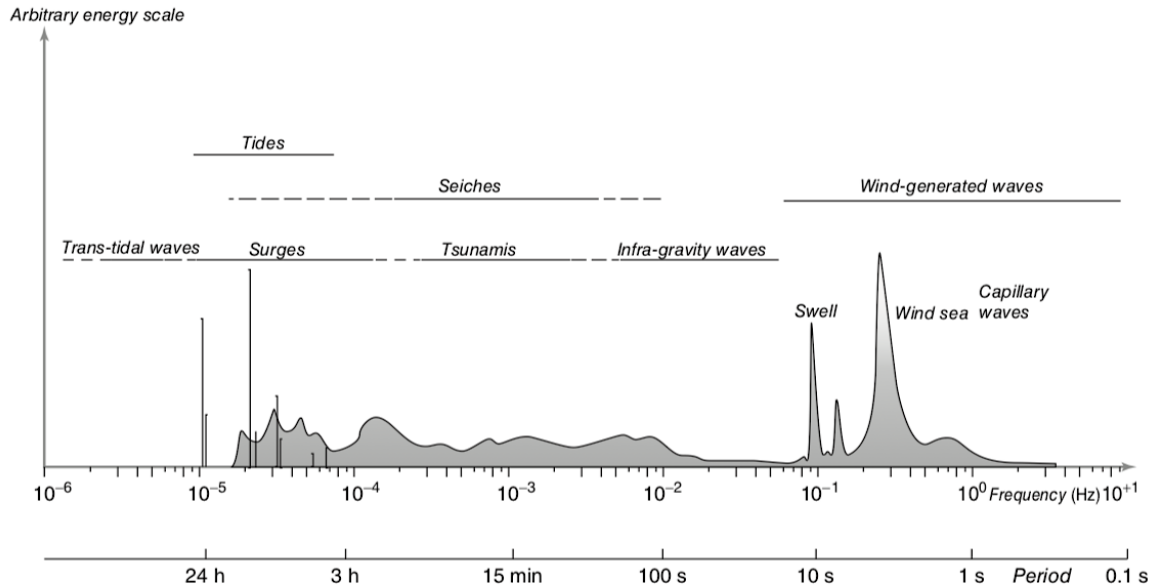
1. Μοντελοποιώντας το θαλάσσιο περιβάλλον: Βασικές παραδοχές και εξισώσεις

1.1 Εισαγωγή

Η πρόβλεψη της συμπεριφοράς ενός συστήματος επηρεάζεται τόσο από το ίδιο το σύστημα, όσο και από το περιβάλλον στο οποίο λειτουργεί. Στην περίπτωση των πλοίων, το περιβάλλον για το οποίο σχεδιάζονται να επιχειρούν είναι η επιφάνεια της θάλασσας, όπου η πιο συχνή και ταυτόχρονα πιο σημαντική δυναμική διέγερση που δέχονται τα πλοία είναι οι επιφανειακοί θαλάσσιοι κυματισμοί. Για το λόγο αυτό στις παραγράφους που ακολουθούν παρουσιάζεται μία σύντομη εισαγωγή στον τρόπο με τον οποίο μοντελοποιούνται οι επιφανειακοί θαλάσσιοι κυματισμοί[1] για τη μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς των πλοίων (σχήμα 1).



Σχήμα 1. Οι συχνότητες και οι περίοδοι των θαλάσσιων κυματισμών. Κύματα με περίοδο μικρότερη των 10sec οφείλονται στο άνεμο (ανεμογενείς κυματισμοί). Πηγή: Toffoli, A., Bitner-Gregersen, E.M. (2017). Types of Ocean Surface Waves, Wave Classification, Encyclopedia of Maritime and Offshore Engineering. Jogn Wiley & Sons, Ltd.

[1] Τα επιφανειακά κύματα τα οποία θα μελετηθούν για τα προβλήματα δυναμικής συμπεριφοράς των πλοίων είναι ανεμογενή. Υπάρχουν όμως και άλλες μορφές κυματισμών, όπως π.χ. τα ***εσωτερικά κύματα*** (internal waves), που εμφανίζονται στη διεπιφάνεια στρωμάτων νερού με διαφορετική πυκνότητα, τα ***πλανητικά κύματα*** (planetary or Rossby waves), τα οποία οφείλονται στη μεταβολή της δύναμης Coriolis κατά την κατεύθυνση Βορρά-Νότου και στη μεταβολή του βάθους της θάλασσας, οι ***παλίρροιες*** (tides), οι οποίες οφείλονται στη βαρυτική έλξη των θαλάσσιων μαζών από τον Ήλιο και τη Σελήνη, τα στασιμά κύματα (seiches) σε κλειστές θαλάσσιες περιοχές λόγω βαρομετρικών μεταβολών στην ατμόσφαιρα, κ.ά.

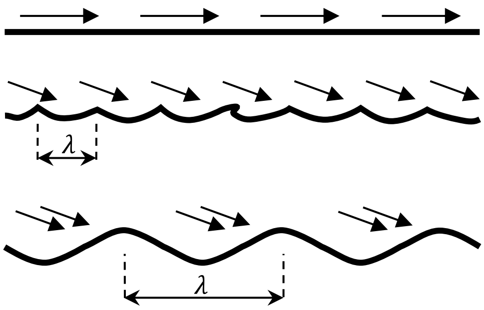
Οι επιφανειακοί θαλάσσιοι κυματισμοί (surface waves), οι οποίοι πολύ γενικά μπορούν να περιγραφούν ως άθροισμα αρμονικών ταλαντώσεων της διεπιφάνειας του νερού με τον αέρα γύρω από μία θέση ισορροπίας, έχουν διάφορες γενεσιουργές αιτίες, όπως π.χ. τοπικοί άνεμοι, σεισμοί, κύματα παραγόμενα από κινήσεις επιπλεόντων αντικειμένων, κ.ά. Η προέλευσή τους επηρεάζει/χαρακτηρίζει το ύψος και την περίοδό τους. Στην ανάλυση που ακολουθεί θα ασχοληθούμε με ανεμογενείς θαλάσσιους κυματισμούς, δηλαδή κυματισμούς οι οποίοι προέρχονται από τη μεταφορά ενέργειας από τα κατώτερα κινούμενα ατμοσφαιρικά στρώματα στις επιφανειακές θαλάσσιες μάζες. Οι ανεμογενείς κυματισμοί έχουν περίοδο κάτω των 10sec.

Υπάρχουν διάφορες θεωρίες σχετικά με τη γένεση των ανεμογενών κυματισμών [Phillips (1957), Miles (1960)]. Σύμφωνα με την επικρατούσα θεωρία, η κυματογένεση ξεκινά με γραμμική αύξηση του κύματος λόγω συντονισμού με τις τυρβώδεις διαταραχές πίεσης και τριβής στην επιφάνεια, και συνεχίζει με εκθετικό ρυθμό ανάπτυξης λόγω υδροδυναμικής αστάθειας. Η επίδραση του ανέμου μιας συγκεκριμένης κατεύθυνσης διαπιστώθηκε ότι προκαλεί κυματογένεση σε έναν τομέα $\pm 45°$ εκατέρωθεν της διεύθυνσης του ανέμου, με αποτέλεσμα να διαμορφώνεται ένα πεδίο τρισδιάστατων κυματισμών[2]. Έτσι, δημιουργούνται αρχικά κύματα μικρού ύψους, μικρού μήκους ($< 1{,}5cm$) και μικρής περιόδου ($< 0{,}1s$), τα οποία ονομάζονται ***κύματα επιφανειακής τάσης*** (***capillary waves*** ή ***ripples***), γιατί ο σημαντικότερος παράγοντας που τα επηρεάζει είναι η επιφανειακή τάση (εικόνα 1).

