10) Μέθοδος τάσεων κόμβων

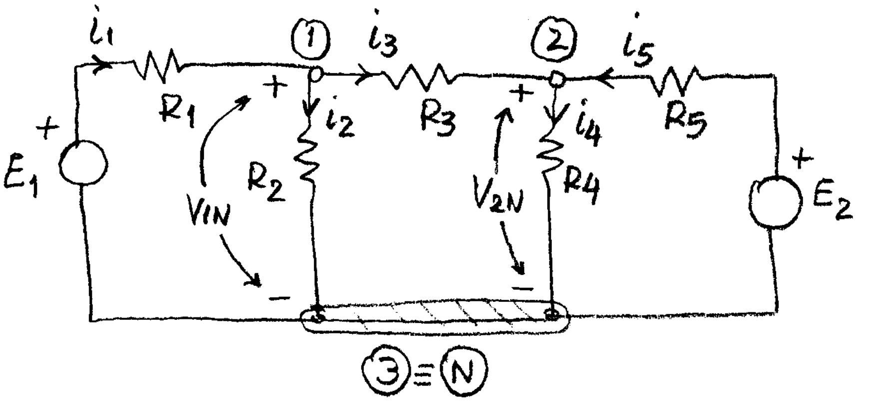
10.1 Εισαγωγή

Είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο μια μέθοδο (την μέθοδο ρευμάτων βρόχων) με την οποία απλοποιείται σημαντικά η ανάλυση (επίλυση) ενός ηλ. δικτύου
Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιεί ως αγνώστους κάποια "εικονικά" ρεύματα και γίνεται εφαρμογή μόνον του Νόμου Τάσεων Kirchhoff στους απλούς βρόχους
Ο Νόμος Ρευμάτων Kirchhoff δεν χρησιμοποιείται καθόλου
Είναι προφανές ότι θα υπάρχει δυαδική μέθοδος που θα έχει αγνώστους κάποιες τάσεις και θα κάνει εφαρμογή μόνον του Νόμου Ρευμάτων Kirchhoff σε n-1 κόμβους
Η μέθοδος αυτή λέγεται "Μέθοδος Τάσεων Κόμβων"

Θα την διατυπώσουμε παρακάτω χρησιμοποιώντας το ίδιο ακριβώς δίκτυο όπως και πριν.

10.2 Διατύπωση της μεθόδου – παράδειγμα

χρησιμοποιούμε το ίδιο ηλ. δίκτυο όπως στη σελ. 93



Το δίκτυο έχει 3 κόμβους, επιλέγουμε έναν π.χ τον (3) και τον ονομάζουμε κόμβο αναφοράς (N)

Σημειώνουμε με V_{1N} και V_{2N} τις τάσεις των κόμβων (1) και (2) αντίστοιχα ως πρός τον κόμβο αναφοράς (N)

Μπορούμε να εκφράσουμε <u>όλα</u> τα ρεύματα κλάδων

$$\{ i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 \}$$

συναρτήσει των τάσεων V_{1N}, V_{2N} και των τάσεων των πηγών E_1, E_2. Θα έχουμε

$$V_{1N} = -i_1 R_1 + E_1 \Rightarrow i_1 = \frac{E_1 - V_{1N}}{R_1} \qquad (10.1)$$

$$V_{1N} = i_2 R_2 \Rightarrow i_2 = \frac{V_{1N}}{R_2} \qquad (10.2)$$

$$-V_{1N} + i_3 R_3 + V_{2N} = 0 \Rightarrow i_3 = \frac{V_{1N} - V_{2N}}{R_3} \qquad (10.3)$$

$$V_{2N} = i_4 R_4 \Rightarrow i_4 = \frac{V_{2N}}{R_4} \qquad (10.4)$$

$$V_{2N} = -i_5 R_5 + E_2 \Rightarrow i_5 = \frac{E_2 - V_{2N}}{R_5} \qquad (10.5)$$

Συνοψίζουμε:

Έχουμε εκφράσει τα 5 ρεύματα κλάδων ($i_1, i_2, \ldots, i_5$) συναρτήσει μόνο των 2 τάσεων κόμβων (V_{1N}, V_{2N}), αρχικά άγνωστες και των τάσεων των πηγών (E_1, E_2) που είναι γνωστές ποσότητες

Χρειαζόμαστε 2 εξισώσεις (ανεξάρτητες) για τον υπολογισμό των V_{1N} και V_{2N}. Ποιες θα είναι αυτές;

