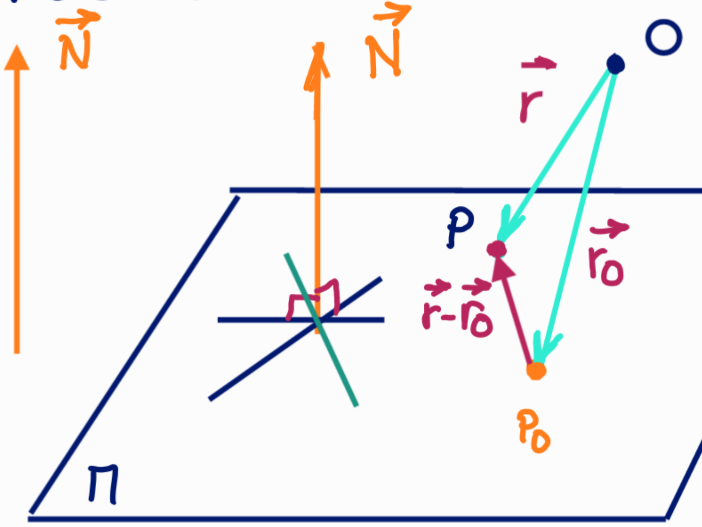
Εξισώσεις Επιπέδου

Α' Μαχίμων Ι - Α' Μηχανικών
2024 - 2025

Εξισώσεις επιπέδου

1. Εξισώσεις επιπέδου που διέρχεται από γνωστό σημείο και είναι κάθετο σε διάνυσμα



$\vec{N}(A,B,C)$
$P_0(x_0,y_0,z_0)$
Έστω τυχόν σημείο $P(x,y,z)$ του επιπέδου

Γνωστά τα εξής:

$P_0(x_0,y_0,z_0) \in \Pi$

$\vec{N} \perp \Pi$

Επίσης έχουμε:

$\vec{OP}=\vec{r}$, $\vec{OP_0}=\vec{r_0} \Longrightarrow$

$\vec{P_0P}=\vec{r}-\vec{r_0}$

Εφ' όσον $\vec{N} \perp \Pi$, τότε είναι κάθετο σε οποιαδήποτε ευθεία του επιπέδου περνάει από το σημείο τομής του διανύσματος με το επίπεδο και επομένως το $\vec{N}$ είναι κάθετο σε οποιοδήποτε άλλο διάνυσμα του επιπέδου αυτού. Άρα

$\vec{N} \perp \vec{P_0P}=\vec{r}-\vec{r_0}$

Συνεπώς $\vec{N} \cdot (\vec{r} - \vec{r_0}) = 0$

α. Διανυσματική εξίσωση επιπέδου $\vec{N} \cdot (\vec{r} - \vec{r_0}) = 0$

όπου $\vec{N} \perp \Pi$ και $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \Pi$.

β. Αναλυτική εξίσωση επιπέδου: $\vec{N} = (A, B, C)$

και $\vec{N} \perp \Pi$ και επίσης $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \Pi$.

Άρα $(A, B, C) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0}$$

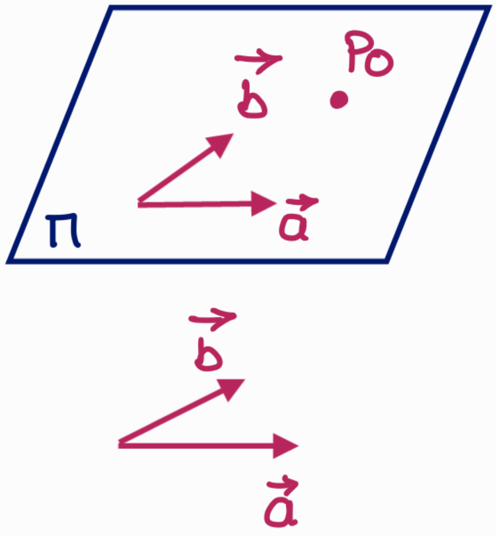
$$\Rightarrow Ax + By + Cz = D, \text{ όπου}$$

$$D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$$

Παράδειγμα: $\Pi : 3x - 2y + z = 4$

Άρα $\vec{N} \perp \Pi$ είναι: $\vec{N} = (3, -2, 1)$

2. Εξίσωση επιπέδου που διέρχεται από γνωστό σημείο και είναι παράλληλο σε δύο γνωστά διανύσματα



Δεδομένα:

$\vec{a}, \vec{b} \parallel \Pi$, όπου

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$

$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$

και $P_0(x_0, y_0, z_0)$

α. Διανυσματική εξίσωση $\vec{r} - \vec{r_0} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$, όπου