Εικόνα 1. Κύματα επιφανειακής τάσης (Capillary waves).
Πηγή: http://ksuweb.kennesaw.edu/~jdirnber/oceanography/LecuturesOceanogr/LecWaves/capillaryWaves.jpg

Αν συνεχίσει να φυσά ο άνεμος, συνεχίζεται η απορρόφηση ενέργειας από τη θαλάσσια μάζα και τα κύματα μεγαλώνουν σε μήκος και ύψος. Για κύματα με μήκος μεγαλύτερο των $7cm$, η επιφανειακή τάση έχει αμελητέα επιρροή (Kundu και Cohen, 2002). Ο μηχανισμός επαναφοράς των κυματισμών αυτών οφείλεται αποκλειστικά στην παρουσία του βαρυτικού πεδίου της Γης και για το λόγο αυτό ονομάζονται ***βαρυτικοί κυματισμοί*** (***gravity waves***). Ο άνεμος δημιουργεί παράλληλα κυματισμούς πολλών συχνοτήτων και μηκών, οι οποίοι μπορεί να «ταξιδεύουν» ταυτόχρονα.

[2] Πηγή: Καραμπάς Θ., Κρεστενίτης Ι. και Κουτίτας Χ. (2015). *Ακτομηχανική – Έργα Προστασίας Ακτών*. Εκδ. Ελληνικά Ακαδημαϊκά Συγγράμματα και Βοηθήματα, www.kallipos.gr.



Σχήμα 2: Σχηματική αναπαράσταση α) των δυνάμεων τριβής από τον άνεμο στην ήρεμη επιφάνεια της θάλασσας, β) capillary waves, και γ) βαρυτικών κυματισμών.

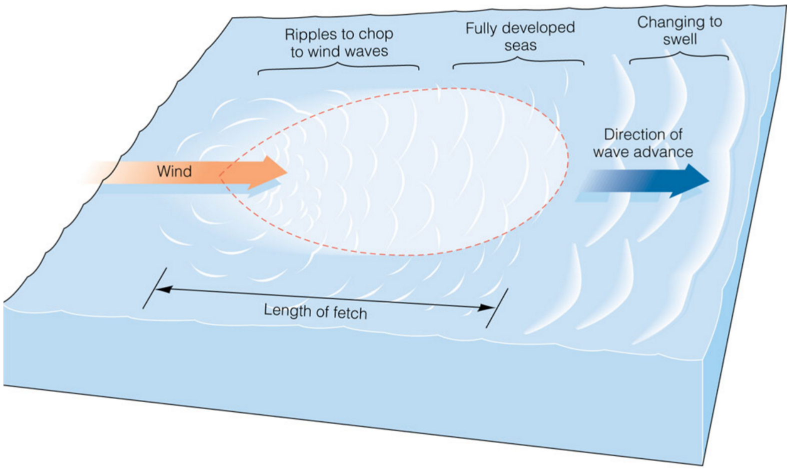
Η μεταφορά ενέργειας συνεχίζεται, μέχρι ο ρυθμός απορρόφησης ενέργειας από τη θάλασσα να γίνει ίσος με τον ρυθμό απώλειας ενέργειας, που οφείλεται κυρίως σε δύο μηχανισμούς: τη θραύση των κυματισμών (wave breaking) και την συνεκτικότητα (viscocity). Τότε, η σχετική ταχύτητα του ανέμου και του κύματος είναι μηδέν, δεν είναι δυνατή περαιτέρω μεταφορά ενέργειας και λέμε ότι έχουμε ***πλήρως ανεπτυγμένη θάλασσα*** (***fully developed sea***). Στις πλήρως ανεπτυγμένες θάλασσες, το ύψος των κυμάτων ξεπερνά το 1/7 του μήκους τους ($\frac{H}{L} > \frac{1}{7}$).

Εικόνα 2: Στην πλήρως ανεπτυγμένη θάλασσα η ταχύτητα του ανέμου ισούται με την ταχύτητα διάδοσης των κυματισμών.

Για τη μελέτη προβλημάτων δυναμικής συμπεριφοράς των πλοίων στη θάλασσα, οι κυματισμοί –οι οποίοι θεωρούνται δεδομένοι– είναι μήκους μεγαλύτερου του 1,5m και συχνοτήτων που μεταξύ 1s και 25s.

Όταν ο άνεμος σταματήσει, ο κυματισμός αποσβένει λόγω των παραπάνω φαινομένων, δημιουργώντας σχεδόν αρμονικούς κυματισμούς, οι οποίοι μπορεί να διαδοθούν σε μεγάλες αποστάσεις από την πηγή δημιουργίας τους. Αυτοί οι κυματισμοί ονομάζονται ***αποθάλασσες*** ή φουσκοθαλασσιές (***swells***) και έχουν περίοδο από 13s έως 24s (ή τυπικά μήκη κύματος μεταξύ 260m και 900m) και συνήθως μικρά ύψη. Οι κυματισμοί αυτοί αποσβένουν δυσκολότερα με αποτέλεσμα να μην είναι περίεργο να εμφανιστούν τέτοιοι κυματισμοί στην Αλάσκα, οι οποίοι δημιουργήθηκαν στον Ανταρκτικό Ωκεανό[3].

[3] Πηγή: Ardhuin F., Collard F. and Chapron B. (2009). *Observation of swell dissipation across oceans. Geophysical Research Letters*, 36.



Σχήμα 3: Οι τρεις φάσεις σχηματισμού, ανάπτυξης και απόσβεσης των ανεμογενών κυματισμών.
Πηγή: http://ksuweb.kennesaw.edu/~jdirnber/oceanography/LecuturesOceanogr/LecWaves/1011.jpg

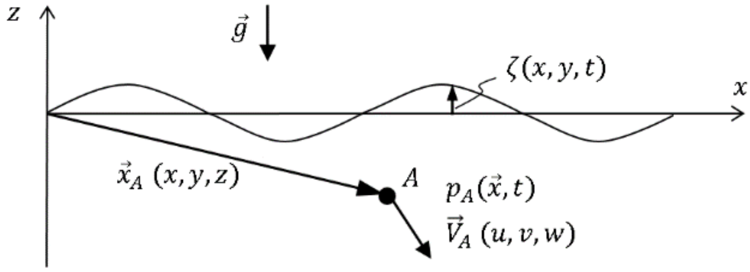
1.2 Η διατύπωση του γραμμικοποιημένου προβλήματος της ροής στη θάλασσα

Ας ξεκινήσουμε την ανάλυση, θεωρώντας έναν μονοκατευθυντικό αρμονικό κυματισμό σταθερής συχνότητας και πλάτους (σχήμα 3). Η ροή στο θαλάσσιο περιβάλλον, παρουσία βαρυτικών κυμάτων, προσεγγίζεται αρχικά από τη θεωρία της μη συνεκτικής ροής (*potential flow theory*), δηλαδή *θεωρούμε τη θάλασσα προσεγγίζεται ως ιδανικό ρευστό*:

Ιδανικό ρευστό $\Rightarrow$ Διατμητικές τάσεις $= 0$ $\Rightarrow$ Αστρόβιλο πεδίο ροής: $\vec{\omega} \equiv \nabla \times \vec{v} = \vec{0}$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι το διάνυσμα της ταχύτητας του ρευστού $\vec{v}(\vec{r},t)$ τη χρονική στιγμή t στη θέση $\vec{r} = (x,y,z)$, ως προς ένα σταθερό σύστημα συντεταγμένων στο χώρο, περιγράφεται ως η κλίση μιας βαθμωτής συνάρτησης $\Phi(\vec{r},t)$, η οποία καλείται **δυναμικό της ταχύτητας**:

$$\vec{v}(\vec{r},t) = (v_x, v_y, v_z) = \nabla\Phi \quad \Longrightarrow \quad \vec{v} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{e}_z \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} u \equiv v_x = \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} \\ v \equiv v_y = \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} \\ w \equiv v_z = \dfrac{\partial\Phi}{\partial z} \end{cases}$$



Σχήμα 4: Σχηματική απεικόνιση ενός τυχαίου σημείου A εντός του πεδίου της θάλασσας παρουσία κυματισμού.