Απάντηση: - Προφανώς οι 2 εξισώσεις από τον Νόμο Ρευμάτων Kirchhoff στους 2 κόμβους

Δηλαδή:

N.P.K. (1) $\quad i_1 - i_2 - i_3 = 0 \quad (10.6)$

N.P.K. (2) $\quad i_3 - i_4 + i_5 = 0 \quad (10.7)$

Αντικαθιστούμε τις εκφράσεις των $i_1, i_2, \ldots, i_5$ (σχέσεις (10.1), …, (10.5)) στις (10.6), (10.7) και

έχουμε:

$$\frac{E_1 - V_{1N}}{R_1} - \frac{V_{1N}}{R_2} - \frac{V_{1N} - V_{2N}}{R_3} = 0 \qquad (10.8)$$

$$\frac{V_{1N} - V_{2N}}{R_3} - \frac{V_{2N}}{R_4} + \frac{E_2 - V_{2N}}{R_5} = 0 \qquad (10.9)$$

αναχατατάσσουμε τις 2 εξισώσεις

$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)V_{1N} - \frac{1}{R_3}V_{2N} = \frac{E_1}{R_1}$$

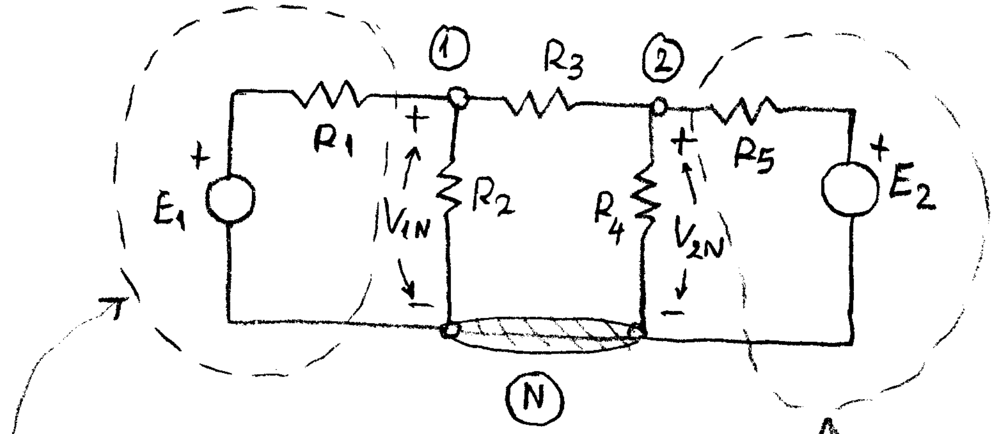
$$-\frac{1}{R_3}V_{1N} + \left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right)V_{2N} = \frac{E_2}{R_5}$$

ή σε μορφή πινάκων

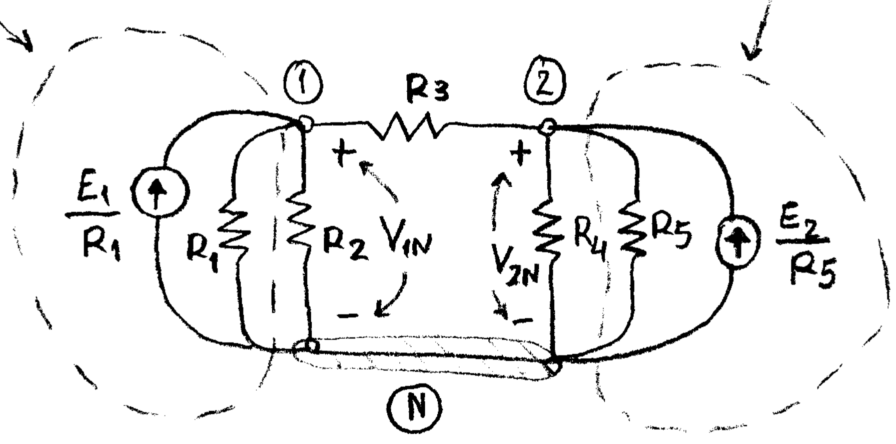
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1N} \\ V_{2N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{R_1} \\ \frac{E_2}{R_5} \end{bmatrix}$$

Στο σημείο αυτό κάνουμε ένα μετασχηματισμό πηγών στο δίκτυο, δηλαδή:

