -R_2 & -R_3 & 0 \\ -R_2 & R_2+R_6+R_8 & 0 & -R_6 \\ -R_3 & 0 & R_3+R_4+R_5 & -R_5 \\ 0 & -R_6 & -R_5 & R_5+R_6+R_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 - E_3 \\ -E_2 \\ E_3 - E_4 \\ -E_5 \end{bmatrix}$$

Εκφράζουμε τα ρεύματα κλάδων $i_1, \dots, i_8$ συναρτήσει των ρευμάτων βρόχων

$$i_1 = I_1$$

$$i_2 = I_1 - I_3$$

$$i_3 = I_3$$

$$i_4 = I_2 - I_1$$

$$i_5 = -I_2$$

$$i_6 = I_4 - I_2$$

$$i_7 = I_4 - I_3$$

$$i_8 = -I_4$$

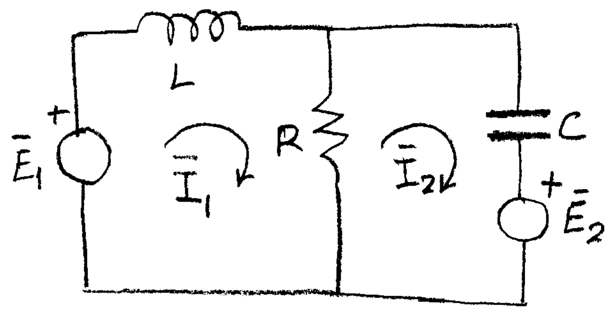
## 9.3. Γενίκευση της μεθόδου στην Η.Μ.Κ. και στο πεδίο του χρόνου

Η μέθοδος χρησιμοποιείται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο στην Η.Μ.Κ. και στο πεδίο χρόνου $(Z(D))$.

Παραθέτουμε 2 παραδείγματα:

## Παράδειγμα 2

Να γραφούν οι εξισώσεις βρόχων στο παρακάτω δίκτυο




γνωστά $R, L, C, \bar{E}_1, \bar{E}_2, \omega$

2 απλοί βρόχοι άρα 2 ρεύματα $\bar{I}_1, \bar{I}_2$

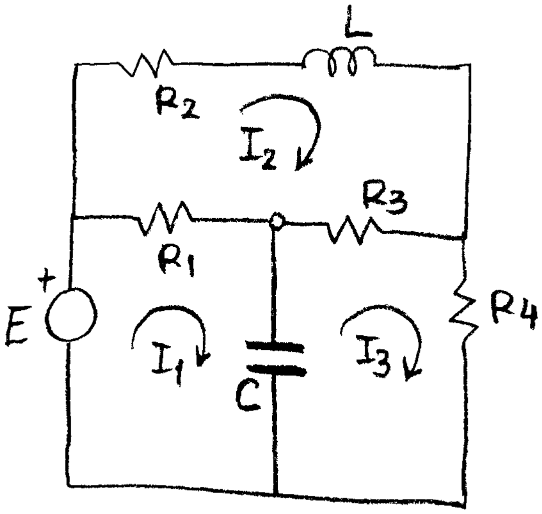
Θα έχουμε:

$$\begin{bmatrix} R + j\omega L & -R \\ -R & R + \dfrac{1}{j\omega C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{E}_1 \\ -\bar{E}_2 \end{bmatrix}$$

Το σύστημα είναι μιγαδικό προφανώς

## Παράδειγμα 3

Να γραφούν οι εξισώσεις βρόχων στο παρακάτω δίκτυο (στο πεδίο του χρόνου)




Θα έχουμε:

$$\begin{bmatrix} R_1+\frac{1}{CD} & -R_1 & -\frac{1}{CD} \\ -R_1 & R_1+R_2+R_3+LD & -R_3 \\ -\frac{1}{CD} & -R_3 & R_3+R_4+\frac{1}{CD} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(t) \\ I_2(t) \\ I_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Πρόκειται για σύστημα διαφορικών εξισώσεων