Το δυναμικό της ταχύτητας (Φ), ως μέγεθος, δεν έχει κάποιο φυσικό νόημα, αλλά η εισαγωγή του διευκολύνει πολύ τη μαθηματική ανάλυση/μοντελοποίηση του ρευστού σε αστρόβιλο πεδίο ροής (irrotational flow), όπου δηλαδή $\vec{\omega} = \vec{0}$.

Στην συνέχεια εφαρμόζουμε δύο από τις βασικότερες αρχές της μηχανικής: την αρχή διατήρησης της μάζας και την αρχή διατήρησης της ορμής, πάνω στις οποίες θα στηριχτεί η μοντελοποίηση της ροής.

1.2.1 Αρχή διατήρησης της μάζας – Διαφορική εξίσωση μοντελοποίησης της θάλασσας

Χρησιμοποιώντας την σχέση του Euler και δεδομένου ότι η θάλασσα θεωρείται ασυμπίεστο ρευστό ($\rho = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$), έχουμε: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot (\nabla \Phi) = 0 \quad \Rightarrow$

$$\boxed{\nabla^2 \Phi = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0} \qquad \textit{Εξίσωση του Laplace}$$

Η περιγραφή της ροής στη θάλασσα προέρχεται από την επίλυση της εξίσωσης Laplace (γραμμική ομογενής μερική διαφορική εξίσωση 2ης τάξης), μέσω κατάλληλων οριακών συνθηκών στην επιφάνεια και στον πυθμένα.

1.2.2 Αρχή διατήρησης της ορμής – Δυναμική οριακή συνθήκη

Θεωρώντας ως μοναδικό εξωτερικό πεδίο δυνάμεων το βαρυτικό και δεδομένου των υποθέσεων μη-συνεκτικότητας και ασυμπιεστότητας του ρευστού, η διαφορική εξίσωση της ορμής περιγράφεται από τις *εξισώσεις Euler*:

$$\rho \cdot \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla p \qquad \Rightarrow \qquad \rho \cdot \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} \right) = \rho \vec{g} - \nabla p$$

Είναι:

- $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial \nabla \Phi}{\partial t} = \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)$
- $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} \;=\; \frac{1}{2}\nabla(\vec{v} \cdot \vec{v}) - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) \;=\; \frac{1}{2}\nabla(\vec{v} \cdot \vec{v}) \;=\; \nabla\left(\frac{1}{2} \cdot \vec{v} \cdot \vec{v}\right)$
- $\rho \vec{g} = -\rho g \vec{k} = -\nabla(\rho g z)$

Με βάση τα παραπάνω η εξίσωση της αρχή διατήρησης της ορμής γράφεται:

$$\rho \cdot \left(\nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) + \nabla \left(\frac{1}{2} \cdot \vec{v} \cdot \vec{v} \right) \right) = -\nabla(\rho g z) - \nabla p \qquad \Rightarrow \qquad \nabla \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho \cdot \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + p + \rho g z \right) = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\boxed{\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho \cdot \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + p + \rho g z = C(t)} \qquad \textit{Εξίσωση του Bernoulli}$$

Η τελευταία εξίσωση ισχύει για ροή *ασυμπίεστου (incompressible), μη συνεκτικού (inviscid)* ρευστού, η οποία είναι:

- *αστρόβιλη* (irrotational) και
- *χρονικά μεταβαλλόμενη* (unsteady).

Ιάσονας Δήμου (iason.dimou@gmail.com – 690 721 3001)
Διπλ. Ναυπηγός – Μηχανολόγος Μηχανικός MSc (MIT)

Η δυναμική οριακή συνθήκη προκύπτει από την μαθηματική έκφραση της πρότασης: «*Η πίεση της θάλασσας στην ελεύθερη επιφάνεια (διεπιφάνεια υγρού – αέρα) ισούται με την ατμοσφαιρική*». Χωρίς βλάβη της γενικότητας επιλέγουμε ως $C(t) = p_{\alpha\tau\mu}$, όταν δηλαδή η θάλασσα είναι ήρεμη. Τότε, η εξίσωση Bernoulli γράφεται:

$$\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\rho}{2}\cdot\nabla\Phi\cdot\nabla\Phi + p_{\alpha\tau\mu} + \rho g z = p_{\alpha\tau\mu} \quad \Rightarrow \quad \rho\cdot\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\cdot\nabla\Phi\cdot\nabla\Phi + gz\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\cdot\nabla\Phi\cdot\nabla\Phi + gz = 0$$

Για $z = \eta(x,y,t)$ στην ελεύθερη επιφάνεια κυματισμού ισχύει: $$\boxed{\eta(x,y,t) = -\frac{1}{g}\cdot\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\cdot|\nabla\Phi|^2\right)}$$

1.2.3 Κινηματικές Οριακές Συνθήκες

1. Στην επιφάνεια του πυθμένα ισχύει η *συνθήκη μη εισχώρησης*, δηλαδή ένα σωματίδιο του νερού το οποίο βρίσκεται στον πυθμένα δεν μπορεί να «ξεκολλήσει» από αυτόν. Μαθηματικά, η παραπάνω πρόταση ισοδυναμεί με τον μηδενισμό της κάθετης στην επιφάνεια του πυθμένα συνιστώσας της ταχύτητας του ρευστού:

$$v_z(z=-h) = \left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=-h} = 0$$

2. Η θέση των σωματιδίων της θάλασσας στην ελεύθερη επιφάνειά της σε κάθε χρονική στιγμή, δηλαδή η ελεύθερη επιφάνεια του κύματος, περιγράφεται από την συνάρτηση:

$$z = \eta(x,y,t) \quad \Rightarrow \quad z - \eta(x,y,t) = 0$$

Η επιφάνεια του κυματισμού είναι μία υλική επιφάνεια, δηλαδή κάθε σωματίδιο νερού (fluid particle) που ανήκει στην ελεύθερη επιφάνεια της θάλασσας παραμένει εκεί για κάθε χρονική στιγμή. Μαθηματικά, τα παραπάνω περιγράφονται με την εξίσωση της υλικής παραγώγου κάθε σωματιδίου της ελεύθερης επιφάνειας του κυματισμού με 0:

$$\frac{D}{Dt}\big(z - \eta(x,y,t)\big) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\big(z - \eta(x,y,t)\big) + \nabla\Phi\cdot\nabla\big(z - \eta(x,y,t)\big) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0} \quad \text{για} \quad z = \eta(x,y,t) \quad \text{(ελεύθερη επιφάνεια κυματισμού)}$$