από το αρχικό



πηγαίνουμε στο ισοδύναμο



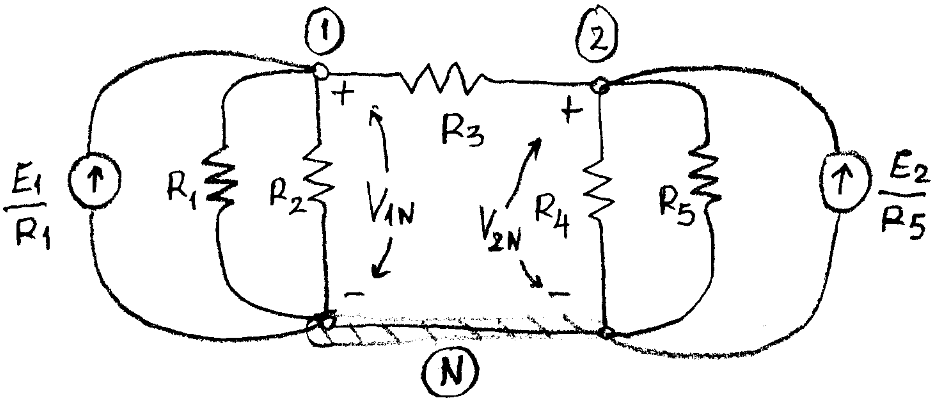
- Οι 2 πηγές τάσεως έγιναν πηγές ρεύματος
- Οι τάσεις V_{1N}, V_{2N} προφανώς <u>ΔΕΝ</u> άλλαξαν

Η κίνηση αυτή έγινε για να γίνει κατανοητός ο τρόπος γραφής των εξισώσεων κόμβων με επισκόπηση

Δηλαδή το δίκτυο πρέπει να έλθει σε μορφή τέτοια, που <u>όλες</u> οι πηγές του να είναι <u>πηγές ρεύματος</u>

Άς δούμε τώρα τον τρόπο γραφής με επισκόπηση

Ξανασχεδιάζουμε το δίκτυο



1) - Εκλέγεται ο κόμβος αναφοράς (N)

- Σημειώνονται οι τάσεις V_{1N} και V_{2N} (άγνωστες)

2) Το σύστημα με αγνώστους τις V_{1N}, V_{2N} θα έχει μορφή

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1N} \\ V_{2N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma I_{n_1} \\ \Sigma I_{n_2} \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \hat{Y} \cdot \hat{V} = \hat{I}_n$$

ο πίνακας $\hat{Y}$ θα είναι συμμετρικός $(Y_{12} = Y_{21})$

3) Οι τιμές των στοιχείων του $\hat{Y}$ προκύπτουν ως εξής:

- για τα διαγώνια στοιχεία Y_{11}, Y_{22}

Οι τιμές των διαγωνίων στοιχείων είναι πάντα θετικές και είναι ίσες με το άθροισμα των αγωγιμοτήτων που έχουν το ένα άκρο τους συνδεδεμένο στον εν λόγω κόμβο

Παρατηρήστε:

$$Y_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \quad , \quad Y_{22} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}$$

- για τα μη διαγώνια στοιχεία $Y_{ij} = Y_{ji}$ $(i \neq j)$

θα είναι το άθροισμα των αγωγιμοτήτων (συνήθως μία μόνον) που είναι συνδεδεμένες μεταξύ των 2 κόμβων, ΠΑΝΤΑ με αρνητικό πρόσημο μπροστά

Παρατηρήστε:

$$Y_{12} = Y_{21} = -\frac{1}{R_3}$$

(η R_3 συνδέεται μόνον μεταξύ 1 και 2)

4) Οι τιμές των στοιχείων του πίνακα $\bar{I}_n$ (β' μέλος – πηγές ρεύματος) προκύπτουν ως εξής:

Το ΣI_{n_i} είναι το άθροισμα των πηγών ρεύματος που συνδέονται στον κόμβο i. Θετικό πρόσημο (+) αν το ρεύμα της πηγής φθάνει στον κόμβο, αρνητικό πρόσημο (−) αν το ρεύμα της πηγής φεύγει από τον κόμβο.