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ του επιπέδου ή

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

β. Παραμετρικές εξισώσεις

$$x = x_0 + \lambda a_1 + \mu b_1$$
$$y = y_0 + \lambda a_2 + \mu b_2$$
$$z = z_0 + \lambda a_3 + \mu b_3$$

γ. Αναλυτική εξίσωση

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0}$$

$P_0(x_0, y_0, z_0) \in \Pi$

$\vec{a_1} = (a_1, a_2, a_3) \parallel \Pi$

$\vec{b_1} = (b_1, b_2, b_3) \parallel \Pi$

$P(x, y, z)$ τυχόν σημείο του επιπέδου Π

Ασκήσεις

1. Να βρεθεί η αναλυτική εξίσωση του επιπέδου Π που διέρχεται από το σημείο $P_0(4, 1, -1)$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{N} = (2, -3, 5)$

Λύση

Άρα η αναλυτική εξίσωση του επιπέδου Π:

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$,

όπου $\vec{N} = (A, B, C)$, $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \Pi$

και $\vec{N} \perp \Pi$, οπότε αντικαθιστώντας παίρνουμε

$2(x - 4) - 3(y - 1) + 5(z + 1) = 0 \Rightarrow$

$2x - 3y + 5z = 0$

2. Να βρεθεί η παραμετρική και αναλυτική εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο $M(2, -1, -3)$ και είναι παράλληλο στα διανύσματα $\vec{a} = (2, 1, -2)$ και $\vec{\beta} = (-3, 0, 3)$

Λύση:

Παραμετρική : $\begin{cases} x = 2 + 2\lambda - 3\mu \\ y = -1 + \lambda + 0.\mu \\ z = -3 - 2\lambda + 3\mu \end{cases}$ $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

και αναλυτική εξίσωση του επιπέδου:

$$\begin{vmatrix} \overset{+}{x-2} & \overset{-}{y+1} & \overset{+}{z+3} \\ \overset{-}{2} & \overset{+}{1} & \overset{-}{-2} \\ \overset{+}{-3} & \overset{-}{0} & \overset{+}{3} \end{vmatrix} = 0$$

$P_0(2,-1,-3) \in \Pi$

$\vec{a} = (2, 1, -2) // \Pi$

$\vec{b} = (-3, 0, 3) // \Pi$

οπότε αναπτύσσοντας την ορίζουσα ως προς την δεύτερη στήλη έχουμε

$$\underbrace{-(y+1)\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}}_{-(y+1)(6-6)} + 1\begin{vmatrix} x-2 & z+3 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} + 0 = 0$$

$$\Rightarrow 3(x-2) + 3(z+3) = 0 \Rightarrow 3x + 3z = -3 \Rightarrow$$

$\Pi: x + z = -1 \longrightarrow 1x + 0y + 1z = -1$

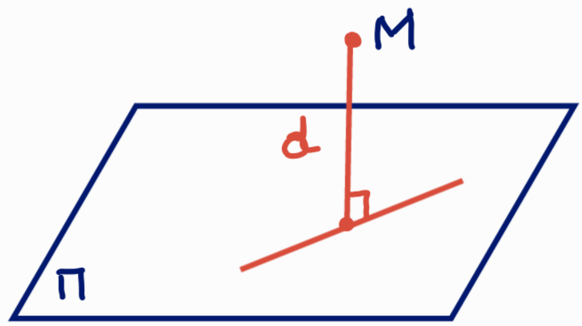
$N \perp \Pi : \vec{N} = (1, 0, 1)$

$-x + \frac{5}{2}y = 5 \Rightarrow \vec{N} = \left(-1, \frac{5}{2}, 0\right)$ κάθετο

$\Pi: y - z = -1 \Rightarrow \vec{N} = (0, 1, -1)$

Απόσταση σημείου M από επίπεδο $\Pi: Ax+By+Cz=D$

και $M(x_0, y_0, z_0)$



$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0-D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$M(1,2,-1)$

$$\Pi: \underset{A}{-2}x + \underset{B}{y} + \underset{C}{3}z = \underset{D}{4}$$

d: κάθετη απόσταση του σημείου $M(x_0, y_0, z_0)$ από το επίπεδο Π.

Παράδειγμα:

Να βρεθεί η απόσταση του σημείου $M(1,2,-1)$ από το επίπεδο $\Pi: -2x+y+3z=4$.

Λύση

Εφαρμόζοντας τον τύπο $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0-D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

θέτοντας όπου $x_0=1$, $y_0=2$, $z_0=-1$ και

$A=-2$, $B=1$, $C=3$ και $D=4$, παίρνουμε

$$d=\frac{|(-2)\cdot 1+1\cdot 2+3\cdot(-1)-4|}{\sqrt{(-2)^2+1^2+3^2}}=\frac{|-7|}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{14}}{2}$$