3. Αν εκτός από το κύμα στο πεδίο της επίλυσης της διαφορικής εξίσωσης του Laplace υπάρχει ένα ακίνητο σώμα, π.χ. ακίνητο πλοίο, τότε η συνιστώσα της ταχύτητας του ρευστού που είναι κάθετη στην επιφάνεια του σώματος πρέπει να είναι μηδέν (συνθήκη μη εισχώρησης), δηλαδή ισχύει:

$$v_n = \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0$$

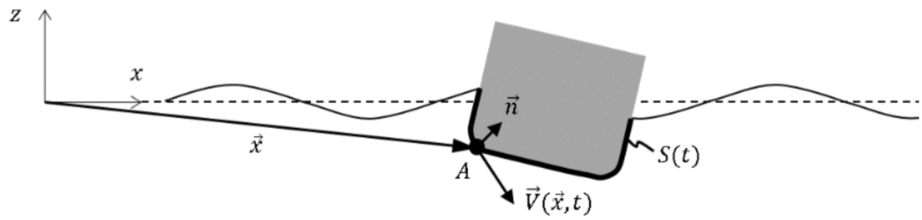
όπου:

$\vec{n}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια του σώματος με κατεύθυνση προς το εσωτερικό του σώματος

Σημείωση: *Η μερική παράγωγος* $\frac{\partial}{\partial n}$ *συμβολίζει την παράγωγο του μεγέθους σε κατεύθυνση κάθετη στην επιφάνεια του σώματος (θετική προς το σώμα).*

Στη γενικότερη περίπτωση, όπου ένα σώμα κινείται στη θάλασσα με ταχύτητα $\vec{v}$, η συνθήκη αυτή γράφεται:

$$\boxed{\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \nabla\Phi \cdot \vec{n} = \vec{v} \cdot \vec{n}}$$ στην επιφάνεια του σώματος



Σχήμα 5: Κάθε μόριο νερού που είναι σε επαφή με την εξωτερική επιφάνεια ενός σώματος που βρίσκεται μέσα στη θάλασσα έχει ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του σώματος στην κατεύθυνση που είναι κάθετη στην επιφάνεια.

1.2.4 Γραμμικοποιώντας το πρόβλημα

Οι οριακές συνθήκες στην ελεύθερη επιφάνεια του κυματισμού είναι μη γραμμικές. Τότε, η επίλυση της εξίσωσης του Laplace δεν έχει μία γενική λύση, αλλά εξαρτάται από το σχήμα της ελεύθερης επιφάνειας, το οποίο αρχικά είναι άγνωστο (μη γραμμική διαφορική εξίσωση με άγνωστα όρια).

Στο σημείο αυτό εκμεταλλευόμαστε τη φυσική του συγκεκριμένου προβλήματος: Η μεγάλη τιμή της έντασης του βαρυτικού πεδίου ($\vec{g}$) παίζει σημαντικό ρόλο στην γρήγορη επαναφορά των σωματιδίων του νερού. Πιο συγκεκριμένα οι θαλάσσιοι κυματισμοί «σπάνε» όταν το ύψος τους ξεπεράσει το 1/7 του πλάτους τους. Δηλαδή, για τους κυματισμούς που θα μελετήσουμε ισχύει $H/\lambda < 1/7$, με συνέπεια οι κλίσεις των κυματισμών αυτών να είναι μικρές, δηλαδή $|\partial\eta/\partial x| \ll 1$ και $|\partial\eta/\partial y| \ll 1$. Συμπερασματικά, στο πλαίσιο της γραμμικής θεωρίας κυματισμών, κρατάμε στις εξισώσεις τους όρους που είναι ανάλογοι με τους όρους που θεωρούνται μικροί , δηλαδή τις παραγώγους του δυναμικού ή της παραγώγου της μετατόπισης της ελεύθερης επιφάνειας. Γινόμενα μικρών όρων και όροι δευτέρας ή/και μεγαλύτερης τάξης αμελούνται.

Με βάση τη θεώρηση αυτή οι εξισώσεις των οριακών συνθηκών στην ελεύθερη επιφάνεια $[z = \eta(x, y, t)]$ γράφονται:

$$\left\{\begin{array}{ll} \left.\frac{\partial \eta}{\partial t} + \cancel{\frac{\partial \Phi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}} + \cancel{\frac{\partial \Phi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}} - \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right|_{z=\eta} = 0 & \text{κινηματική} \\ \eta = -\frac{1}{g}\cdot\left.\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \cancel{\frac{1}{2}\cdot|\nabla\Phi|^2}\right)\right|_{z=\eta} & \text{δυναμική} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \left.\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right|_{z=\eta} \\ \eta = -\frac{1}{g}\cdot\left.\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right|_{z=\eta} \end{array}\right.$$

Γράφοντας τις παραπάνω δύο οριακές συνθήκες ως αναπτύγματα σειρών Taylor (ή ορθότερα αναπτύγματα σειρών Maclaurin εφόσον πρόκειται για το 0) μπορούμε να τις ανάγουμε από την ελεύθερη επιφάνεια του κυματισμού ($z = \eta$) στο επίπεδο $z = 0$, εκμεταλλευόμενοι παράλληλα και τις απλοποιήσεις της γραμμικής θεωρίας:

α. για την κινηματική οριακή συνθήκη:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \left.\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right|_{z=\eta} \Rightarrow$$

$$\left.\frac{\partial \eta}{\partial t}\right|_{z=0} + \cancel{\frac{\eta}{1!}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)}\Bigg|_{z=0} + \cancel{\frac{\eta^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)}\Bigg|_{z=0} + \cdots = \left.\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right|_{z=0} + \cancel{\frac{\eta}{1!}\cdot\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}}\Bigg|_{z=0} + \cancel{\frac{\eta^2}{2!}\cdot\frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^3}}\Bigg|_{z=0} + \cdots \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \left.\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right|_{z=0}$$

β. για τη δυναμική οριακή συνθήκη:

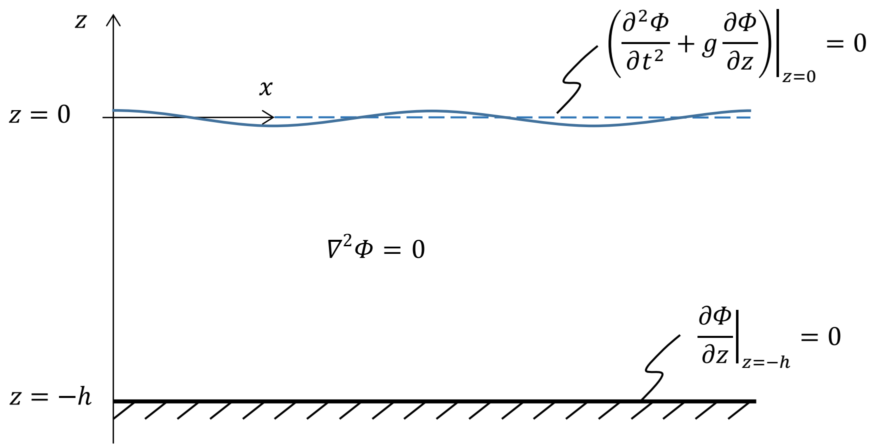
$$\eta = -\frac{1}{g}\cdot\left.\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right|_{z=\eta} = -\frac{1}{g}\cdot\left.\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right|_{z=0} - \cancel{\frac{1}{g}\cdot\frac{\eta}{1!}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial t}}\Bigg|_{z=0} - \cancel{\frac{1}{g}\cdot\frac{\eta^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}}\Bigg|_{z=0} - \cdots \Rightarrow$$

$$\eta = -\frac{1}{g}\cdot\left.\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right|_{z=0}$$