Παρατηρήστε ότι:

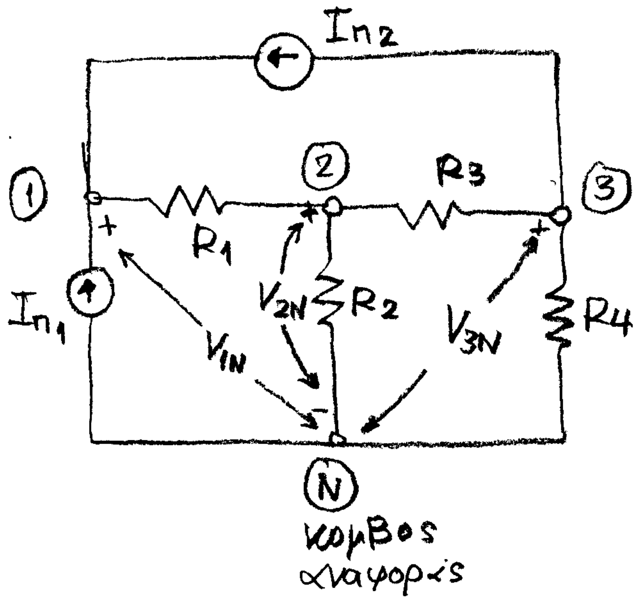
$$\Sigma I_{n_1} = \frac{E_1}{R_1} \quad , \quad \Sigma I_{n_2} = \frac{E_2}{R_5} \qquad (\text{γιατί;})$$

Επαναλαμβάνουμε εδώ ότι για την γραφή των εξισώσεων τάσεων κόμβων το δίκτυο πρέπει να έχει <u>ΜΟΝΟΝ</u> πηγές ρεύματος. Αν έχει πηγές τάσεως εύκολα τις μετατρέπουμε σε πηγές ρεύματος!

Ακολουθούν παραδείγματα

Παράδειγμα 1)

Στο δίκτυο του σχήματος να γραφούν με επισκόπηση οι εξισώσεις κόμβων



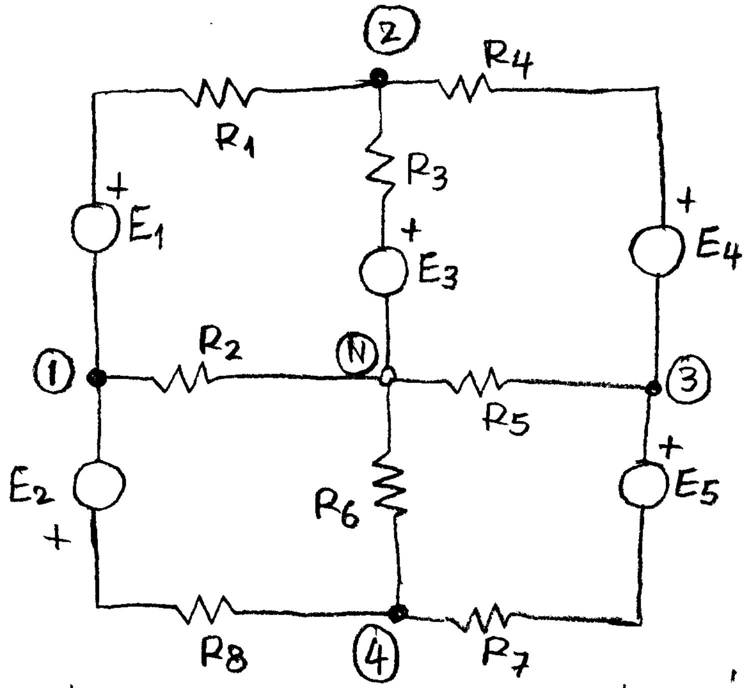
Υπάρχουν 4 κόμβοι

Απ/

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} \\ 0 & -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1N} \\ V_{2N} \\ V_{3N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_1}+I_{n_2} \\ 0 \\ -I_{n_2} \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 2