Με βάση τα παραπάνω, οι οριακές συνθήκες στην επιφάνεια του κυματισμού γράφονται:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \eta}{\partial t} = \left.\dfrac{\partial \Phi}{\partial z}\right|_{z=0} \\[2ex] \eta = -\dfrac{1}{g}\cdot\left.\dfrac{\partial \Phi}{\partial t}\right|_{z=0} \end{cases} \xrightarrow{\text{και συνδυαζόμενες γράφονται:}} \boxed{\left.\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)\right|_{z=0} = 0}$$

Η τελευταία σχέση προκύπτει με την παραγώγιση ως προς χρόνο της δυναμικής οριακής συνθήκης και αντικατάσταση του όρου $\partial\eta/\partial t$ στην κινηματική οριακή συνθήκη με το αποτέλεσμα της παραγώγισης. Η συνδυαστική αυτή συνθήκη ονομάζεται ***μικτή οριακή συνθήκη***. Τελικά, το γραμμικοποιημένο πρόβλημα (διαφορική εξίσωση και οριακές συνθήκες) απεικονίζεται στο σχήμα που ακολουθεί:



Σχήμα 6: Η απεικόνιση του γραμμικοποιημένου προβλήματος, στο οποίο η μοναδική αλλαγή είναι στην οριακή (μικτή) συνθήκη της επιφάνειας. Στη μάζα του νερού ισχύει η εξίσωση Laplace (εξίσωση συνέχειας) και στον πυθμένα η συνθήκη μη διείσδυσης, δηλαδή η κατακόρυφη ταχύτητα του νερού στον πυθμένα είναι μηδέν, οι οποίες δεν επηρεάζονται από τη γραμμικοποίηση του προβλήματος.

Η γραμμική προσέγγιση στη μοντελοποίηση των θαλάσσιων κυματισμών περιγράφει καλά τα χαρακτηριστικά των πραγματικών κυματισμών, ως υπέρθεση αρμονικών κυμάτων, και η χρήση της δίνει καλές προβλέψεις σε πολλά πρακτικά προβλήματα σχετικά με τη δυναμική συμπεριφορά των πλοίων στη θάλασσα.

1.3 Η θεωρία των αρμονικών κυματισμών (Regular Wave Theory)

Το 1932, ο Lamp απέδειξε ότι η λύση της εξίσωσης Laplace με τις παραπάνω οριακές συνθήκες είναι συνάρτηση της μορφής:

$$\Phi(x,z,t) = A(z) \cdot \sin(kx - \omega t)$$

και πιο συγκεκριμένα είναι:

$$\boxed{\Phi_I(x,z,t) = A \cdot \frac{\omega}{k} \cdot \frac{\cosh[k \cdot (z+h)]}{\sinh(kh)} \cdot \sin(kx - \omega t) = \Re\mathfrak{e}\left\{\mathrm{i} \cdot A \cdot \frac{\omega}{k} \cdot \frac{\cosh[k \cdot (z+h)]}{\sinh(kh)} \cdot e^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}\right\}}$$

Στην τελευταία σχέση είναι:

A το πλάτος του κύματος

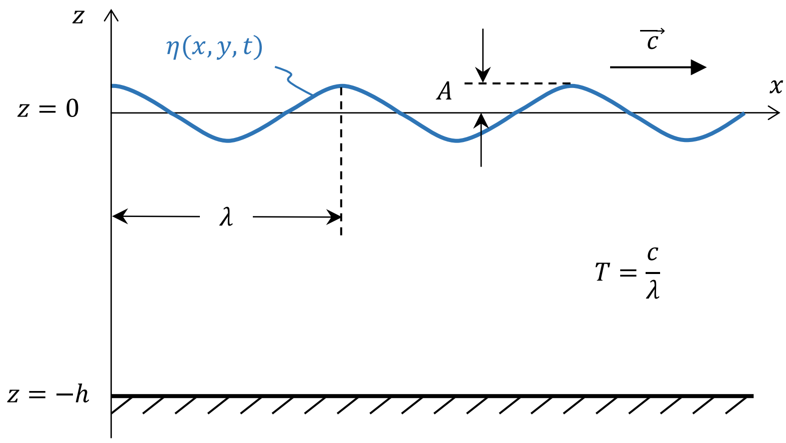
h το βάθος της θάλασσας

ω η συχνότητα του κύματος.

k ο κυματικός αριθμός (ή κυματαριθμός)

Αν T είναι η περίοδος του κύματος και λ το μήκος κύματος (βλ. σχήμα 6), τότε είναι:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{και} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$



Σχήμα 7: Τα βασικά χαρακτηριστικά ενός αρμονικού κύματος, δηλαδή ενός περιοδικού κύματος χωρικά και χρονικά, συχνότητας ω και μήκους λ που κινείται με ταχύτητα c.

1.3.1 Η εξίσωση διασποράς

Αντικαθιστώντας την συνάρτηση $\Phi_I(x,z,t)$ στην οριακή συνθήκη της ελεύθερης επιφάνειας (μικτή συνθήκη) έχουμε:

$$\frac{\partial^2 \Phi_I}{\partial t^2} + g\frac{\partial \Phi_I}{\partial z} = 0 \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{A\omega}{k} \cdot \frac{\cosh[k \cdot (z+h)]}{\sinh(kh)} \cdot \sin(kx - \omega t)\right] + g\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{A\omega}{k} \cdot \frac{\cosh[k \cdot (z+h)]}{\sinh(kh)} \cdot \sin(kx - \omega t)\right] = 0 \Longrightarrow$$

$$\boxed{\omega^2 = g \cdot k \cdot \tanh(kh)}$$

Η τελευταία σχέση ονομάζεται ***εξίσωση διασποράς*** (dispersion relationship) και συνδέει την συχνότητα (ω) και τον κυματαριθμό (k) του κυματισμού, <u>κατά μοναδικό τρόπο</u>. Δηλαδή, μόνο τα ζευγάρια ω και k, τα οποία ικανοποιούν την τελευταία σχέση αντιστοιχούν σε λύση απλού αρμονικού κυματισμού φυσικά πραγματοποιήσιμη.

<u>Σημείωση</u>: Εκμεταλλευόμενοι την εξίσωση διασποράς, η εξίσωση του δυναμικού της ταχύτητας γράφεται και ως εξής:

$$\boxed{\Phi_I(x,z,t) = \frac{Ag}{\omega}\cdot\frac{\cosh[k\cdot(z+h)]}{\cosh(kh)}\cdot\sin(kx-\omega t) = \Re\left\{\mathrm{i}\cdot\frac{Ag}{\omega}\cdot\frac{\cosh[k\cdot(z+h)]}{\cosh(kh)}\cdot e^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}\right\}}$$

Με βάση την εξίσωση διασποράς, από την δυναμική οριακή συνθήκη για $z = 0$ προκύπτει η ανύψωση της στάθμης της θάλασσας (επιφανειακά κύματα):

$$\boxed{\eta(x,t) = A\cdot cos(kx-\omega t) = \Re\{A\cdot e^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}\}}$$

Συχνά στη μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς του πλοίου παρουσία κυματισμών βολεύει να γράφουμε τις παραπάνω σχέσεις διαχωρίζοντας τη χρονική τους εξάρτηση. Έτσι, στην περίπτωση της ανύψωσης της θάλασσας γράφουμε:

$$\eta(x,t) = \Re\{A\cdot e^{\mathrm{i}kx}\cdot e^{-\mathrm{i}\omega t}\} = \Re\{\eta_0\cdot e^{-\mathrm{i}\omega t}\}$$

όπου:

η μεταβλητή $\eta_0 = A\cdot e^{\mathrm{i}kx}$ ονομάζεται μιγαδικό πλάτος (ή παραστατικός μιγάς) της ανύψωσης της επιφάνειας.

Αντίστοιχα, στην περίπτωση της συνάρτησης του δυναμικού της ταχύτητας θα είναι:

$$\Phi_I(x,z,t) = \Re\left\{\mathrm{i}\cdot\frac{Ag}{\omega}\cdot\frac{\cosh[k\cdot(z+h)]}{\cosh(kh)}\cdot e^{\mathrm{i}kx}\cdot e^{-\mathrm{i}\omega t}\right\} = \Re\{\Phi_0\cdot e^{-\mathrm{i}\omega t}\}$$

όπου:

$\Phi_0 = \Phi_I\cdot e^{\mathrm{i}kx}$ το μιγαδικό πλάτος (ή παραστατικός μιγάς) του δυναμικού της ταχύτητας της θάλασσας.

1.3.2 Η ταχύτητα διάδοσης κύματος

Η ταχύτητα διάδοσης της κυματομορφής (***phase velocity***) δίνεται από την σχέση:

$$c = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{c = \sqrt{\frac{g}{k}\cdot tanh(kh)}}$$

Προσοχή στην σύγχυση μεταξύ της ταχύτητας διάδοσης του κύματος (c) και της ταχύτητας του ρευστού ($\vec{v} = \nabla\Phi_I$) !

1.3.3 Η (υδροδυναμική) πίεση

Η πίεση σε κάθε σημείο του πεδίου δίνεται από την εξίσωση Bernoulli:

$$p - p_a = \underbrace{-\rho\frac{\partial\Phi_0}{\partial t}}_{\substack{\upsilon\delta\rho o\delta\upsilon\nu\alpha\mu\iota\kappa\eta\\ \pi\iota\varepsilon\sigma\eta\ \pi\rho\omega\tau\eta\varsigma\\ \tau\alpha\xi\eta\varsigma}} \underbrace{-\frac{1}{2}\rho\cdot\nabla\Phi_0\cdot\nabla\Phi_0}_{\substack{\upsilon\delta\rho o\delta\upsilon\nu\alpha\mu\iota\kappa\eta\\ \pi\iota\varepsilon\sigma\eta\ \delta\varepsilon\upsilon\tau\varepsilon\rho\eta\varsigma\\ \tau\alpha\xi\eta\varsigma}} \underbrace{-\rho gz}_{\substack{\upsilon\delta\rho o\sigma\tau\alpha\tau\iota\kappa\eta\\ \pi\iota\varepsilon\sigma\eta}}$$

Γραμμικοποιώντας την τελευταία σχέση, δηλαδή διατηρώντας μόνο τις υδροδυναμικές πιέσεις πρώτης τάξης, προκύπτει ότι η πίεση έχει δύο παράγοντες: την υδροστατική (p_s) και την υδροδυναμική (p_d). Η τελευταία οφείλεται στην παρουσία του κυματισμού. Είναι:

$$p - p_a = \underbrace{-\rho\frac{\partial\Phi_0}{\partial t}}_{\substack{p_d\\ \upsilon\delta\rho o\delta\upsilon\nu\alpha\mu\iota\kappa\acute{\eta}\ \pi\acute{\iota}\varepsilon\sigma\eta}} \underbrace{-\rho gz}_{\substack{p_s\\ \upsilon\delta\rho o\sigma\tau\alpha\tau\iota\kappa\acute{\eta}\ \pi\acute{\iota}\varepsilon\sigma\eta}}$$

Αντικαθιστώντας την χρονική παράγωγο της συνάρτηση $\Phi_0(x,z,t)$ προκύπτει η δυναμική πίεση λόγω της παρουσίας του κυματισμού:

$$\boxed{p_d(x,z,t) = \frac{\rho A\omega^2}{k}\cdot\frac{\cosh[k\cdot(z+h)]}{\sinh(kh)}\cdot\cos(kx-\omega t) = \Re\mathrm{e}\left\{\frac{\rho A\omega^2}{k}\cdot\frac{\cosh[k\cdot(z+h)]}{\sinh(kh)}\cdot e^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}\right\}}$$

Εναλλακτικά, χρησιμοποιώντας την εξίσωση διασποράς, η υδροδυναμική πίεση λόγω κυματισμού δίνεται από την σχέση:

$$\boxed{p_d(x,z,t) = \rho g A\cdot\frac{\cosh[k\cdot(z+h)]}{\cosh(kh)}\cdot\cos(kx-\omega t)}$$

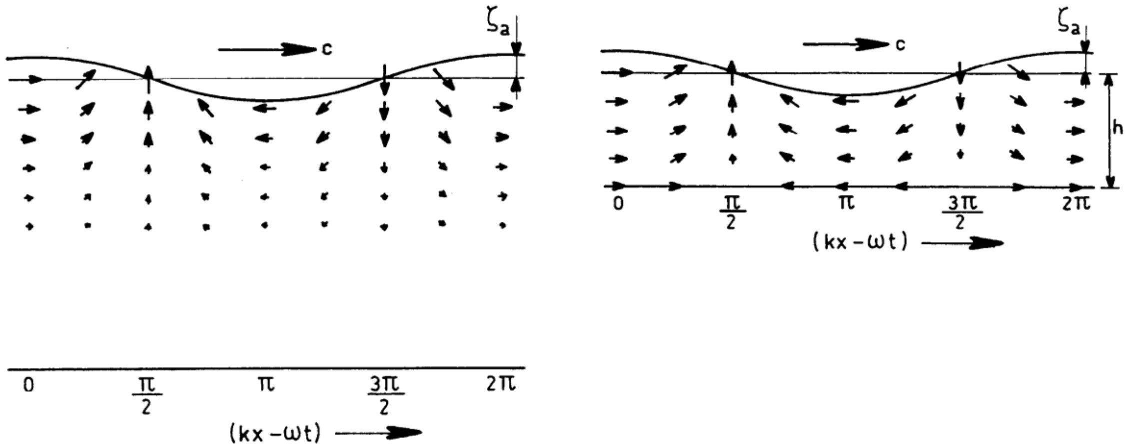
1.3.4 Οι συνιστώσες της ταχύτητας (των σωματιδίων) του ρευστού

Οι συνιστώσες της ταχύτητας (των σωματιδίων) του ρευστού στους άξονες x και z αντίστοιχα, λόγω της παρουσίας κυματισμού, δίνονται από τις σχέσεις:

$$v_x = \frac{\partial\Phi_I}{\partial x} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{v_x = \frac{Agk}{\omega}\cdot\frac{\cosh[k\cdot(z+h)]}{\cosh(kh)}\cdot\cos(kx-\omega t) = A\omega\cdot\frac{\cosh[k\cdot(z+h)]}{\sinh(kh)}\cdot\cos(kx-\omega t)}$$

$$v_z = \frac{\partial\Phi_I}{\partial z} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{v_z = \frac{Agk}{\omega}\cdot\frac{\sinh[k\cdot(z+h)]}{\cosh(kh)}\cdot\sin(kx-\omega t) = A\omega\cdot\frac{\sinh[k\cdot(z+h)]}{\sinh(kh)}\cdot\sin(kx-\omega t)}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις παρατηρούμε ότι η συνιστώσα ταχύτητα κάθε σωματιδίου εξαρτάται από το βάθος που βρίσκεται το σωματίδιο (z), αλλά από το βάθος του νερού (h). Σε νερά με μεγάλο βάθος, το κύμα αποσβένεται όταν $z > \frac{\lambda}{2}$ (σχήμα 7α).