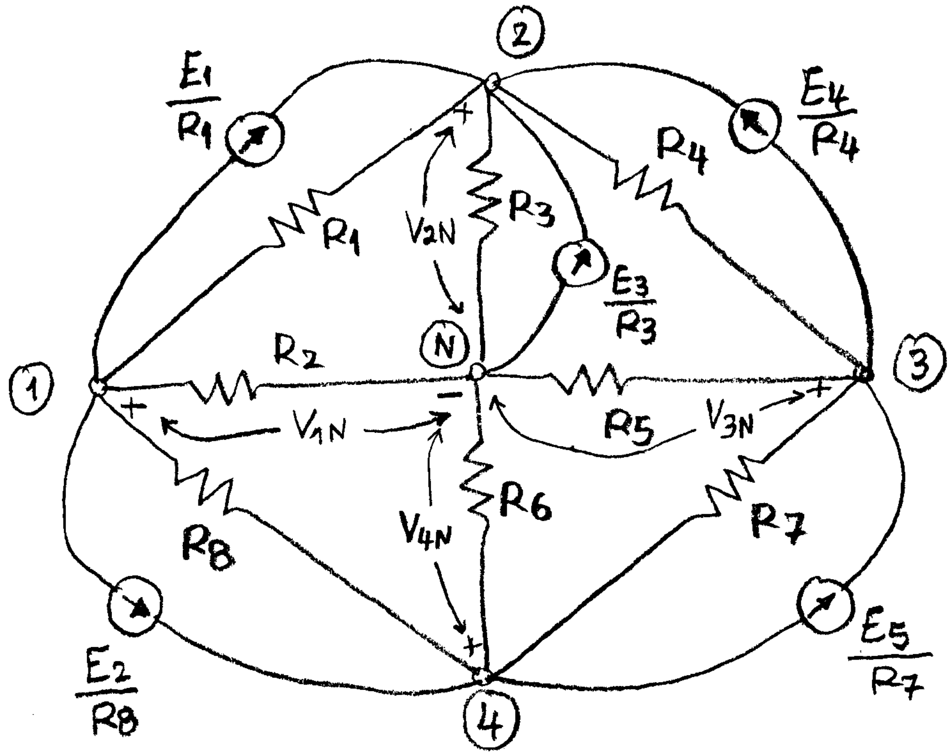
Ας επαναλάβουμε το δίκτυο του παραδείγματος της σελίδας 101, ζητώντας τώρα να γραφούν οι εξισώσεις κόμβων



το δίκτυο έχει $n = 5$ κόμβους

- εκλέγεται ο κόμβος αναφοράς (N) στο κέντρο

μετατρέπουμε όλες τις πηγές τάσεως σε πηγές ρεύματος

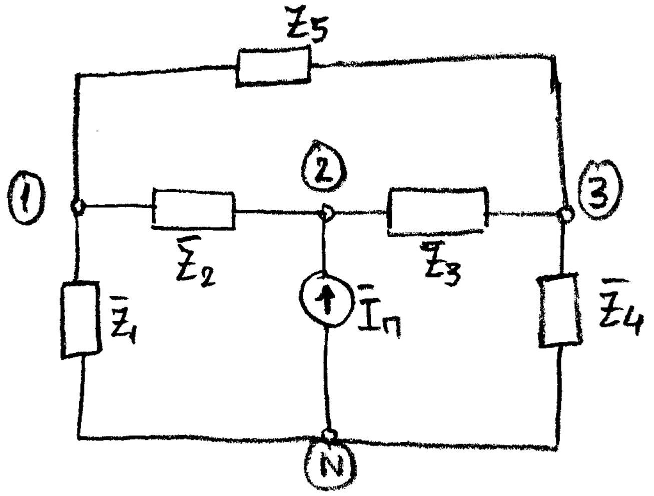


γράφουμε με επισκόπηση τις εξισώσεις κόμβων:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_8} & -\frac{1}{R_1} & 0 & -\frac{1}{R_8} \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_7} & -\frac{1}{R_7} \\ -\frac{1}{R_8} & 0 & -\frac{1}{R_7} & \frac{1}{R_6}+\frac{1}{R_7}+\frac{1}{R_8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1N} \\ V_{2N} \\ V_{3N} \\ V_{4N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{E_1}{R_1}-\frac{E_2}{R_8} \\ \frac{E_1}{R_1}+\frac{E_3}{R_3}+\frac{E_4}{R_4} \\ -\frac{E_4}{R_4}+\frac{E_5}{R_7} \\ \frac{E_2}{R_8}-\frac{E_5}{R_7} \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 3

Να γραφούν οι εξισώσεις κόμβων στο παρακάτω δίκτυο στην Η.Μ.Κ.



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\bar{Z}_1}+\frac{1}{\bar{Z}_2}+\frac{1}{\bar{Z}_5} & -\frac{1}{\bar{Z}_2} & -\frac{1}{\bar{Z}_5} \\ -\frac{1}{\bar{Z}_2} & \frac{1}{\bar{Z}_2}+\frac{1}{\bar{Z}_3} & -\frac{1}{\bar{Z}_3} \\ -\frac{1}{\bar{Z}_5} & -\frac{1}{\bar{Z}_3} & \frac{1}{\bar{Z}_3}+\frac{1}{\bar{Z}_4}+\frac{1}{\bar{Z}_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_{1N} \\ \bar{V}_{2N} \\ \bar{V}_{3N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{I}_\pi \\ 0 \end{bmatrix}$$