(α) (β)

Σχήμα 8: Το πεδίο ταχυτήτων των σωματιδίων του ρευστού: α. σε βαθιά νερά και β. σε ρηχά νερά.
Πηγή: J. Journee, W. Massie, Offshore Hydromechanics, 1st Edition, DELFT University, 2001.

Στην επιφάνεια της θάλασσας ($z = 0$), οι συνιστώσες της ταχύτητας είναι:

$$v_{x0} = \frac{A\omega}{\tanh(kh)}\cdot\cos(kx-\omega t)$$

και

$$v_{z0} = A\omega\cdot\sin(kx-\omega t)$$

1.3.5 Η εξίσωση τροχιάς των σωματιδίων του ρευστού

Ολοκληρώνοντας χρονικά τις ταχύτητες των σωματιδίων του ρευστού (fluid particles), προκύπτουν οι μετακινήσεις τους:

$$x_P - \bar{x} = -A \cdot \frac{\cosh[k \cdot (z+h)]}{\sinh(kh)} \cdot \sin(kx - \omega t)$$

$$z_P - \bar{z} = A \cdot \frac{\sinh[k \cdot (z+h)]}{\sinh(kh)} \cdot \cos(kx - \omega t)$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις, με χρήση της τριγωνομετρικής ταυτότητας:

$$\sin^2(kx - \omega t) + \cos^2(kx - \omega t) = 1$$

προκύπτει ότι τα σωματίδια του ρευστού κινούνται πάνω σε ελλειπτικές τροχιές με εξίσωση τροχιάς:

$$\frac{(x_P - \bar{x})^2}{\left(A \cdot \dfrac{\cosh[k \cdot (\bar{z}+h)]}{\sinh(kh)}\right)^2} + \frac{(z_P - \bar{z})^2}{\left(A \cdot \dfrac{\sinh[k \cdot (\bar{z}+h)]}{\sinh(kh)}\right)^2} = 1$$

όπου

x_P, z_P: είναι οι συντεταγμένες του σωματιδίου P τη χρονική στιγμή t

$\bar{x}, \bar{z}$: είναι η μέση τιμή του σωματιδίου, δηλαδή το κέντρο της έλλειψης.

1.3.6 Βαθιά, ενδιάμεσα και ρηχά νερά

Με μία προσεκτικότερη ματιά στους παραπάνω τύπους παρατηρούμε ότι όλοι εξαρτώνται από το βάθος της θάλασσας (h). Επίσης, ανατρέχοντας στις ιδιότητες των υπερβολικών συναρτήσεων διαπιστώνουμε ότι για μεγάλα και μικρά h μπορούν να γίνουν κάποιες απλοποιήσεις στις παραπάνω σχέσεις. Πιο συγκεκριμένα, είναι:

$$\tanh(kh) = \frac{\sinh(kh)}{\cosh(kh)} = \frac{1 - e^{-2kh}}{1 + e^{-2kh}} \approx \begin{cases} kh\,, & \text{αν } kh \ll 1 \\ 1\,, & \text{αν } kh > 3 \end{cases}$$

Έτσι, διαχωρίζουμε τους κυματισμούς σε τρεις κατηγορίες:

α. Κυματισμοί σε βαθιά νερά (***deep water waves***)

Για τους κυματισμούς αυτούς ισχύει: $h \gg \lambda \implies kh \gg 1$. Τότε, είναι: $\tanh(kh) \approx 1$.

Πρακτικά, βαθιά νερά θεωρούνται τα νερά με βάθη: $h > \frac{\lambda}{2} \iff \lambda < 2h$

β. Κυματισμοί σε ρηχά νερά (***swallow water waves***)

Για τους κυματισμούς αυτούς ισχύει: : $h \ll \lambda \implies kh \ll 1$. Τότε, είναι: $\tanh(kh) \approx kh$.

Πρακτικά, ρηχά νερά θεωρούνται τα νερά με βάθη: $h < \frac{\lambda}{20} \iff \lambda > 20h$

γ. Κυματισμοί σε ενδιάμεσα νερά (***intermediate water waves***)

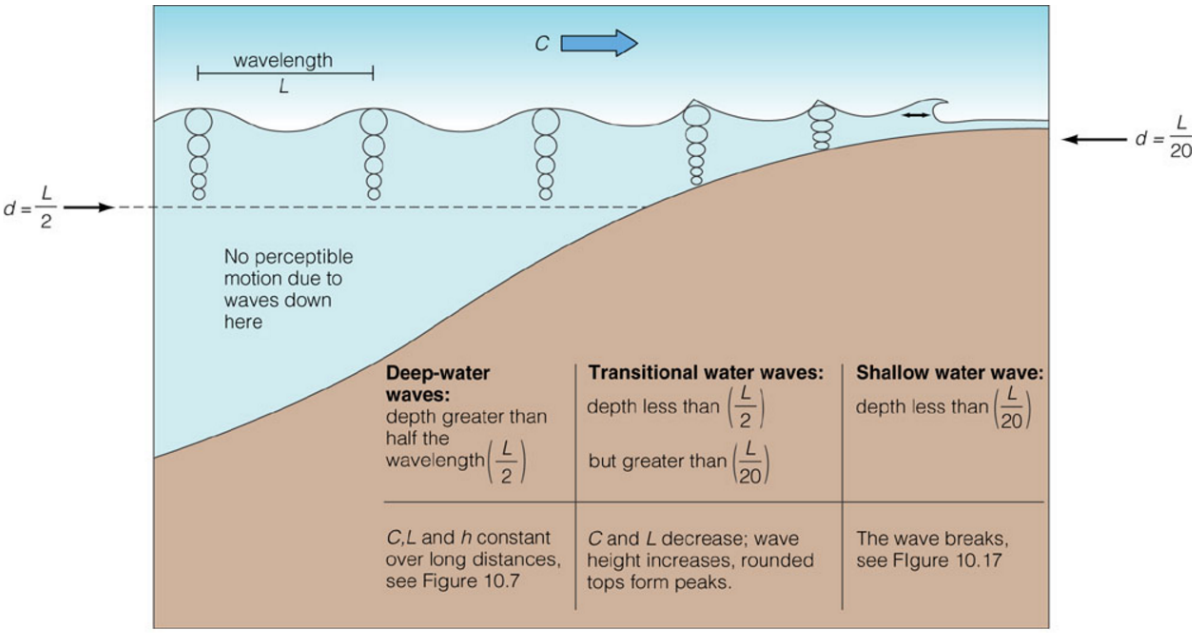
Είναι οι κυματισμοί που εμφανίζονται σε βάθη: $\frac{\lambda}{20} < h < \frac{\lambda}{2}$

Η παραπάνω κατηγοριοποίηση έχει ως αποτέλεσμα τη διαμόρφωση των εξισώσεων όπως φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί:

	Κυματισμοί σε ρηχά νερά $h < \frac{\lambda}{20}$	Κυματισμοί σε ενδιάμεσα νερά $\frac{\lambda}{20} < h < \frac{\lambda}{2}$	Κυματισμοί σε βαθιά νερά $\frac{\lambda}{2} < h$
Δυναμικό ταχύτητας	$\Phi_I = \frac{Ag}{\omega} \cdot \sin(kx - \omega t)^*$	$\Phi_I = \frac{Ag}{\omega} \cdot \frac{\cosh[k \cdot (z+h)]}{\cosh(kh)} \cdot \sin(kx - \omega t)$	$\Phi_I = \frac{Ag}{\omega} \cdot e^{kz} \cdot \sin(kx - \omega t)$
Εξίσωση Διασποράς	$\omega = k \cdot \sqrt{gh}$	$\omega^2 = gk \cdot tanh(kh)$	$\omega^2 = gk$
Ταχύτητα Διάδοσης Κυματομορφής	$c = \sqrt{gh}$	$c = \sqrt{\frac{g}{k} \cdot \tanh(kh)}$	$c = \sqrt{\frac{g}{k}}$
Υδροδυναμική Πίεση	$p_d = \rho g A \cdot \cos(kx - \omega t)$	$p_d = \rho g A \cdot \frac{\cosh[k \cdot (z+h)]}{\cosh(kh)} \cdot \cos(kx - \omega t)$	$p_d = \rho g A \cdot e^{kz} \cdot \cos(kx - \omega t)$

* *Το δυναμικό ταχύτητας στο ρηχό νερό δεν χρησιμοποιείται, γιατί ικανοποιεί την εξίσωση Laplace μόνο προσεγγιστικά (για μικρούς κυματαριθμούς είναι:* $\nabla^2\Phi_I = \frac{\partial^2\Phi_I}{\partial x^2} = -k^2\Phi_I \approx 0$*). Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούνται απευθείας οι εξισώσεις Euler για τη ροή.*

Τέλος, σε ό,τι αφορά τις τροχιές των σωματιδίων του νερού, στα βαθιά νερά, είναι κυκλικές και αποσβένουν κινούμενοι προς τον πυθμένα. Σε βάθος $z \geq \lambda/2$, το κύμα παύει να είναι αντιληπτό από το ρευστό (σχήμα 8). Όσο ο κυματισμός πλησιάζει προς τα ρηχά νερά οι τροχιές γίνονται ελλειπτικές, ο κυματισμός πιο αργός, ενώ στα ρηχά νερά οι κυματισμοί γίνονται ολοένα και πιο απότομοι στις κορυφές τους. Όταν το ύψος του κύματος $H(= 2A)$ φτάσει να είναι ίσο με $\lambda/7$, τότε η κορυφή του κύματος γίνεται τόσο «μυτερή» (απότομη), ώστε δεν μπορεί να υποστηρίξει το βάρος της και το κύμα «σπάει» (wave brake).



Σχήμα 9: Καθώς τα κύματα κινούνται από τα βαθιά νερά προς ρηχότερα, γίνονται πιο απότομα στις κορυφές τους, λόγω της αλληλεπίδρασής τους με τον βυθό, μέχρι που κάποια στιγμή «σπάνε» μη αντέχοντας το βάρος τους.
Πηγή: http://ksuweb.kennesaw.edu/~jdirnber/oceanography/LecuturesOceanogr/LecWaves/1006.jpg

1.3.7 Η ενέργεια των κυματισμών και η ομαδική ταχύτητα

Οι θαλάσσιοι κυματισμοί μεταφέρουν ενέργεια. Η ενέργεια αυτή είναι δυναμική, λόγω της ανύψωσής τους, και κινητική, λόγω της ταχύτητας διάδοσής τους. Έτσι, η ενέργεια ανά μονάδα μήκους (ή πυκνότητα ενέργειας) ενός αρμονικού κυματισμού, σε βαθιά νερά, είναι:

Δυναμική Ενέργεια (ΔΕ)	Κινητική Ενέργεια (ΚΕ)
Ενέργεια ανά μονάδα μήκους κύματος	
$\Delta E\ (\chi\omega\rho\iota\varsigma\ \kappa\upsilon\mu\alpha) = \int_{-h}^{0} \rho g z dz = -\frac{1}{2}\rho g h^2$ $\Delta E\ (\mu\varepsilon\ \kappa\upsilon\mu\alpha) = \int_{-h}^{\eta} \rho g z dz = \frac{1}{2}\rho g(\eta^2 - h^2)$ Άρα: $\Delta E_{\kappa\upsilon\mu\alpha\tau o\varsigma} = \frac{1}{2}\rho g \eta^2 = \frac{1}{2}\rho g A^2 \cdot cos^2(kx - \omega t)$	$KE_{\kappa\upsilon\mu\alpha\tau o\varsigma} = \int_{-h}^{\eta} \frac{1}{2}\rho({v_x}^2 + {v_z}^2)dz = \cdots$ $= \frac{1}{4}\rho g A^2$
Μέση Ενέργεια ανά περίοδο (ή μήκος κύματος)	
$\overline{\Delta E}_{\kappa\upsilon\mu\alpha\tau o\varsigma} = \frac{1}{4}\rho g A^2$	$\overline{KE}_{\kappa\upsilon\mu\alpha\tau o\varsigma} = \frac{1}{4}\rho g A^2$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η **συνολική μέση ενέργεια ανά μονάδα επιφάνειας και ανά περίοδο** (ή μήκος κύματος) που μεταφέρει ο κυματισμός, ανεξάρτητα από το βάθος, είναι:

$$\overline{E_S} = \overline{\Delta E}_{\kappa\upsilon\mu\alpha\tau o\varsigma} + \overline{KE}_{\kappa\upsilon\mu\alpha\tau o\varsigma} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overline{E_S} = \frac{1}{2}\rho g A^2}$$

Στην περίπτωση των γραμμικών κυματισμών είναι: $\overline{\Delta E}_{\kappa\upsilon\mu\alpha\tau o\varsigma} = \overline{KE}_{\kappa\upsilon\mu\alpha\tau o\varsigma} = \frac{\overline{E_S}}{2}$

Αντίθετα, για μη γραμμικούς κυματισμούς ισχύει: $\overline{\Delta E}_{\kappa\upsilon\mu\alpha\tau o\varsigma} < \overline{KE}_{\kappa\upsilon\mu\alpha\tau o\varsigma}$

Η ροής ενέργειας του κυματισμού δίνεται από την σχέση:

$$S = \frac{d\overline{E_S}}{dt} = \int_{-h}^{\eta} p \cdot v_x\, dv_x = \int_{-h}^{\eta} -\rho\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + gz\right) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x}\, dv_x \Longrightarrow$$

$$S = \underbrace{\frac{1}{2}\rho g A^2}_{\overline{E_S}} \cdot \underbrace{\frac{\omega}{k}}_{c} \cdot \underbrace{\left[\frac{1}{2}\cdot\left(1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)}\right)\right]}_{n} = \overline{E_S} \cdot n \cdot c = \overline{E_S} \cdot c_g$$

Ο όρος c_g αντιστοιχεί στην ταχύτητα διάδοσης της ενέργειας του κυματισμού και ονομάζεται **ομαδική ταχύτητα** (***group velocity***). Ορίζεται ως:

$$\boxed{c_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2}\cdot\left(1 + \frac{2kh}{sinh(2kh)}\right)\cdot c}$$

Για βαθιά νερά είναι: $c_g = \frac{c}{2}$

Για ρηχά νερά είναι: $c_g = c$

Για ενδιάμεσα νερά είναι: $\frac{c}{2} < c_g < c$